

随机过程引论

李增沪

北京师范大学数学科学学院

2014 年 3 月

目 录

第一章 随机过程	1
1.1 基本概念	1
1.2 相容性定理	5
1.3 流和停时	11
1.4 加强的流	16
第二章 鞅论基础	23
2.1 鞅和鞅序列	23
2.2 上穿不等式	31
2.3 下鞅的正则化	36
第三章 马尔可夫过程	43
3.1 马氏性的定义	43
3.2 转移半群	46
3.3 马氏系统	52
3.4 博雷尔右过程	57
第四章 费勒过程	63
4.1 费勒转移半群	63
4.2 轨道性质	67
4.3 生成元和鞅问题	72
4.4 拟左连续性	75
第五章 莱维过程	81
5.1 独立增量性	81
5.2 普瓦松过程	84
5.3 布朗运动	87

5.4 莱维-伊藤表示	93
参考文献	99

第一章 随机过程

在这一章中, 我们首先介绍随机过程的若干基本概念, 包括过程的修正, 有限维分布族, 等价性, 科尔莫戈罗夫 (Kolmogorov) 相容定理, 流和停时等. 随机过程的内容相当丰富. 关于这方面的教材可参见 [4, 18, 21, 22] 等, 关于更深入系统的讨论见 [10, 11, 12].

§1.1 基本概念

设 I 是一个指标集, 原则上它可以是任意的集合. 通常假定 I 是整数集 $\mathbb{Z}$ 或实数集 $\mathbb{R}$ 中的区间, 分别称为离散时间集与连续时间集. 在本章中, 我们主要考虑指标集取为 $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ 或 $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ 的情况. 如果 $(E, \mathcal{E})$ 是一个可测空间, 我们也用 $\mathcal{E}$ 表示 E 上关于 $\mathcal{E}$ 可测的实值函数全体. 另外, 分别用 $b\mathcal{E}$ 和 $p\mathcal{E}$ 表示 E 上关于 $\mathcal{E}$ 可测的有界和非负实值函数全体. 有时也写 $pb\mathcal{E}$ 或 $bp\mathcal{E}$, 表示 E 上关于 $\mathcal{E}$ 可测的有界非负实值函数全体. 固定 $x \in E$, 我们可定义 $(E, \mathcal{E})$ 上的测度 δ_x 如下: 对于 $B \in \mathcal{E}$ 令 $\delta_x(B) = 1$ 若 $x \in B$, $\delta_x(B) = 0$ 若 $x \notin B$. 称 δ_x 为集中在 $x \in E$ 点的单位测度. 如果 E 是一个拓扑空间, 我们称其上由所有开集生成的 σ 代数为博雷尔 (Borel) σ 代数, 并记之为 $\mathcal{B}(E)$.

定义 1.1.1 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 是一个概率空间, $(E, \mathcal{E})$ 是一个可测空间, 则一个取值在 E 上的可测映射族 $(X_t : t \in I)$ 称为 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间的随机过程. 当 E 是实数空间 $\mathbb{R}$ 或复数空间 $\mathbb{C}$ 时, 分别称过程是实值过程与复值过程.

例 1.1.1 最简单也最早被人们研究的随机过程是随机游动. 它是一种描述粒子在格子点集 $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 上随机运动的数学模型. 设 $\{\xi_n : n \geq 1\}$ 是某个概率空间上独立同分布的随机变量序列且都服从 Bernoulli 分布, 即

$$\mathbf{P}(\xi_n = 1) = p, \mathbf{P}(\xi_n = -1) = q,$$

其中 $p, q \geq 0$ 且 $p + q = 1$. 称这样的随机序列为 Bernoulli (随机) 序列. 序列 $\{\xi_n : n \geq 1\}$ 是一个特殊的随机过程. 任取整数值 $X_0 = k$ 并令 $X_n = X_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i$ ($n \geq 1$). 则 $\{X_n : n \geq 0\}$ 也是一个随机过程, 称为简单随机游动. 特别地, 当 $p = q = 1/2$ 时, 称 $\{X_n : n \geq 0\}$ 为对称的简单随机游动. $\square$

例 1.1.2 设 $\{\xi_n\}$ 是上例中的 Bernoulli 随机序列. 定义 $S_0 = 0$ 和 $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ($n \geq 1$). 则 $\{S_n : n \geq 0\}$ 是从 0 出发的简单随机游动. 对任何 $x \in \mathbb{Z}$ 定义 $\{S_n\}$ 的首达时 $\tau_x = \inf\{n \geq 0 : S_n = x\}$. 不难看出, 当 $x \rightarrow \infty$ 或 $-\infty$ 时有 $\tau_x \rightarrow \infty$. 取定整数 $a < 0$ 和 $b > 0$. 显然 $\{S_n\}$ 对于区间 (a, b) 的首出时为 $\tau = \tau_a \wedge \tau_b$.

(1) 考虑 $p = q = 1/2$ 的情况. 此时 $\{S_n\}$ 是对称简单随机游动. 对于任意的 $M, n \geq 1$ 我们有

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq 0} |S_k| \leq M\right\} \leq \mathbf{P}\{|S_n| \leq M\} = \mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i\right| \leq \frac{M}{\sqrt{n}}\right\}.$$

利用中心极限定理不难看出, 上式左端概率为零. 再利用概率测度的次 σ 可加性,

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq 0} |S_k| < \infty\right\} = \mathbf{P}\left(\bigcup_{M=1}^{\infty} \left\{\sup_{k \geq 0} |S_k| \leq M\right\}\right) = 0. \quad (1.1.1)$$

所以 $\mathbf{P}(\tau_a \wedge \tau_b < \infty) = \mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$. 在两端分别令 $b \rightarrow \infty$ 和 $a \rightarrow -\infty$ 易得

$$\mathbf{P}(\tau_a < \infty) = \mathbf{P}(\tau_b < \infty) = 1.$$

这样我们实际上证明了下面的重要性质: 对称简单随机游动 $\{S_n\}$ 可在有限时间内到达 $\mathbb{Z}$ 的任一点.

(2) 考虑 $1 > p > q > 0$ 的情况. 此时由大数定律, 当 $n \rightarrow \infty$ 有 $S_n/n \rightarrow p - q$, 从而 $S_n \rightarrow \infty$ (a.s.). 所以 $\mathbf{P}(\tau_b < \infty) = \mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$.

(3) 考虑 $1 > q > p > 0$ 的情况. 与 (2) 中类似地, 当 $n \rightarrow \infty$ 有 $S_n \rightarrow -\infty$ (a.s.). 所以 $\mathbf{P}(\tau_a < \infty) = \mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$. $\square$

定义 1.1.2 假设 $(X_t : t \in I)$ 和 $(Y_t : t \in I)$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上的两个随机过程. 若对任何 $t \in I$ 都有 $N_t \in \mathcal{F}$ 满足 $\mathbf{P}(N_t) = 0$ 且 $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ 对所有 $\omega \in N_t^c$ 成立, 则称 $(X_t : t \in I)$ 和 $(Y_t : t \in I)$ 互为修正. 如果存在 $N \in \mathcal{F}$ 满足 $\mathbf{P}(N) = 1$ 且 $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ 对所有 $\omega \in N^c$ 和 $t \in I$ 成立, 我们称 $(X_t : t \in I)$ 和 $(Y_t : t \in I)$ 是无区别的.

显然, 若过程 $(X_t : t \in I)$ 和 $(Y_t : t \in I)$ 是无区别的, 它们必然互为修正. 当 I 为可数集时, 过程 $(X_t : t \in I)$ 和 $(Y_t : t \in I)$ 是无区别的当且仅当它们互为修正. 对于一般的参数集合, 互为修正两个过程未必是不可区别的.

例 1.1.3 设随机变量 ξ 是服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布. 对任何 $t \geq 0$ 令 $\xi_t(\omega) = 0$ 和 $\eta_t(\omega) = 1_{\{\xi(\omega)=t\}}$, 则 $(\xi_t : t \geq 0)$ 与 $(\eta_t : t \geq 0)$ 互为修正, 但非不可区别. $\square$

例 1.1.4 设 $\{T_i : i = 1, 2, \dots\}$ 为独立同分布的随机变量列, 服从参数为 $\alpha > 0$ 的指数分布. 对任何 $t \geq 0$ 令

$$X_t = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n < t\}} \quad \text{和} \quad Y_t = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n \leq t\}},$$

其中 $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$. 则 $(X_t : t \geq 0)$ 左连右极, 而 $(Y_t : t \geq 0)$ 左极右连. 它们互为修正, 但不是无可区别的. $\square$

随机过程就是随机变量的集合. 为了研究随机过程的分布性质, 我们需要引入有限维分布族的概念. 对于给定的指标集 I 和可测空间 $(E, \mathcal{E})$, 用 $\mathcal{J}$ 表示 I 的有序的有限子集全体, 即

$$\mathcal{J} = \{(t_1, \dots, t_n) : n \geq 1; t_i \in I; i = 1, \dots, n\}.$$

若对于每个 $J \in \mathcal{J}$ 都存在有限维乘积空间 $(E^J, \mathcal{E}^J)$ 上的概率测度 μ_J , 我们称

$$\mathcal{D} = \{\mu_J : J \in \mathcal{J}\}$$

为 $(E, \mathcal{E})$ 上的一个有限维分布族. 设 $X = (X_t : t \in I)$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上, 以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间的随机过程. 对 $J = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{J}$, 不难看出

$$X_J : \omega \mapsto (X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega))$$

是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(E^J, \mathcal{E}^J)$ 的可测映射. 用 μ_J^X 表示空间 $(E^J, \mathcal{E}^J)$ 上由 X_J 诱导的测度. 特别地, 对任何 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$, 有

$$\mu_{(t_1, \dots, t_n)}^X(A_1 \times \dots \times A_n) = \mathbf{P}(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n).$$

则 $\mathcal{D}_X = \{\mu_J^X : J \in \mathcal{J}\}$ 构成一个有限维分布族, 称为随机过程 $(X_t : t \in I)$ 的有限维分布族.

定义 1.1.3 给定 $(E, \mathcal{E})$ 上的有限维分布族 $\mathcal{D}$, 若存在一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 和其上的随机过程 $X = (X_t : t \in I)$ 使 $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}$, 就说 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 和 $(X_t : t \in I)$ 是 $\mathcal{D}$ 的实现. 若两个随机过程 $(X_t : t \in I)$ 和 $(Y_t : t \in I)$ 有相同的有限维分布族, 则称它们为等价的. 两个等价的过程互称为实现.

显然, 若两个过程 $(X_t : t \in I)$ 和 $(Y_t : t \in I)$ 定义在同一概率空间上, 且互为修正, 则它们一定是等价的; 但反之未必成立.

例 1.1.5 设 ξ 是服从 $N(0, 1)$ 分布的随机变量. 对任何 $t \geq 0$ 令 $x(t) = \xi$ 和 $y(t) = -\xi$, 则 $(x(t) : t \geq 0)$ 与 $(y(t) : t \geq 0)$ 等价, 但不互为修正. $\square$

用 E^I 表示从 I 到 E 中的映射 $(w(t) : t \in I)$ 全体组成的集合, E^I 中的元素也称为轨道, 而 E^I 称为轨道空间. 它是 E 的 I 次自乘的乘积空间, 当 I 有限时, 就是通常的乘积空间. 如果 $(X_t : t \in I)$ 为取值于 $(E, \mathcal{E})$ 的随机过程, 在固定 $\omega \in \Omega$ 后, 那么映射 $t \mapsto X_t(\omega)$ 是 E^I 中的点, 称为 X 的样本轨道.

假设 E 是一个拓扑空间. 考虑以 $(E, \mathcal{B}(E))$ 为状态空间的连续时间随机过程 $(X_t : t \geq 0)$. 若当 $s \rightarrow t$ 时, X_s 以概率收敛于 X_t , 则称过程 $(X_t : t \geq 0)$ 在 t 处随机连续. 若

它在所有点 $t \geq 0$ 处随机连续, 则称 $(X_t : t \geq 0)$ 随机连续. 我们说随机过程 X 右连续 (连续, 左极右连等), 如果其所有样本轨道右连续 (连续, 左极右连等). 显然连续的过程是随机连续的.

考虑距离空间 (E, d) . 假设 T 是 $\mathbb{R}_+$ 的一个子集. 再设 $t \mapsto x(t)$ 是从 T 到 E 的一条轨道. 对任意 $\varepsilon > 0$, 我们定义 $t \mapsto x(t)$ 在 T 上的 ε 振荡数如下:

$$m(\varepsilon) := \sup\{n \geq 0 : \text{存在 } t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in T \text{ 使得对} \\ \text{任意 } 1 \leq i \leq n \text{ 有 } d(x(t_{i-1}), x(t_i)) \geq \varepsilon\}. \quad (1.1.2)$$

引理 1.1.1 假设 (E, d) 完备, 而 T 在 $\mathbb{R}_+$ 中稠密. 那么 $t \mapsto x(t)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上存在左右极限当且仅当对任意 $a, \varepsilon > 0$ 该函数在 $T \cap [0, a]$ 上的 ε 振荡数有限.

证明 假设 $t \mapsto x(t)$ 在某点 $t_0 \in \mathbb{R}_+$ 不存在左极限. 由于 (E, d) 完备, 必有 $\varepsilon > 0$ 和单增数列 $\{t_n\} \subset T$ 满足 $t_n \rightarrow t_0$ 且 $d(x(t_{n-1}), x(t_n)) \geq \varepsilon$ 对所有 $n \geq 1$ 成立. 因此 $t \mapsto x(t)$ 在 $T \cap [0, t_0]$ 上有无数次 ε 振荡. 类似地可以证明, 若 $t \mapsto x(t)$ 在某点 $t_0 \in \mathbb{R}_+$ 不存在右极限, 则有 $\varepsilon > 0$ 使得 $t \mapsto x(t)$ 在 $T \cap [0, t_0 + 1]$ 上有无数次 ε 振荡. 反之, 假设有 $a, \varepsilon > 0$ 使得 $t \mapsto x(t)$ 在 $T \cap [0, a]$ 上有无数次 ε 振荡. 将区间 $[0, a]$ 在中点 $a/2$ 两等分为 $[0, a/2]$ 或 $[a/2, a]$. 显然, 此两区间中至少有一个, 取之并记为 I_1 , 使得 $t \mapsto x(t)$ 在 $T \cap I_1$ 上的 ε 振荡数为无穷. 再将区间 I_1 两等分为 J_{11} 和 J_{12} , 取其一记为 I_2 使得 $t \mapsto x(t)$ 在 $T \cap I_2$ 上的 ε 振荡数为无穷. 如此继续下去得区间套 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, 对每个 $n \geq 1$ 函数 $t \mapsto x(t)$ 在 $T \cap I_n$ 上有无数次 ε 振荡. 由区间套原理, 存在惟一的点 $t_0 \in [0, a]$ 满足 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{t_0\}$. 这样, 对每个 $n \geq 1$ 函数 $t \mapsto x(t)$ 在 $T \cap I_n \cap [0, t_0]$ 或 $T \cap I_n \cap [t_0, a]$ 上有无穷多次 ε 振荡. 所以, 必有无穷多个 $n \geq 1$ 使函数 $t \mapsto x(t)$ 在 $T \cap I_n \cap [0, t_0]$ 上有无穷多次 ε 振荡; 或无穷多个 $n \geq 1$ 使该函数在 $T \cap I_n \cap [t_0, a]$ 上有无穷多次 ε 振荡. 又因区间列 $\{I_n\}$ 递减, 故必对所有 $n \geq 1$ 函数 $t \mapsto x(t)$ 在 $T \cap I_n \cap [0, t_0]$ 上有无穷多次 ε 振荡; 或对所有 $n \geq 1$ 该函数在 $T \cap I_n \cap [t_0, a]$ 上有无穷多次 ε 振荡. 相应地, 函数在 t_0 不存在左极限或不存在右极限. $\square$

定理 1.1.2 假设 (E, d) 是完备可分距离空间, 而 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是 $(E, \mathcal{B}(E))$ 上的随机过程. 如果 $(X_t)_{t \geq 0}$ 有左极右连的实现, 那么它必然有左极右连的修正.

证明 设 $(\xi_t)_{t \geq 0}$ 是 $(X_t)_{t \geq 0}$ 的一个左极右连的实现. 取 $\mathbb{R}_+$ 的一个可数稠子集 $T = \{r_1, r_2, \dots\}$ 并令 $T_n = \{r_1, \dots, r_n\}$. 对于 $\varepsilon > 0$ 和 $a > 0$, 分别用 $m^a(\varepsilon)$ 和 $m_n^a(\varepsilon)$ 表示 $t \mapsto X_t$ 在 $T \cap [0, a]$ 和 $T_n \cap [0, a]$ 上的 ε 振荡数. 分别用 $\mu^a(\varepsilon)$ 和 $\mu_n^a(\varepsilon)$ 表示 $t \mapsto \xi_t$ 相应的 ε 振荡数. 由 (1.1.2) 不难看出

$$\{\mu_n^a(\varepsilon) \geq k\} = \{\omega \in \Omega : \text{存在 } t_0 < t_1 < \cdots < t_k \in T_n \cap [0, a] \text{ 使得} \\ \text{对任意 } 1 \leq i \leq k \text{ 有 } d(\xi_{t_{i-1}}(\omega), \xi_{t_i}(\omega)) \geq \varepsilon\}.$$

由于 (E, d) 可分, 我们有 $\mathcal{B}(E \times E) = \mathcal{B}(E) \times \mathcal{B}(E)$. 据此及上式可证 $\mu_n^a(\varepsilon)$ 是随机变量, 同理 $m_n^a(\varepsilon)$ 也是随机变量. 因为 $(X_t)_{t \geq 0}$ 和 $(\xi_t)_{t \geq 0}$ 等价, 所以 $m_n^a(\varepsilon)$ 和 $\mu_n^a(\varepsilon)$ 同分布. 故增极限 $m^a(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n^a(\varepsilon)$ 和 $\mu^a(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^a(\varepsilon)$ 也同分布. 又因 $(\xi_t)_{t \geq 0}$ 左极右连, 根据引理 1.1.1 有

$$\mathbf{P}\{m^a(\varepsilon) < \infty\} = \mathbf{P}\{\mu^a(\varepsilon) < \infty\} = 1.$$

令 $\Omega_1 = \cap_{i=1}^{\infty} \{m^i(1/i) < \infty\}$, 于是 $\mathbf{P}(\Omega_1) = 1$. 再应用引理 1.1.1 知, 对于 $\omega \in \Omega_1$ 和 $t \geq 0$ 极限 $Y_t(\omega) := \lim_{T \ni s \rightarrow t+} X_s(\omega)$ 存在, 而对于 $\omega \in \Omega_1$ 和 $t > 0$ 极限 $Z_t(\omega) := \lim_{T \ni s \rightarrow t-} X_s(\omega)$ 存在. 取定 $x_0 \in E$, 并对所有 $t \geq 0$ 和 $\omega \in \Omega \setminus \Omega_1$ 令 $Y_t(\omega) = x_0$. 于是 $(Y_t)_{t \geq 0}$ 是一个左极右连的过程. 易知 $(X_t)_{t \geq 0}$ 依概率右连续, 所以对每个 $t \geq 0$ 有 $Y_t = X_t$ a.s. 成立. 因此 $(Y_t)_{t \geq 0}$ 是 $(X_t)_{t \geq 0}$ 的左极右连修正. $\square$

威斯康辛大学的 T.G. Kurtz 教授曾向作者建议过上述定理的证明的一个早期版本. 该定理及其证明已收录于作者的英文专著 [15, p.306]. 它给出了随机过程的实现和修正的轨道性质之间的一个基本联系, 但我们没能在更早的文献中找到该结果.

§1.2 相容性定理

假定 I 为指标集, 特别地可取 $I = \mathbb{Z}_+$ 或 $\mathbb{R}_+$. 回忆 E^I 表示从 I 到 E 中的映射 $(w(t) : t \in I)$ 全体组成的轨道空间. 对于 $t \in I$, 称 $Z_t : w \mapsto w(t)$ 为 E^I 到 E 上的投影或者坐标算子. 令 $\mathcal{E}^I$ 是 E^I 上使所有投影 $\{Z_t : t \in I\}$ 可测的最小 σ 代数, 即

$$\mathcal{E}^I = \sigma(\{Z_t : t \in I\}) = \sigma(\{Z_t^{-1}(B) : t \in I, B \in \mathcal{E}\}), \quad (1.2.1)$$

称之为 E^I 上的乘积 σ 代数.

对于任何 $S \subset I$ 和 $w \in E^I$, 令 $\pi_S(w) = \{w(t) : t \in S\}$. 即 π_S 是 E^I 到 E^S 的投影. 特别地, 若 $J = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{J}$, 可写

$$\pi_J(w) = \pi_{t_1, \dots, t_n}(w) = (w(t_1), \dots, w(t_n)).$$

对任何 $H \in \mathcal{E}^J$, 记

$$\pi_J^{-1}(H) = \{w \in E^I : (w(t_1), \dots, w(t_n)) \in H\}.$$

乘积空间 E^I 的形式如上的子集称为是 E^I 的一个柱集. 记 E^I 的所有柱集为

$$\mathcal{C} := \{\pi_J^{-1}(H) : J \in \mathcal{J}, H \in \mathcal{E}^J\}. \quad (1.2.2)$$

命题 1.2.1 全体柱集构成的集合 $\mathcal{C}$ 是一个代数且 $\mathcal{E}^I = \sigma(\mathcal{C})$.

证明 首先, 由 $\mathcal{C}$ 的定义直接推出 $\{\emptyset, E^I\} \subset \mathcal{C}$, 且 $\mathcal{C}$ 对补集运算封闭. 另外, 设有柱集 $\pi_J^{-1}(F) \in \mathcal{C}$ 和 $\pi_K^{-1}(G) \in \mathcal{C}$, 其中

$$J = (s_1, \dots, s_m) \in \mathcal{J}, K = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{J}, F \in \mathcal{E}^J, G \in \mathcal{E}^K.$$

可将 $J \cup K$ 的元素按照由小到大次序排列得 $J \cup K = (u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{J}$. 不难找到 $\bar{F} \in \mathcal{E}^{J \cup K}$ 和 $\bar{G} \in \mathcal{E}^{J \cup K}$ 使 $\pi_J^{-1}(F) = \pi_{J \cup K}^{-1}(\bar{F})$ 而 $\pi_K^{-1}(G) = \pi_{J \cup K}^{-1}(\bar{G})$. 显然 $\bar{F} \cup \bar{G} \in \mathcal{E}^{J \cup K}$. 这样 $\pi_J^{-1}(F) \cup \pi_K^{-1}(G) = \pi_{J \cup K}^{-1}(\bar{F} \cup \bar{G}) \in \mathcal{C}$. 即 $\mathcal{C}$ 对有限并封闭. 所以 $\mathcal{C}$ 是一个代数. 其次, 由 $\mathcal{C}$ 的定义, 显然 $\{Z_t^{-1}(B) : t \in I, B \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{C}$, 故 $\mathcal{E}^I = \sigma(\{Z_t^{-1}(B) : t \in I, B \in \mathcal{E}\}) = \sigma(\mathcal{C})$. 再其次, 对于 $J \in \mathcal{J}$ 和 $H \in \mathcal{E}^J$, 显然 $\pi_J^{-1}(H) \in \sigma(\{Z_t : t \in I\}) = \mathcal{E}^I$. 这说明 $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}^I$, 故 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{E}^I$. $\square$

命题 1.2.2 对任何 $S \subset I$, 做为 E^I 上的 σ 代数有 $\sigma(\{Z_t : t \in S\}) = \pi_S^{-1}(\mathcal{E}^S)$.

证明 注意 $\sigma(\{Z_t : t \in S\}) = \sigma(\{\pi_J^{-1}(H) : H \in \mathcal{E}^J, J \subset S \text{ 为有限集}\})$, 其中 $\pi_J^{-1}(H) \in \pi_S^{-1}(\mathcal{E}^S)$. 所以 $\sigma(\{Z_t : t \in S\}) \subset \pi_S^{-1}(\mathcal{E}^S)$. 另一方面, 记 E^S 上的柱集类为 $\mathcal{C}_S$. 任何 $A \in \mathcal{C}_S$ 可表示为 $\pi_{S,J}^{-1}(H)$, 其中 $H \in \mathcal{E}^J, J \subset S$ 为有限集, 而 $\pi_{S,J}$ 表示由 E^S 到 E^J 的投影. 因此 $\pi_S^{-1}(A) = \pi_S^{-1}(\pi_{S,J}^{-1}(H)) = \pi_J^{-1}(H) \in \sigma(\{Z_t : t \in S\})$. 这说明 $\pi_S^{-1}(\mathcal{C}_S) \subset \sigma(\{Z_t : t \in S\})$, 进而 $\pi_S^{-1}(\mathcal{E}^S) = \pi_S^{-1}(\sigma(\mathcal{C}_S)) = \sigma(\pi_S^{-1}(\mathcal{C}_S)) \subset \sigma(\{Z_t : t \in S\})$. $\square$

定义 1.2.1 可测空间 $(E^I, \mathcal{E}^I)$ 称为典则空间. 若 Q 是此空间上概率测度, 则坐标算子全体 $\{Z_t : t \in I\}$ 构成定义在概率空间 $(E^I, \mathcal{E}^I, Q)$ 上的随机过程, 称为典则过程. 若该典则过程是 $(E, \mathcal{E})$ 上的某个有限维分布族 $\mathcal{D}$ 或某个随机过程 $(X_t : t \in I)$ 的实现, 我们称 $(E^I, \mathcal{E}^I, Q)$ 或 Q 是 $\mathcal{D}$ 或 $(X_t : t \in I)$ 的典则实现.

命题 1.2.3 如果 $(X_t : t \in I)$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间的随机过程, 那么由 Ω 到 E^I 的映射 $X : \omega \mapsto (X_t(\omega) : t \in I)$ 关于 σ 代数 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{E}^I$ 可测.

证明 对于任何 $J = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{J}$ 和 $H \in \mathcal{E}^J$, 不难看出

$$X^{-1}(\pi_J^{-1}(H)) = \{\omega \in \Omega : (X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega)) \in H\} \in \mathcal{F},$$

即 $X^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$. 所以 $X^{-1}(\mathcal{E}^I) = X^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{C})) \subset \mathcal{F}$. $\square$

在命题 1.2.3 的意义下, 可将随机过程 $(X_t : t \in I)$ 视为取值于乘积空间 $(E^I, \mathcal{E}^I)$ 的随机变量. 令 Q_X 是该随机变量在 $(E^I, \mathcal{E}^I)$ 上的概率分布, 则显然 Q_X 是 $(X_t : t \in I)$ 的典则实现. 另外, 利用命题 1.2.1 和测度扩张定理可证明, 取值于 $(E, \mathcal{E})$ 的两个随机过程 $(X_t : t \in I)$ 和 $(Y_t : t \in I)$ 等价当且仅当 $Q_X = Q_Y$.

现在, 我们来研究随机过程的存在性问题. 称 $(E, \mathcal{E})$ 上的有限维分布族 $\mathcal{D} = \{\mu_J : J \in \mathcal{J}\}$ 是相容的, 如果它满足:

- (i) 横向相容: 对于任何 $J = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{J}$ 及 $(1, \dots, n)$ 的任何置换 $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$, 若记 $\sigma(J) = (t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})$, 则

$$\mu_{\sigma(J)} = \mu_J \circ \Sigma^{-1},$$

其中 Σ 表示映射 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.

- (ii) 纵向相容: 对于任何 $J = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{J}$ 及 $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{E}$, 若有某个 $1 \leq k \leq n$ 使 $B_k = E$, 则

$$\begin{aligned} \mu_J(B_1 \times \dots \times B_k \times \dots \times B_n) \\ = \mu_{J_k}(B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times B_{k+1} \times \dots \times B_n), \end{aligned}$$

其中 $J_k = (t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n)$.

定理 1.2.4 随机过程 X 的有限维分布族是相容的.

上面定理是显然的. 所以, 相容性是一个有限维分布族可以实现的必要条件. 本节我们将证明, 比较好的空间 $(E, \mathcal{E})$ 上的相容的有限维分布族总存在实现. 给定 $(E, \mathcal{E})$ 上的一个相容的有限维分布族 $\mathcal{D} = \{\mu_J : J \in \mathcal{J}\}$, 我们可以在柱集类 $\mathcal{C}$ 上构造一个集函数 Q 如下:

$$Q(\pi_J^{-1}(H)) := \mu_J(H), \quad J \in \mathcal{J}, H \in \mathcal{E}^J. \quad (1.2.3)$$

一个柱集可以有不同的表示, 但由分布族的相容性, 上述定义不会产生歧异. 例如, 对于 $A_1, A_2 \in \mathcal{E}$ 柱集 $\pi_{(t_1, t_2)}^{-1}(A_1 \times A_2)$ 也可表示为 $\pi_{(t_2, t_1)}^{-1}(A_2 \times A_1)$, 但由 $\mathcal{D}$ 的横向相容性有 $\mu_{(t_1, t_2)}(A_1 \times A_2) = \mu_{(t_2, t_1)}(A_2 \times A_1)$. 又如, $\pi_{(t_1, t_2)}^{-1}(A_1 \times E) = \pi_{(t_1)}^{-1}(A_1)$ 而 $\mathcal{D}$ 的纵向相容性推出 $\mu_{(t_1, t_2)}(A_1 \times E) = \mu_{(t_1)}(A_1)$.

命题 1.2.5 设 E 是完备可分度量空间, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ 是对应的博雷尔 σ 代数. 若 $(E, \mathcal{E})$ 上的有限维分布族 $\mathcal{D} = \{\mu_J : J \in \mathcal{J}\}$ 满足相容性, 则由 (1.2.3) 定义的非负集合函数 Q 是 $\mathcal{C}$ 上的概率测度.

证明 容易验证 $Q(\emptyset) = 0$, 而且 Q 在 $\mathcal{C}$ 上有有限可加性: 若 $A, B \in \mathcal{C}$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则 $Q(A \cup B) = Q(A) + Q(B)$. 所以只需证明 Q 在 $\mathcal{C}$ 上是上连续的. 取单调下降且交为空集的柱集列 $\{A_n\} \subset \mathcal{C}$, 往证 $Q(A_n) \downarrow 0$. 假若不然, 则存在 $\epsilon > 0$ 使 $Q(A_n) > \epsilon$ 对所有 $n \geq 1$ 成立. 对于柱集列 $\{A_n\}$ 做简单调整后, 我们总可以选取参数列 $\{t_n\} \subset I$, 趋于无穷的单增整数列 $\{k_n\}$ 及 $H_n \in \mathcal{E}^{k_n}$, 使得 $A_n = \pi_{(t_1, \dots, t_{k_n})}^{-1}(H_n)$. 那么 $\mu_{(t_1, \dots, t_{k_n})}(H_n) = Q(A_n) > \epsilon$. 因 E 从而 E^{k_n} 是完备可分度量空间, 其上的任何有限测度都是正则的, 故有紧集 $K_n \subset H_n$ 使

$$\mu_{(t_1, \dots, t_{k_n})}(H_n \setminus K_n) < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

令 $B_n = \pi_{(t_1, \dots, t_{k_n})}^{-1}(K_n)$, 则

$$Q(A_n \setminus B_n) = \mu_{(t_1, \dots, t_{k_n})}(H_n \setminus K_n) < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

记 $C_n = \bigcap_{i \leq n} B_i$, 那么

$$\begin{aligned} Q(A_n \setminus C_n) &= Q\left(A_n \cap \left(\bigcup_{i \leq n} B_i^c\right)\right) = Q\left(\bigcup_{i \leq n} (A_n \setminus B_i)\right) \\ &\leq Q\left(\bigcup_{i \leq n} (A_i \setminus B_i)\right) \leq \sum_{i \leq n} Q(A_i \setminus B_i) < \epsilon. \end{aligned}$$

所以 $Q(C_n) > Q(A_n) - \epsilon > 0$, 故 $C_n \neq \emptyset$. 从而可取 $w_n \in C_n$. 因 $\{C_n\}$ 是单调下降的, 对 $m \leq n$ 有 $w_n \in C_m \subset B_m = \pi_{(t_1, \dots, t_{k_m})}^{-1}(K_m)$, 即

$$(w_n(t_1), \dots, w_n(t_{k_m})) \in K_m,$$

由于 K_m 紧, 对任意固定的 i , 点列 $\{w_n(t_i) : n \geq 1\}$ 有收敛子列. 用对角线法可以证明, 存在一个自然数子列 $\{n_k\}$ 使对任意的 i 极限 $x_i := \lim_k w_{n_k}(t_i)$ 存在. 取 $w \in E^I$ 使 $w(t_i) = x_i$, 则 $(w(t_1), \dots, w(t_{k_m})) \in K_m$. 因此对任何 $m \geq 1$ 有 $w \in B_m \subset A_m$, 故 $\bigcap_{m \geq 1} A_m$ 非空. 这导致矛盾. $\square$

定理 1.2.6 (科尔莫戈罗夫) 假设存在完备可分度量空间 F 使 $(E, \mathcal{E})$ 与 $(F, \mathcal{B}(F))$ 可测同构. 若 $(E, \mathcal{E})$ 上的有限维分布族 $\mathcal{D} = \{\mu_J : J \in \mathcal{J}\}$ 满足相容性, 则由 (1.2.3) 定义的 $\mathcal{C}$ 上的非负集合函数 Q 可惟一地扩张为 $\mathcal{E}^I$ 上的概率测度. 特别地, $(E, \mathcal{E})$ 上的任何相容的有限维分布族都有一个实现.

证明 在定理条件下, 易见命题 1.2.5 的结论对于可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 仍然成立. 再利用测度扩张定理知 Q 可惟一地扩张为 $\mathcal{E}^I$ 上的概率测度. 显然典则空间 $(E^I, \mathcal{E}^I, Q)$ 和典则过程 $\{Z_t : t \in I\}$ 就是 $\mathcal{D}$ 的一个实现. $\square$

上面的定理通常称为科尔莫戈罗夫相容性定理. 作为它的应用, 我们来证明无穷维乘积概率空间的存在性. 设 $\{\mu : t \in I\}$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的概率测度族, 对 $J = (t_1, \dots, t_n) \in I$ 和 $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{E}$ 令

$$\mu_J(B_1 \times \dots \times B_n) = \prod_{i=1}^n \mu_{t_i}(B_i).$$

利用测度扩张定理, 可将 μ_J 扩张为 $\mathcal{E}^J$ 上的测度. 容易验证 $\{\mu_J : J \in \mathcal{J}\}$ 是一个相容的有限维分布族. 故我们有下面的推论.

推论 1.2.7 设 $\{\mu_t : t \in I\}$ 是完备可分度量空间 E 上的概率分布族, 则存在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 及其上的随机过程 $(X_t : t \in I)$ 使得:

(1) $\{X_t : t \in I\}$ 是独立的随机变量族;

(2) 对任何 $t \in I$, X_t 的分布是 μ_t .

特别地, 若 μ 是 E 上的概率, 则存在分布同为 μ 的独立随机变量序列.

现在进一步讨论乘积 σ 代数 $\mathcal{E}^I$ 的性质. 我们说 $A \subset E^I$ 由 $S \subset I$ 决定, 是指下面的性质成立: 若 $x, y \in E^I$ 在 S 上重合, 则 $x \in A$ 当且仅当 $y \in A$. 如果 $A \subset E^I$ 由某个可数集 $S \subset I$ 决定, 我们称它是可数决定的.

形象地说, 如果 $A \subset E^I$ 由 $S \subset I$ 决定, 那么对于任意 $w \in A$ 和 $t \in I \setminus S$, 改变轨道 w 在点 t 的值不会将 w 从 A 移出. 由此推出, 若对任何 $t \in I$ 都有某个轨道 $w \in A$ 使得适当改变其在 t 处的值后新轨道不再属于 A , 则 A 不由 I 的任何真子集 S 决定.

定理 1.2.8 由 E^I 的可数决定子集全体构成的集类 $\mathcal{A}$ 是 σ 代数.

证明 仅需要验证 $\mathcal{A}$ 关于补运算及可数并运算封闭. 设 $A \in \mathcal{A}$ 由可数集 $S \subset I$ 决定. 则 A^c 也由 S 决定, 因为如果 $x, y \in E^I$ 在 S 上重合, 显然 $y \in A^c$ 当且仅当 $x \in A^c$. 再设 $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$. 则每个 $A_n \in \mathcal{A}$ 可分别由某个可数集 S_n 决定. 显然 $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ 由可数集 $\bigcup_{n \geq 1} S_n$ 决定, 即 $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$. $\square$

由命题 1.2.2 易知 $\sigma(\{Z_t : t \in S\})$ 由 S 决定. 另外, 容易看出柱集是可数决定的, 即 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, 因此 $\mathcal{E}^I \subset \mathcal{A}$, 即 $\mathcal{E}^I$ 中的每个集合都是可数决定的. 下面的定理给出了 $\mathcal{E}^I$ 的一个更为具体的表达.

定理 1.2.9 我们有 $\mathcal{E}^I = \bigcup_S \sigma(\{Z_t : t \in S\})$, 其中 S 取遍 I 的所有可数子集.

证明 令 $\mathcal{F}$ 表示定理中等式右边的集合类. 因为对每个可数集 $S \subset I$ 有 $\sigma(\{Z_t : t \in S\}) \subset \mathcal{E}^I$, 故 $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}^I$. 另一方面, 显然有 $\mathcal{F} \supset \mathcal{C}$, 且不难证明 $\mathcal{F}$ 是 σ 代数, 故有 $\mathcal{F} \supset \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}^I$. $\square$

上述定理说明 $\mathcal{E}^I$ 中的集合结构很简单. 事实上, 许多重要的轨道集合都不是 $\mathcal{E}^I$ 可测集. 这点可以从下面的例子看出.

例 1.2.1 设 E 是距离空间. 令 $C([0, \infty), E)$ 是 $[0, \infty)$ 到 E 的全体连续轨道的集合, 而 $D([0, \infty), E)$ 是 $[0, \infty)$ 到 E 的全体左极右连轨道的集合. 只要 E 含有不少于两个点, 这两个集合就不是可数决定的, 因而它们均不属于 $\mathcal{E}^{[0, \infty)}$. 事实上, 假设决定 $C([0, \infty), E)$ 或 $D([0, \infty), E)$ 的一个可数集 $S \subset [0, \infty)$ 存在. 任取 $\{a, b\} \subset E, a \neq b$. 令

$$x(t) = a, t \geq 0; \quad y(t) = \begin{cases} a, & t \in S; \\ b, & t \notin S, \end{cases}$$

则 x 与 y 在 S 上重合, 但 $x \in C([0, \infty), E) \subset D([0, \infty), E)$, 而 $y \in D([0, \infty), E)^c \subset C([0, \infty), E)^c$, 矛盾. 类似地可以证明 $C([0, \infty), E)$ 和 $D([0, \infty), E)$ 均不包含任何非空 $\mathcal{E}^{[0, \infty)}$ 可测集. $\square$

因此仅讨论 $\mathcal{E}^I$ 中的集合显然是不够的. 我们下面将引入本质轨道空间的概念. 设 $X = (X_t : t \in I)$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间的随机过程. 如命题 1.2.3 中所述, 可将 X 视为由 Ω 到 E^I 的映射. E^I 的一个子集 W 称为是 X 的一个轨道空间, 如果 $W \supset X(\Omega)$. 注意, 这里不要求 W 是可测的, 即它不一定要属于 $\mathcal{E}^I$.

定义 1.2.2 设 $\mathcal{D}$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上相容的有限维分布族, E^I 的一个子集 W 称为关于 $\mathcal{D}$ 是本质的, 如果存在 $\mathcal{D}$ 的一个随机过程实现 $(X_t : t \in I)$, 使得 W 是 $(X_t : t \in I)$ 的一个轨道空间.

定理 1.2.10 设 Q 是相容的有限维分布族 $\mathcal{D}$ 在 $(E^I, \mathcal{E}^I)$ 上的典则实现, 则 $W \subset E^I$ 关于 $\mathcal{D}$ 是本质的当且仅当 $Q^*(W) = 1$, 其中 Q^* 是 Q 的外测度.

证明 首先设 $W \subset E^I$ 关于 $\mathcal{D}$ 是本质的. 则存在 $\mathcal{D}$ 的实现 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 和 X 以 W 为轨道空间. 显然, Q 就是 X 在 $(E^I, \mathcal{E}^I)$ 上的概率分布. 因此, 若 $A \in \mathcal{E}^I$ 且 $A \supset W$, 则有 $X^{-1}(A) \supset X^{-1}(W) = \Omega$, 这蕴含 $X^{-1}(A) = \Omega$, 故 $Q(A) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$. 所以 $Q^*(W) = 1$. 反之, 若 $Q^*(W) = 1$, 我们令

$$\mathcal{F}_W = W \cap \mathcal{E}^I = \{W \cap A : A \in \mathcal{E}^I\}.$$

则 $(W, \mathcal{F}_W)$ 是可测空间. 定义 $\mathcal{F}_W$ 上的集函数:

$$\mathbf{P}_W(W \cap A) = Q(A), \quad A \in \mathcal{E}^I.$$

为使定义无歧义, 我们要验证对 $A, B \in \mathcal{E}^I$, 若 $W \cap A = W \cap B$, 则 $Q(A) = Q(B)$. 事实上, 这时 $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset W^c$, 因此 $Q(A \Delta B) = 0$, 即有 $Q(A) = Q(B)$. 现假设 $\{W \cap A_n\} \subset \mathcal{F}_W$ 是两两不交的, 其中 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$. 不难看出, 当 $m \neq n$ 时有 $A_m \cap A_n \subset W^c$, 故 $Q(A_m \cap A_n) = 0$. 由此易得 $\mathbf{P}_W$ 的 σ 可加性. 容易看出 $(Z_t : t \in I)$ 做为 $(W, \mathcal{F}_W, \mathbf{P}_W)$ 上的随机过程有轨道空间 W 和有限维分布族 $\mathcal{D}$. 因此 W 关于 $\mathcal{D}$ 是本质的. $\square$

例 1.2.2 设 E 是距离空间. 如果相容的有限维分布族 $\mathcal{D}$ 有连续实现, 则连续轨道集合 $C([0, \infty), E)$ 关于 $\mathcal{D}$ 就是本质的. 类似地, 如果 $\mathcal{D}$ 有左极右连实现, 则左极右连轨道集合 $D([0, \infty), E)$ 关于 $\mathcal{D}$ 就是本质的. 然而, 由例 1.2.1, 通常 $C([0, \infty), E)$ 和 $D([0, \infty), E)$ 都不属于 $\mathcal{E}^{[0, \infty)}$, 甚至不属于 $\mathcal{E}^{[0, \infty)}$ 的完备化. $\square$

§1.3 流和停时

假设 $I = \mathbb{Z}_+$ 或 $\mathbb{R}_+$. 考虑一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. 如果 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数族 $(\mathcal{F}_t : t \in I)$ 满足对任何 $s < t \in I$ 都有 $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, 那么称它是 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上的 σ 代数流或简称流. 在这种情况下, 我们称 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P} : t \in I)$ 为带流的概率空间. 若 $I = \mathbb{R}_+$ 且 $(\mathcal{F}_t : t \in I)$ 是一个流, 对任何 $t \in I$ 定义 $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$. 显然 $(\mathcal{F}_{t+} : t \in I)$ 也是一个流. 如果对任何 $t \in I$ 都有 $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$, 那么称流 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续. 显然 $(\mathcal{F}_{t+})$ 是右连续流.

称取值于 $(E, \mathcal{E})$ 的随机过程 $X = (X_t : t \in I)$ 关于流 $(\mathcal{F}_t : t \in I)$ 适应, 如果对任何 $t \in I$, 每个随机变量 X_t 都是 $\mathcal{F}_t$ 可测的. 有时为了强调也说 X 关于流 $(\mathcal{F}_t)$ 是 $\mathcal{E}$ 适应的. 显然, 一个适应于 $(\mathcal{F}_t)$ 的过程也适应于 $(\mathcal{F}_{t+})$. 定义

$$\mathcal{F}^0 = \sigma(\{X_s : s \in I\}), \quad \mathcal{F}_t^0 = \sigma(\{X_s : s \in I, s \leq t\}). \quad (1.3.1)$$

显然 $(\mathcal{F}_t^0 : t \in I)$ 构成一个流, 称为 X 的自然流, 称 $(\mathcal{F}^0, \mathcal{F}_t^0 : t \in I)$ 为 X 的自然 σ 代数. 显然 X 关于其自然流 $(\mathcal{F}_t^0 : t \in I)$ 适应, 且它在 X 所适应的流中是最小的.

以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间的过程 $X = (X_t : t \in I)$ 称为可测的, 如果 $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ 是从 $(I \times \Omega, \mathcal{B}(I) \times \mathcal{F})$ 到 $(E, \mathcal{E})$ 的可测映射. 称 X 关于某个流 $(\mathcal{F}_t : t \in I)$ 循序可测, 如果对任何 $t \in I$, 映射 $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ 限制在 $([0, t] \cap I) \times \Omega$ 上关于 σ 代数 $\mathcal{B}([0, t] \cap I) \times \mathcal{F}_t$ 和 $\mathcal{E}$ 是可测的. 为了强调, 有时也称 $\mathcal{E}$ 循序可测. 称集合 $A \subset I \times \Omega$ 循序可测, 如果过程 $(t, \omega) \mapsto 1_A(t, \omega)$ 是循序可测的.

显然集合 $A \subset I \times \Omega$ 循序可测等价于对任何 $t \in I$ 有 $\{([0, t] \cap I) \times \Omega\} \cap A \in \mathcal{B}([0, t] \cap I) \times \mathcal{F}_t$. 不难看出, 关于 $(\mathcal{F}_t : t \in I)$ 循序可测的过程关于该流是适应的. 另外, 若过程 X 循序可测, 则它是可测的. 事实上, 对任何 $B \in \mathcal{E}$ 有

$$\{(s, \omega) \in I \times \Omega : X_s(\omega) \in B\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(s, \omega) \in ([0, n] \cap I) \times \Omega : X_s(\omega) \in B\}.$$

由循序可测性,

$$\{(s, \omega) \in ([0, n] \cap I) \times \Omega : X_s(\omega) \in B\} \in \mathcal{B}([0, n] \cap I) \times \mathcal{F}_n \subset \mathcal{B}(I) \times \mathcal{F}.$$

所以 $\{(s, \omega) \in I \times \Omega : X_s(\omega) \in B\} \in \mathcal{B}(I) \times \mathcal{F}$. 再者, 当 $I = \mathbb{Z}_+$ 时, 任何关于 $(\mathcal{F}_t : t \in I)$ 适应的过程关于该流循序可测, 从而可测.

定理 1.3.1 假设 E 为拓扑空间, 而 $\mathcal{B}(E)$ 为其博雷尔 σ 代数. 若取值于 $(E, \mathcal{B}(E))$ 的随机过程 $(X_t : t \geq 0)$ 关于流 $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ 适应且右连续(或左连续), 则它关于该流循序可测.

证明 我们只考虑 $(X_t : t \geq 0)$ 为右连续适应过程的情况, 左连续的情况类似. 对于 $n \geq 1$, 定义 $X_n(0) = X_0$ 和

$$X_n(s) = X_{kt/2^n}, \quad (k-1)t/2^n < s \leq kt/2^n, k = 1, 2, 3, \dots, 2^n,$$

则 $(s, \omega) \mapsto X_n(s, \omega)$ 是 $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t)$ 到 $(E, \mathcal{E})$ 的可测映射. 因 X 是右连续的, 故 $X_s(\omega) = \lim_n X_n(s, \omega)$. 因此 $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ 是从 $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t)$ 到 $(E, \mathcal{E})$ 的可测映射. $\square$

现在我们定义一类重要的随机时间, 并研究这类时间的若干基本性质. 考虑带流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P} : t \in I)$, 并令 $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t \in I} \mathcal{F}_t)$.

定义 1.3.1 称随机变量 $T : \Omega \rightarrow I \cup \{\infty\}$ 为 $(\mathcal{F}_t)$ 停时或可选时, 如果对任何 $t \in I$ 都有 $\{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. 对于给定的 $(\mathcal{F}_t)$ 停时 T , 我们把 $\mathcal{F}_\infty$ 中对所有 $t \in I$ 满足 $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ 的集合 A 的全体记为 $\mathcal{F}_T$. 容易验证 $\mathcal{F}_T$ 是一个 σ 代数. 当 $I = \mathbb{R}_+$ 时, 对于 $(\mathcal{F}_{t+})$ 停时 T , 类似地定义 $\mathcal{F}_{T+}$.

注意停时 T 是相对于某个流而言的. 当流 $(\mathcal{F}_t)$ 明确时, 我们就简单地称 T 为停时. 显然, 常数值随机变量 $T \equiv t$ 是停时, 且此时有 $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$. 特别地, 若 $I = \mathbb{Z}_+$, 则 T 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时当且仅当对任何 $t \in I$ 都有 $\{T = t\} \in \mathcal{F}_t$, 而 $A \in \mathcal{F}_T$ 当且仅当对任何 $t \in I$ 都有 $A \cap \{T = t\} \in \mathcal{F}_t$. 停时是在应用中经常使用的随机时间. 这种随机时间保留了固定时间的有很多性质. 停时的原型是如下定义的进入时与击中时.

定义 1.3.2 设 $X = (X_t : t \in I)$ 是取值于 $(E, \mathcal{E})$ 的随机过程. 对 $A \subset E$, 定义 $D_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$ 和 $T_A = \inf\{t > 0 : X_t \in A\}$. 它们分别称为过程 X 对于集合 A 的进入时与击中时. 称 $L_A(\omega) := \sup\{t > 0 : X_t(\omega) \in A\}$ 为过程 X 对于集合 A 的末离时.

例 1.3.1 考虑离散时间集 $I = \mathbb{Z}_+$. 设 $X = (X_t : t \in I)$ 是关于流 $(\mathcal{F}_t : t \in I)$ 适应, 取值于 $(E, \mathcal{E})$ 的随机过程. 对任何 $A \in \mathcal{E}$, 易证 D_A 和 T_A 都是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时. $\square$

命题 1.3.2 设 $I = \mathbb{R}_+$. 则 T 是 $(\mathcal{F}_{t+})$ 停时当且仅当对任何 $t \in I$ 都有 $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.

证明 若 T 是 $(\mathcal{F}_{t+})$ 停时, 则 $\{T < t\} = \cup_n \{T \leq t - 1/n\} \in \mathcal{F}_t$. 反之, 对任何 $k \geq 1$, 有

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n=k}^{\infty} \{T < t + 1/n\} \in \mathcal{F}_{t+1/k},$$

故 $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}$. 即 T 是 $(\mathcal{F}_{t+})$ 停时. $\square$

命题 1.3.3 设 $I = \mathbb{R}_+$ 而 T 是 $(\mathcal{F}_{t+})$ 停时. 则 $A \in \mathcal{F}_{T+}$ 当且仅当对任何 $t \in I$ 都有 $A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.

证明 若 $A \in \mathcal{F}_{T+}$, 显然有 $A \cap \{T < t\} = \bigcup_n (A \cap \{T \leq t - 1/n\}) \in \mathcal{F}_t$. 反之, 若对任何 $t \in I$ 都有 $A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t$, 则对任何 $k \geq 1$ 有

$$A \cap \{T \leq t\} = \bigcap_{n=k}^{\infty} (A \cap \{T < t + 1/n\}) \in \mathcal{F}_{t+1/k}.$$

故知 $A \in \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{F}_{t+1/k} = \mathcal{F}_{t+}$, 因而 $A \in \mathcal{F}_{T+}$. $\square$

例 1.3.2 考虑连续时间集 $I = \mathbb{R}_+$ 和度量空间 E , 记后者的博雷尔 σ 代数为 $\mathcal{E}$. 设 $X = (X_t : t \geq 0)$ 是关于流 $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ 适应, 取值于 $(E, \mathcal{E})$ 的随机过程. 当 A 是开集且 X 右连续时, 显然有 $D_A \equiv T_A$. 此时, D_A 是 $(\mathcal{F}_{t+})$ 停时. 事实上, 由 X 的右连续性, 对任何 $t > 0$ 有

$$\{D_A < t\} = \bigcup_{s \in [0, t) \cap \mathbb{Q}} \{X_s \in A\} \in \mathcal{F}_t.$$

直观上, 末离时 L_A 是 X 的轨道最后一次在 A 中的时间. 一般地 L_A 不是停时, 因为轨道在 t 时刻后是否再进入 A 不能用 t 时刻前的信息来判断. $\square$

命题 1.3.4 若 T 和 S 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时, 则 $T \vee S$, $T \wedge S$ 和 $T + S$ 也是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时.

证明 由 $\{T \vee S \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\}$ 和 $\{T \wedge S \leq t\} = \{T \leq t\} \cup \{S \leq t\}$ 知 $T \vee S$ 和 $T \wedge S$ 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时. 另外, 注意对任何 $t \in I$ 有 $\{T > t\} \cup \{S > t\} \in \mathcal{F}_t$. 而且

$$\{T + S > t\} = \{T > t\} \cup \{T + S > t, T \leq t\} = \{T > t\} \cup \{t - S < T \leq t\}.$$

这里

$$\{t - S < T \leq t\} = \bigcup_{s \in [0, t) \cap \mathbb{Q}} \{t - S < s < T \leq t\} = \bigcup_{s \in [0, t) \cap \mathbb{Q}} \{S > t - s, T > s, T \leq t\}$$

显然属于 $\mathcal{F}_t$. 所以 $S + T$ 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时. $\square$

命题 1.3.5 (1) 设每个 T_n 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时且序列 $\{T_n\}$ 单调增. 则 $\lim_n T_n$ 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时. (2) 设 $I = \mathbb{R}_+$, 每个 T_n 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时且序列 $\{T_n\}$ 单调降. 则 $\lim_n T_n$ 是 $(\mathcal{F}_{t+})$ 停时.

证明 (1) 因 $\{T_n\}$ 单调上升, 有 $\{\lim_n T_n \leq t\} = \bigcap_n \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. 故 $\lim T_n$ 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时.

(2) 因 $\{T_n\}$ 单调下降, 有 $\{\lim_n T_n < t\} = \bigcup_n \{T_n < t\} \in \mathcal{F}_t$. 由命题 1.3.2 知 $\lim T_n$ 是 $(\mathcal{F}_{t+})$ 停时. $\square$

命题 1.3.6 随机变量 X 关于 $\mathcal{F}_T$ 可测当且仅当对任意的 $t \in I$, $X1_{\{T \leq t\}}$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测.

证明 不妨假定 X 是非负随机变量. 这样 X 关于 $\mathcal{F}_T$ 可测 $\Leftrightarrow$ 对任意的 $a > 0$ 有 $\{X \geq a\} \in \mathcal{F}_T \Leftrightarrow$ 对任意的 $a > 0$ 和 $t \in I$ 有 $\{X \geq a\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, 其中 $\{X \geq a\} \cap \{T \leq t\} = \{X1_{\{T \leq t\}} \geq a\}$. 所以 X 关于 $\mathcal{F}_T$ 可测 $\Leftrightarrow$ 对任意的 $t \in I$, $X1_{\{T \leq t\}}$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测. $\square$

命题 1.3.7 若 T 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时, 则 T 关于 $\mathcal{F}_T$ 可测.

证明 对任意的 $t, s \in I$ 有 $\{T \leq s\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq s \wedge t\} \in \mathcal{F}_{s \wedge t} \subset \mathcal{F}_t$. 因此 $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_T$. $\square$

命题 1.3.8 若 T 和 S 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时且 $S \leq T$, 则 $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

证明 设 $A \in \mathcal{F}_S$. 对 $t \in I$ 有 $A \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, 故 $A \in \mathcal{F}_T$. $\square$

命题 1.3.9 设 $I = \mathbb{R}_+$, 每个 T_n 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时, $(\mathcal{F}_t)$ 右连续且 $T_n \downarrow T$. 则 $\cap_n \mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_T$.

证明 首先由命题 1.3.5 和 $(\mathcal{F}_t)$ 的右连续性知 T 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时. 再根据命题 1.3.8 有 $\cap_n \mathcal{F}_{T_n} \supset \mathcal{F}_T$. 另一方面, 设 $A \in \cap_n \mathcal{F}_{T_n}$. 由命题 1.3.3, 对任意的 $t \in I$ 有

$$A \cap \{T < t\} = \bigcup_n (A \cap \{T_n < t\}) \in \mathcal{F}_t.$$

再由命题 1.3.3 有 $A \in \mathcal{F}_T$. $\square$

称 σ 代数流 $(\mathcal{F}_t)$ 拟左连续, 如果对任何单增 $(\mathcal{F}_t)$ 停时序列 $\{T_n\}$ 有 $\mathcal{F}_T = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_{T_n})$, 其中 $T = \lim_n T_n$. 平行地, 上述命题 1.3.9 的结论可称为拟右连续. 但在随机过程理论中通常都考虑右连续 σ 代数流, 拟右连续自然成立, 因而此概念很少特别定义.

命题 1.3.10 若 T 和 S 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时, 则有: (1) $\mathcal{F}_{T \wedge S} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$; (2) $\{T < S\}, \{T \leq S\} \in \mathcal{F}_{T \wedge S}$.

证明 (1) 由命题 1.3.8, 显然有 $\mathcal{F}_{T \wedge S} \subset \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$. 为证另一包含关系, 取 $A \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$. 则对 $t \in I$ 有

$$A \cap \{T \wedge S \leq t\} = A \cap (\{T \leq t\} \cup \{S \leq t\}) = (A \cap \{T \leq t\}) \cup (A \cap \{S \leq t\}) \in \mathcal{F}_t.$$

因此 $A \in \mathcal{F}_{T \wedge S}$.

(2) 对任何 $t \in I$,

$$\{T < S\} \cap \{S \leq t\} = \bigcup_{s \in [0, t) \cap \mathbb{Q}} (\{T < s\} \cap \{s < S\} \cap \{S \leq t\}) \in \mathcal{F}_t.$$

因此 $\{T < S\} \in \mathcal{F}_S$. 进而不难看出,

$$\begin{aligned} \{T < S\} \cap \{T \leq t\} &= \{T < S, T \leq t, S \leq t\} \cup \{T < S, T \leq t, S > t\} \\ &= \{T < S, S \leq t\} \cup \{T \leq t, S > t\} \in \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

因此 $\{T < S\} \in \mathcal{F}_T$. 再利用 (1) 有 $\{T < S\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S \wedge T}$. 而由对称性推出 $\{T > S\} \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$, 进而得 $\{T \leq S\}, \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$. $\square$

命题 1.3.11 设 T 和 S 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时. 那么对任何 $\mathcal{F}_T$ 可测的可积随机变量 X 有 $\mathbf{P}(X|\mathcal{F}_S) = \mathbf{P}(X|\mathcal{F}_{S \wedge T})$. 从而对任何可积随机变量 Y 有 $\mathbf{P}[\mathbf{P}(Y|\mathcal{F}_T)|\mathcal{F}_S] = \mathbf{P}(Y|\mathcal{F}_{S \wedge T})$.

证明 第1步) 我们先证明, 若 X 关于 $\mathcal{F}_T$ 可测, 则 $1_{\{T < S\}}X$ 与 $1_{\{T \leq S\}}X$ 关于 $\mathcal{F}_{S \wedge T}$ 可测. 事实上对任何 $t \in I$, 显然

$$1_{\{T < S\}}X 1_{\{S \wedge T \leq t\}} = 1_{\{T < S\}}X 1_{\{T \leq t\}}.$$

由命题 1.3.10 知 $\{T < S\} \in \mathcal{F}_{S \wedge T} \subset \mathcal{F}_T$. 再因 X 是 $\mathcal{F}_T$ 可测的, 由命题 1.3.6 上式关于 $\mathcal{F}_t$ 可测, 从而 $1_{\{T < S\}}X$ 是 $\mathcal{F}_{S \wedge T}$ 可测的. 同理可证 $1_{\{T \leq S\}}X$ 也是 $\mathcal{F}_{S \wedge T}$ 可测的.

第2步) 由第 1 步知 $1_{\{T < S\}}X$ 关于 $\mathcal{F}_{S \wedge T}$ 可测, 由命题 1.3.10 知 $1_{\{T \geq S\}}$ 关于 $\mathcal{F}_{S \wedge T}$ 可测. 因此有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X|\mathcal{F}_S) &= \mathbf{P}(1_{\{T < S\}}X|\mathcal{F}_S) + \mathbf{P}(1_{\{T \geq S\}}X|\mathcal{F}_S) \\ &= 1_{\{T < S\}}X + 1_{\{T \geq S\}}\mathbf{P}(X|\mathcal{F}_S). \end{aligned}$$

因为 $\mathbf{P}(X|\mathcal{F}_S)$ 是 $\mathcal{F}_S$ 可测的, 第 1 步的结论还蕴含 $1_{\{T \geq S\}}\mathbf{P}(X|\mathcal{F}_S)$ 是 $\mathcal{F}_{S \wedge T}$ 可测的. 故由上式知 $\mathbf{P}(X|\mathcal{F}_S)$ 关于 $\mathcal{F}_{S \wedge T}$ 可测, 故

$$\mathbf{P}(X|\mathcal{F}_S) = \mathbf{P}[\mathbf{P}(X|\mathcal{F}_S)|\mathcal{F}_{S \wedge T}] = \mathbf{P}(X|\mathcal{F}_{S \wedge T}),$$

即第一个结论成立. 将此应用于 $X = \mathbf{P}(Y|\mathcal{F}_T)$ 即得第二个结论成立. $\square$

利用停时的概念, 我们可以加强对适应性的定义. 设 $X = (X_t : t \in I)$ 是取值于 $(E, \mathcal{E})$ 的随机过程. 给定随机时间 $T : \Omega \rightarrow I \cup \{\infty\}$, 可以自然地定义 $\Omega_T := \{T < \infty\} \subset \Omega$ 到 E 的映射

$$\omega \mapsto X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega). \quad (1.3.2)$$

我们称 X 关于流 $(\mathcal{F}_t)$ 是 $\mathcal{E}$ 强适应的, 如果对任意的 $(\mathcal{F}_t)$ 停时 T , 上述映射相对于 $\Omega_T \cap \mathcal{F}_T$ 和 $\mathcal{E}$ 可测.

命题 1.3.12 若 $(X_t : t \in I)$ 关于流 $(\mathcal{F}_t : t \in I)$ 循序可测, 则它相对于该流是 $\mathcal{E}$ 强适应的.

证明 不妨假定 $I = \mathbb{R}_+$. 设 T 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时. 容易验证 $\omega \mapsto T(\omega) \wedge t$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ 到 $([0, t], \mathcal{B}[0, t])$ 的可测映射, 故 $\omega \mapsto (T(\omega) \wedge t, \omega)$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ 到 $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t)$ 的可测映射. 因为 X 是循序可测的, 对任何 $t \in I$, $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ 是从 $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t)$ 到 $(E, \mathcal{E})$ 的可测映射. 因此复合 $\omega \mapsto (T(\omega) \wedge t, \omega) \mapsto X_{T(\omega) \wedge t}(\omega)$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ 到 $(E, \mathcal{E})$ 的可测映射. 这样对任意的 $B \in \mathcal{E}$ 有 $\{X_T \in B\} \cap \Omega_T \cap \{T \leq t\} = \{X_T \in B\} \cap \{T \leq t\} = \{X_{T \wedge t} \in B\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. 所以 $\{X_T \in B\} \cap \Omega_T \in \mathcal{F}_T$, 故 X 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 是 $\mathcal{E}$ 强适应的. $\square$

§1.4 加强的流

在随机过程的理论中经常会遇到一些小集合, 即某些零测集的子集. 在原有的 σ 代数下, 这些小集合未必可测. 这会给讨论带来很多不便. 为了克服这个问题, 我们需要对有关的 σ 代数和流进行适当的完备化或加强化.

首先我们考虑有限测度空间 $(E, \mathcal{E}, \mu)$. 对于 $A \subset E$, 若存在 $C \in \mathcal{E}$ 满足 $A \subset C$ 且 $\mu(C) = 0$, 则称 A 为 μ 零集. 令 $\mathcal{N}$ 为 μ 零集全体构成的集类. 给定 $\mathcal{E}$ 的子 σ 代数 $\mathcal{G}$, 令

$$\mathcal{G}^\mu = \sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{N}), \quad (1.4.1)$$

即 $\mathcal{G}^\mu$ 为包含 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{N}$ 的最小 σ 代数. 我们称 $\mathcal{G}^\mu$ 为 $\mathcal{G}$ 在 $(E, \mathcal{E}, \mu)$ 之下的加强化. 若 $\mathcal{G} = \mathcal{G}^\mu$, 则称 $\mathcal{G}$ 是加强的. 特别地, 也称 $\mathcal{E}^\mu$ 为 $\mathcal{E}$ 在 μ 之下的完备化. 若 $\mathcal{E} = \mathcal{E}^\mu$, 则称 $\mathcal{E}$ 或 $(E, \mathcal{E}, \mu)$ 是完备的. 称 σ 代数 $\bar{\mathcal{E}} = \cap \{\mathcal{E}^\mu : \mu \text{ 是 } (E, \mathcal{E}) \text{ 上的有限测度}\}$ 为 $\mathcal{E}$ 的普遍完备化. 如果 $A, B \subset E$ 满足

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{N},$$

我们写 $A \sim B$. 不难看出 “ $\sim$ ” 是 E 的子集间的等价关系. 另外, 对于 $A, B \in \mathcal{E}$, 显然 $A \sim B$ 当且仅当 $\mu(A) = \mu(A \cap B) = \mu(B)$.

命题 1.4.1 我们有 $\mathcal{G}^\mu = \{B \Delta C : B \in \mathcal{G}, C \in \mathcal{N}\} = \{A \subset E : \text{存在 } B \in \mathcal{G} \text{ 使得 } A \Delta B \in \mathcal{N}\}$.

证明 记 $\mathcal{A} = \{A := B \Delta C : B \in \mathcal{G}, C \in \mathcal{N}\}$. 对于 $A, B, C \subset E$ 不难看出 $A = B \Delta C$ 当且仅当 $C = A \Delta B$. 所以 $\mathcal{A} = \{A \subset E : \text{存在 } B \in \mathcal{G} \text{ 使得 } C := A \Delta B \in \mathcal{N}\}$. 这样, 我们只需证明 $\mathcal{A} = \mathcal{G}^\mu$. 由 (1.4.1) 知 $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}^\mu$. 下面证明 $\mathcal{A} \supset \mathcal{G}^\mu$, 因为 $\mathcal{A}$ 包含

$\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{N}$, 所以只需证 $\mathcal{A}$ 是 σ 代数. 设 $A \in \mathcal{A}$. 则存在 $B \in \mathcal{G}$ 使 $A \Delta B \in \mathcal{N}$. 易见 $A^c \Delta B^c = A \Delta B \in \mathcal{N}$. 再因 $B^c \in \mathcal{G}$, 有 $A^c \in \mathcal{A}$. 所以 $\mathcal{A}$ 对取余运算封闭. 此集类对可数并运算也封闭. 这是因为

$$\left(\bigcup_n A_n\right) \Delta \left(\bigcup_n B_n\right) \subset \bigcup_n (A_n \Delta B_n),$$

故若每个 $A_n \Delta B_n$ 都属于 $\mathcal{N}$, 则左端也属于 $\mathcal{N}$. 因此 $\mathcal{A}$ 是一个 σ 代数. $\square$

对于 $A \in \mathcal{G}^\mu$ 取 $B \in \mathcal{G}$ 使 $A \Delta B \in \mathcal{N}$, 并令 $\nu(A) = \mu(B)$. 该定义无歧义且给出 $(E, \mathcal{G}^\mu)$ 上的一个有限测度 ν , 它在 $\mathcal{G}$ 上与 μ 重合 (作业). 特别地, 我们可以将 μ 扩张为 $(E, \mathcal{E}^\mu)$ 上的有限测度 μ^* , 称为 μ 的完备化.

命题 1.4.2 定义在 E 上的实函数 $f \in \mathcal{G}^\mu$ 当且仅当存在 $g \in \mathcal{G}$ 使得 $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}$.

证明 设有 $g \in \mathcal{G}$ 使 $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}$. 对于任意 $B \subset \mathbb{R}$, 有 $\{f \in B\} \Delta \{g \in B\} \subset \{f \neq g\} \in \mathcal{N}$. 若 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, 则 $\{g \in B\} \in \mathcal{G}$. 由命题 1.4.1 可知 $\{f \in B\} \in \mathcal{G}^\mu$, 即 $f \in \mathcal{G}^\mu$. 反之, 设 $f \in \mathcal{G}^\mu$. 先考虑 f 只取可数个值的情况. 不妨设 $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 1_{A_i}$, 其中 $\{a_i\} \subset \mathbb{R}$ 互不相同且非零, 而 $\{A_i\} \subset \mathcal{G}^\mu$ 互不相交. 由命题 1.4.1, 对每个 i 存在 $B_i \in \mathcal{G}$ 使得 $A_i \Delta B_i \in \mathcal{N}$. 因为 $\{A_i\}$ 互不相交, 所以当 $i \neq j$ 时有 $B_i \cap B_j \in \mathcal{N}$. 令 $C_1 = B_1$, $C_i = B_1^c \cap \cdots \cap B_{i-1}^c \cap B_i$ ($i \geq 2$). 于是 $\{C_i\} \subset \mathcal{G}$ 互不相交, 且 $B_i \Delta C_i \in \mathcal{N}$, 进而 $A_i \Delta C_i \in \mathcal{N}$. 令 $g = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 1_{C_i}$, 则 $g \in \mathcal{G}$ 且

$$\{f \neq g\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \Delta C_i) \in \mathcal{N}.$$

对于一般的 $f \in \mathcal{G}^\mu$, 存在只取可数个值的 $f_k \in \mathcal{G}^\mu$ 使得 $f_k \rightarrow f$. 取 $g_k \in \mathcal{G}$ 使 $\{f_k \neq g_k\} \in \mathcal{N}$. 令 $g = \liminf_{k \rightarrow \infty} g_k$. 则 $g \in \mathcal{G}$, 且

$$\{f \neq g\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k \neq g_k\} \in \mathcal{N}.$$

此即为预证结论. $\square$

推论 1.4.3 定义在 E 上的实函数 $f \in b\mathcal{E}^\mu$ 当且仅当存在 $f_1, f_2 \in b\mathcal{E}$ 使得 $f_1 \leq f \leq f_2$ 且 $\mu(f_1 \neq f_2) = 0$. 在这种情况下, 我们有

$$\int_E f(x) \mu^*(dx) = \int_E f_1(x) \mu(dx) = \int_E f_2(x) \mu(dx). \quad (1.4.2)$$

证明 若存在 $f_1, f_2 \in b\mathcal{E}$ 使得 $f_1 \leq f \leq f_2$ 且 $\mu(f_1 \neq f_2) = 0$, 显然有 $\{f \neq f_1\} \in \mathcal{N}$. 根据命题 1.4.2 有 $f \in \mathcal{E}^\mu$. 反之, 设有 $f \in b\mathcal{E}^\mu$. 取常数 $M \geq 0$ 使 $|f| \leq M$. 根据命题 1.4.2 存在 $g \in \mathcal{E}$ 使得 $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}$. 因此有 $N \in \mathcal{E}$ 使 $\{f \neq g\} \subset N$ 且 $\mu(N) = 0$. 显然函数 $f_1 := g1_{N^c} - M1_N$ 和 $f_2 := g1_{N^c} + M1_N$ 即满足要求. 后一个断言显然. $\square$

现在考虑概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. 为叙述上的方便, 我们假定它是完备的. 给定这个概率空间上的流 $(\mathcal{F}_t : t \in I)$, 令 $\mathcal{F}_t^*$ 是 $\mathcal{F}_t$ 的加强化. 我们称 $(\mathcal{F}_t^* : t \in I)$ 为 $(\mathcal{F}_t : t \in I)$ 的加强流. 若 $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^*$ 对所有 $t \in I$ 成立, 则称 $(\mathcal{F}_t : t \in I)$ 是加强的.

命题 1.4.4 假设过程 $(X_t : t \in I)$ 关于流 $(\mathcal{F}_t : t \in I)$ 是 $\mathcal{E}$ 适应的. 那么 (X_t) 的任何修正关于加强流 $(\mathcal{F}_t^*)$ 适应. 特别, 若 $(\mathcal{F}_t)$ 是加强流, 则 (X_t) 的任何修正关于 $(\mathcal{F}_t)$ 适应.

证明 考虑 $(X_t : t \in I)$ 的修正 $(Y_t : t \in I)$. 对任何 $t \in I$ 及 $f \in b\mathcal{E}$, 显然 $\{f(X_t) \neq f(Y_t)\}$ 为 $\mathbf{P}$ 零集. 因为 $f(X_t)$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测, 根据命题 1.4.2 知 $f(Y_t)$ 关于 $\mathcal{F}_t^*$ 可测, 从而 (Y_t) 关于 $(\mathcal{F}_t^*)$ 是 $\mathcal{E}$ 适应的. $\square$

命题 1.4.5 假设 $(X_t : t \in I)$ 关于流 $(\mathcal{F}_t : t \in I)$ 是 $\mathcal{E}$ 适应的过程. 那么它关于加强流 $(\mathcal{F}_t^*)$ 是 $\bar{\mathcal{E}}$ 适应的. 特别, 若 $(\mathcal{F}_t)$ 是加强流, 则任何 $\mathcal{E}$ 适应过程都是 $\bar{\mathcal{E}}$ 适应的.

证明 令 μ_t 为 X_t 在 $(E, \mathcal{E})$ 上的分布. 根据推论 1.4.3, 对任何 $f \in b\bar{\mathcal{E}}$ 有 $f_1, f_2 \in b\mathcal{E}$ 满足 $f_1 \leq f \leq f_2$ 且

$$\mathbf{P}\{f_1(X_t) \neq f_2(X_t)\} = \mu_t(f_1 \neq f_2) = 0.$$

因为 $f_i(X_t) \in b\mathcal{F}_t$ ($i = 1, 2$), 上式蕴含 $f(X_t) \in b\mathcal{F}_t^*$, 即 (X_t) 关于 $(\mathcal{F}_t^*)$ 是 $\bar{\mathcal{E}}$ 适应的. $\square$

命题 1.4.6 设 $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ 为连续时间流. 则对任何 $t \geq 0$ 有 $(\mathcal{F}_{t+})^* = (\mathcal{F}_t^*)_+$.

证明 对于任何 $s > 0$ 有 $(\mathcal{F}_{t+})^* \subset \mathcal{F}_{t+s}^*$, 因而 $(\mathcal{F}_{t+})^* \subset (\mathcal{F}_t^*)_+$. 另一方面, 假设 $F \in b(\mathcal{F}_t^*)_+ = b(\cap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{t+1/n}^*)$. 根据命题 1.4.2, 对每个 $n \geq 1$ 有 $F_n \in b\mathcal{F}_{t+1/n}$ 使 $\mathbf{P}(F \neq F_n) = 0$. 令 $H_n = F - F_n$, 则 $\limsup_{n \rightarrow \infty} H_n = F - \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n$, 其中 $\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n \in \mathcal{F}_{t+}$. 显然

$$\mathbf{P}\left(F \neq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n\right) = \mathbf{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} H_n \neq 0\right) \leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{H_n \neq 0\}\right) = 0.$$

再利用命题 1.4.2 推知 $F \in b(\mathcal{F}_{t+})^*$. $\square$

从命题 1.4.4 和命题 1.4.5 可以看出, 对于加强的流很多结果的形式变得非常简洁. 因此, 在随机过程中经常会先将流加强化, 或者直接考虑加强的流. 另外, 由于有命题 1.4.6, 对于连续时间流 $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$, 我们可以把 $(\mathcal{F}_{t+})^* = (\mathcal{F}_t^*)_+$ 简单地写作 $\mathcal{F}_{t+}^*$.

命题 1.4.7 假设 $(\mathcal{F}_t : t \in I)$ 为加强的流. 若 $(\mathcal{F}_t)$ 停时 T 和 S 满足 $\mathbf{P}(T \neq S) = 0$, 则有 $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_T$.

证明 假设 $A \in \mathcal{F}_S$. 则有 $A \in \mathcal{F}_\infty$ 且对 $t \geq 0$ 有 $A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. 由于 $(\mathcal{F}_t)$ 是强化的且 $\mathbf{P}\{S \neq T\} = 0$, 对 $t \geq 0$ 有 $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. 因此 $A \in \mathcal{F}_T$, 即 $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$. 类似地, 有 $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_S$. $\square$

命题 1.4.8 设 $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ 为右连续流, 并令 $(\mathcal{G}_t : t \geq 0)$ 为其加强流. 则对任何 $(\mathcal{F}_t)$ 停时 T 有 $\mathcal{G}_T = \sigma(\mathcal{F}_T \cup \mathcal{N})$, 其中 $\mathcal{N}$ 为所有 $\mathbf{P}$ 零集构成的集类.

证明 显然有 $\mathcal{G}_T \supset \sigma(\mathcal{F}_T \cup \mathcal{N})$, 下证相反的包含关系 $\mathcal{G}_T \subset \sigma(\mathcal{F}_T \cup \mathcal{N})$. 根据命题 1.4.1, 只需证明对任何 $A \in \mathcal{G}_T$ 存在 $B \in \mathcal{F}_T$ 使 $A \Delta B \in \mathcal{N}$. 对每个 $n \geq 1$ 我们定义二分点离散化 $(\mathcal{F}_t)$ 停时

$$T_n = \frac{1}{2^n}([2^n T] + 1) = \begin{cases} k/2^n & \text{if } (k-1)/2^n \leq T < k/2^n, \\ \infty & \text{if } T = \infty. \end{cases} \quad (1.4.3)$$

注意当 $n \rightarrow \infty$ 时, 递降地 $T_n \rightarrow T$. 根据上式, 对 $1 \leq n < \infty$ 和 $1 \leq k < \infty$ 我们有 $A \cap \{T_n = k/2^n\} \in \mathcal{G}_{k/2^n} = \mathcal{F}_{k/2^n}^*$. 所以存在 $A_{n,k} \in \mathcal{F}_{k/2^n}$ 使得

$$(A \cap \{T_n = k/2^n\}) \Delta A_{n,k} \in \mathcal{N}.$$

再因为 $\{T_n = k/2^n\} \in \mathcal{F}_{k/2^n}$, 我们有

$$B_{n,k} := A_{n,k} \cap \{T_n = k/2^n\} \in \mathcal{F}_{k/2^n}.$$

不难看出

$$(A \cap \{T_n = k/2^n\}) \Delta B_{n,k} \in \mathcal{N}.$$

注意 $A = [\cup_{k=1}^\infty (A \cap \{T_n = k/2^n\})] \cup (A \cap \{T_n = \infty\})$. 令 $B_n = (\cup_{k=1}^\infty B_{n,k}) \cup B_{n,\infty}$. 则有 $A \Delta B_n \in \mathcal{N}$ 和

$$B_n \cap \{T_n = k/2^n\} = B_{n,k} \in \mathcal{F}_{k/2^n}.$$

这推出当 $n \geq k$ 有 $B_n \in \mathcal{F}_{T_n} \subset \mathcal{F}_{T_k}$. 令 $B = \cap_{m=1}^\infty \cup_{n=m}^\infty B_n$. 则 $A \Delta B \in \mathcal{N}$. 显然, 对任何 $k \geq 1$ 有 $B = \cap_{m=k}^\infty \cup_{n=m}^\infty B_n$. 再由 $(\mathcal{F}_t)$ 的右连续性得 $B \in \cap_{k=1}^\infty \mathcal{F}_{T_k} = \mathcal{F}_T$. 故得予证结论. $\square$

命题 1.4.9 假设 $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ 为右连续流. 若 T 为 $(\mathcal{F}_t^*)$ 停时, 则存在 $(\mathcal{F}_t)$ 停时 S 使得 $\mathbf{P}(T \neq S) = 0$.

证明 令 $\{T_n\}$ 是由 (1.4.3) 定义的 T 的二分点离散化 $(\mathcal{F}_t^*)$ 停时序列. 则当 $n \rightarrow \infty$, 递降地 $T_n \rightarrow T$. 取 $A_k \in \mathcal{F}_{k/2^n}$ 使 $\mathbf{P}(\{T_n = k/2^n\} \triangle A_k) = 0$, 并令 $S_n(\omega) = \inf\{k/2^n : \omega \in A_k\}$, 则几乎必然地 $T_n = S_n$. 另外, 显然有 $\{S_n \leq k/2^n\} = \cup_{i=0}^k A_i \in \mathcal{F}_{k/2^n}$, 故 S_n 为 $(\mathcal{F}_t)$ 停时. 因为 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续, 利用命题 1.3.2 不难证明 $S := \inf_{n \geq 1} S_n$ 为 $(\mathcal{F}_t)$ 停时. 显然几乎必然地 $S := \inf_{n \geq 1} T_n = T$. $\square$

命题 1.4.10 如果 $(X_t : t \geq 0)$ 关于右连续流 $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ 是 $\mathcal{E}$ 强适应的, 那么它关于加强流 $(\mathcal{F}_t^*)$ 是 $\bar{\mathcal{E}}$ 强适应的. 特别, 若 $(\mathcal{F}_t)$ 是加强的右连续流, 任何 $\mathcal{E}$ 强适应过程都是 $\bar{\mathcal{E}}$ 强适应的.

证明 下面的部分推导与命题 1.4.5 的证明类似. 假设 T 为 $(\mathcal{F}_t^*)$ 停时. 根据命题 1.4.9, 存在 $(\mathcal{F}_t)$ 停时 S 使得 $\mathbf{P}(T \neq S) = 0$. 令 μ_S 为 X_S 在 $(E, \mathcal{E})$ 上的分布. 根据推论 1.4.3, 对任何 $f \in b\bar{\mathcal{E}}$ 有 $f_1, f_2 \in b\mathcal{E}$ 满足 $f_1 \leq f \leq f_2$ 且

$$\mathbf{P}(\{f_1(X_S) \neq f_2(X_S)\} \cap \{S < \infty\}) = \mu_S(f_1 \neq f_2) = 0.$$

因为 (X_t) 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 是 $\mathcal{E}$ 强适应的, 根据命题 1.4.8 我们有 $f_i(X_S)1_{\{S < \infty\}} \in b\mathcal{F}_S$ ($i = 1, 2$). 故上式蕴含 $f(X_S)1_{\{S < \infty\}} \in b\mathcal{F}_S^*$. 再由命题 1.4.7 易知 $f(X_T)1_{\{T < \infty\}} \in b\mathcal{F}_T^*$. 所以 (X_t) 关于 $(\mathcal{F}_t^*)$ 是 $\bar{\mathcal{E}}$ 强适应的. $\square$

集合 $A \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ 在 Ω 上的投影定义为 $\pi(A) = \{\omega \in \Omega : \text{存在 } s \in \mathbb{R}_+ \text{ 使得 } (s, \omega) \in A\}$. 该集合的首映时 (debut) 定义为 $\tau(\omega) = \inf\{t \geq 0 : (t, \omega) \in A\}$. 下面定理的证明用到肖凯 (Choquet) 容度理论, 篇幅较大, 感兴趣的读者可参见 [6, p.43 和 p.58].

定理 1.4.11 (可测投影定理) 假定 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$. 那么 $\pi(A)$ 关于 $\mathcal{F}^*$ 可测.

我们说流 $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ 满足通常条件, 如果它是右连续的且是加强的. 利用可测投影定理, 可以证明如下的:

定理 1.4.12 设 $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ 是满足通常条件的流, 而 $(X_t : t \geq 0)$ 是取值于状态空间 $(E, \mathcal{E})$ 的循序可测过程. 则下述性质成立:

- (1) 若 $A \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ 是一个循序集, 则 A 的首映时 τ 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时.
- (2) 对于任何 $B \in \mathcal{E}$, 进入时 D_B 和击中时 T_B 都是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时.

证明 (1) 由于 A 是循序的, 对任意的 $t \geq 0$ 有 $([0, t) \times \Omega) \cap A \in \mathcal{B}[0, t) \times \mathcal{F}_t$. 再因为 $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ 满足通常条件, 每个 $\mathcal{F}_t$ 都是完备的. 由可测投影定理, 有

$$\{\tau < t\} = \{\omega : \text{有 } s \in [0, t) \text{ 使 } (s, \omega) \in A\} = \pi(([0, t) \times \Omega) \cap A) \in \mathcal{F}_t.$$

再由 $(\mathcal{F}_t)$ 的右连续性推出 τ 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时.

(2) 令 $A = \{(t, \omega) : X(t, \omega) \in B\}$. 由于 X 循序可测, 故 $1_B(X_t(\omega)) = 1_A(t, \omega)$ 是循序可测过程. 因而 A 是循序可测集. 显然 B 的进入时

$$D_B(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in B\} = \inf\{t \geq 0 : (t, \omega) \in A\}$$

就是 A 的首映时. 因此 D_B 是停时. 取 $r > 0$, 则 $(\mathcal{F}_{r+t} : t \geq 0)$ 循序可测过程 $\{X_{r+t} : t \geq 0\}$ 对于 B 的进入时 D_B^r 是 $(\mathcal{F}_{r+t} : t \geq 0)$ 停时. 所以, 当 $s \geq r > 0$ 时, D_B^r 是 $(\mathcal{F}_{s+t} : t \geq 0)$ 停时, 因而 $r + D_B^r$ 是 $(\mathcal{F}_{s+t} : t \geq 0)$ 停时. 注意当 $r \downarrow 0$ 时

$$r + D_B^r = r + \inf\{t \geq 0 : X_{r+t} \in B\} = \inf\{t \geq r : X_t \in B\} \downarrow T_B.$$

再由命题 1.3.5 及 $(\mathcal{F}_t)$ 的右连续性知 T_B 是 $(\mathcal{F}_{s+t} : t \geq 0)$ 停时. 因此, 对于任何 $t \geq 0$ 有 $\{T_B \leq t\} \in \mathcal{F}_{s+t}$. 再由 $s > 0$ 的任意性和 $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ 的右连续性得 $\{T_B \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, 故 T_B 是 $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ 停时. $\square$

第二章 鞅论基础

在这一章中, 我们给出有关鞅(上, 下鞅)的初步结果, 包括若干不等式, 收敛定理, 连续时间下鞅轨道的正则化等. 鞅方法是现代随机过程理论中最重要的工具之一. 有关鞅的更深入的讨论, 可参见 [7, 9] 等.

§2.1 鞅和鞅序列

在本节中, 我们给出鞅的定义并证明若干基本性质. 设 I 是时间集, 通常它可以为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{Z}$ 中的任何区间. 如无特别声明, 在本章中我们假定 $I = \mathbb{Z}_+$ 或 $\mathbb{R}_+$. 考虑某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上给定的 σ 代数流 $(\mathcal{F}_t : t \in I)$ 和实值过程 $(X_t : t \in I)$.

定义 2.1.1 假设 (X_t) 可积且关于流 $(\mathcal{F}_t)$ 适应. 称 (X_t) 称为关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的鞅 (对应地, 上鞅或下鞅), 如果对任何 $t \geq s \in I$ 都有 $\mathbf{P}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ (对应地, “=” 替换为 “ $\leq$ ” 或 “ $\geq$ ”). 在上下文明确时, 简称为鞅 (对应地, 上鞅或下鞅). 如果未指定流, 鞅是指关于自然流的鞅 (对应地, 上鞅或下鞅).

当 $I = \mathbb{Z}_+$ 时, 对应的鞅称为鞅序列或者离散时间鞅; 当 $I = \mathbb{R}_+$ 时, 对应的鞅称为连续时间鞅. 显然 $(X_n : n \geq 0)$ 是离散时间鞅当且仅当对任何 $n \geq 0$ 都有 $\mathbf{P}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$. 由定义, 立刻得到下列简单性质:

命题 2.1.1 (1) 记 $\mathcal{M}$ (对应地, $\mathcal{M}^+$) 为相对于某个给定 σ 代数流的鞅 (对应地, 下鞅) 全体. 那么 $\mathcal{M}$ 是一个线性空间, 而 $\mathcal{M}^+$ 是凸锥且对极大运算 $\vee$ 封闭.

(2) 若 (X_t) 是 $(\mathcal{F}_t)$ 下鞅, 则 $t \mapsto \mathbf{P}(X_t)$ 递增. 另外, 下鞅 (X_t) 是鞅当且仅当 $t \mapsto \mathbf{P}(X_t)$ 是常数.

(3) 若 (X_t) 是鞅, ϕ 是凸函数且每个 $\phi(X_t)$ 可积, 则 $(\phi(X_t))$ 是下鞅. 因此 $(|X_t|)$, (X_t^2) (若每个 X_t 平方可积) 是下鞅.

(4) 若 (X_t) 是下鞅, ϕ 是递增凸函数且每个 $\phi(X_t)$ 可积, 则 $(\phi(X_t))$ 也是下鞅. 因此 (X_t^+) 是下鞅.

例 2.1.1 设 $\{\xi_n : n \geq 1\}$ 是例 1.1.1 中定义的 Bernoulli 随机序列. 任取整数值 $X_0 = k$ 并令 $X_n = X_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i$ ($n \geq 1$). 则 (X_n) 为简单随机游动. 再令 $(\mathcal{F}_n)$ 为 X 的自然流. 我们有

$$\mathbf{P}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbf{P}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) + X_n$$

$$= \mathbf{P}(\xi_i) + X_n = (p - q) + X_n.$$

当 $p = q$ 时, (X_n) 是对称的简单随机游动, 此时它是鞅. 当 $p \geq q$ 时, (X_n) 是下鞅; 当 $p \leq q$ 时, (X_n) 是上鞅. 简单随机游动可用来描述赌博中某个赌徒的赌资. 显然, 鞅的情况对应于对双方公平的博弈. $\square$

显然, 鞅, 上鞅或下鞅的概念与流有关. 若 X 关于大的适应流是鞅, 它关于小的适应流也是鞅. 显然, X 是上鞅当且仅当 $-X$ 是下鞅, 而 X 是鞅当且仅当它即使上鞅也是下鞅. 因此, 后面的结果只对上鞅或下鞅叙述.

引理 2.1.2 假设随机变量 X 和 Y 关于 σ 代数 $\mathcal{F}$ 可测. 则 $\mathbf{P}(X \leq Y) = 1$ 当且仅当对任何 $A \in \mathcal{F}$ 都有 $\mathbf{P}(X; A) \leq \mathbf{P}(Y; A)$.

证明 假设对任何 $A \in \mathcal{F}$ 都有 $\mathbf{P}(X; A) \leq \mathbf{P}(Y; A)$. 特别地, 对于 $A := \{X - Y > 0\} \in \mathcal{F}$ 有 $\mathbf{P}(X - Y; A) = \mathbf{P}(X; A) - \mathbf{P}(Y; A) \leq 0$. 因此不难发现 $\mathbf{P}(A) = 0$, 即 $\mathbf{P}(X \leq Y) = 1$. 上述结果的逆命题显然成立. $\square$

命题 2.1.3 假设 (X_t) 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 适应. 那么 (X_t) 是关于流 $(\mathcal{F}_t)$ 的下鞅当且仅当对于 $s \leq t \in I$ 和 $A \in \mathcal{F}_s$ 有 $\mathbf{P}(X_s; A) \leq \mathbf{P}(X_t; A)$.

证明 假若 (X_t) 是 $(\mathcal{F}_t)$ 下鞅, 则对 $s \leq t \in I$ 和 $A \in \mathcal{F}_s$ 有 $\mathbf{P}(X_s; A) \leq \mathbf{P}[\mathbf{P}(X_t | \mathcal{F}_s); A] = \mathbf{P}(X_t; A)$. 反之, 设对 $s \leq t \in I$ 和 $A \in \mathcal{F}_s$ 有 $\mathbf{P}(X_s; A) \leq \mathbf{P}(X_t; A) = \mathbf{P}[\mathbf{P}(X_t | \mathcal{F}_s); A]$. 根据引理 2.1.2 有 $X_s \leq \mathbf{P}(X_t | \mathcal{F}_s)$, 即 (X_t) 是 $(\mathcal{F}_t)$ 下鞅. $\square$

命题 2.1.4 如果 (X_t) 是关于流 $(\mathcal{F}_t)$ 的下鞅, 它也是关于加强的流 $(\mathcal{F}_t^*)$ 的下鞅.

证明 因为 (X_t) 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 适应, 它也关于 $(\mathcal{F}_t^*)$ 适应. 考虑 $s \leq t \in I$ 和 $A \in \mathcal{F}_s^*$. 根据命题 1.4.1, 存在 $B \in \mathcal{F}_s$ 使得 $\mathbf{P}(A \Delta B) = 0$. 由于 $X_s \leq \mathbf{P}(X_t | \mathcal{F}_s)$, 根据引理 2.1.2 有

$$\mathbf{P}(X_t; A) = \mathbf{P}(X_t; B) \geq \mathbf{P}(X_s; B) = \mathbf{P}(X_s; A).$$

由命题 2.1.3 知 (X_t) 是 $(\mathcal{F}_t^*)$ 下鞅. $\square$

命题 2.1.5 假设 $(X_n(t))$, $n = 1, 2, \dots$ 是关于流 $(\mathcal{F}_t)$ 的下鞅. 如果对任意 $t \in I$ 都有 $X_n(t) \xrightarrow{L^1} X_t$, 那么 (X_t) 关于加强的流 $(\mathcal{F}_t^*)$ 是下鞅. 特别地, 如果流 $(\mathcal{F}_t)$ 是加强的, 在上述条件下 (X_t) 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 是下鞅.

证明 由假设, 对 $t \in I$ 有 $X_n(t) \xrightarrow{L^1} X_t$. 因每个 $X_n(t)$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 可测, 故 X_t 关于 $\mathcal{F}_t^*$ 可测, 即 (X_t) 关于 $(\mathcal{F}_t^*)$ 适应. 再由 $X_n(t) \xrightarrow{L^1} X_t$ 知 $X_n(t)1_A \xrightarrow{L^1} X_t1_A$ 对任意 $A \in \mathcal{F}_t^*$ 成立. 另外, 根据假设和命题 2.1.4, 每个 $(X_n(t))$ 关于流 $(\mathcal{F}_t^*)$ 是下鞅, 故对 $t \geq s \in I$ 和 $A \in \mathcal{F}_s^*$ 有 $\mathbf{P}[X_n(t)1_A] \geq \mathbf{P}[X_n(s)1_A]$. 所以

$$\mathbf{P}(X_t1_A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}[X_n(t)1_A] \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}[X_n(s)1_A] = \mathbf{P}(X_s1_A).$$

这说明 (X_t) 关于 $(\mathcal{F}_t^*)$ 是下鞅. $\square$

定义 2.1.2 设 Y 为实可积随机变量. 对于 $t \in I$ 令 $X_t = \mathbf{P}(Y|\mathcal{F}_t)$. 则 $X = (X_t : t \in I)$ 是一个关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的鞅, 称为右闭鞅或杜布鞅.

命题 2.1.6 杜布鞅 $X = (X_t : t \in I)$ 是一致可积的.

证明 设 $X_t = \mathbf{P}(Y|\mathcal{F}_t)$ 由上面定义给出, 其中 Y 为可积随机变量. 对任意的 $N > 0$ 有

$$\mathbf{P}(|X_t|; |X_t| > N) \leq \mathbf{P}[\mathbf{P}(|Y||\mathcal{F}_t); |X_t| > N] = \mathbf{P}(|Y|; |X_t| > N).$$

再取 $L > 0$ 得

$$\mathbf{P}(|Y|; |X_t| > N) \leq \mathbf{P}(|Y|; |Y| > L) + L\mathbf{P}(|X_t| > N),$$

其中

$$\mathbf{P}(|X_t| > N) \leq \frac{1}{N}\mathbf{P}|X_t| = \frac{1}{N}\mathbf{P}[\mathbf{P}(Y|\mathcal{F}_t)] \leq \frac{1}{N}\mathbf{P}|Y|.$$

所以

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} \mathbf{P}(|X_t|; |X_t| > N) \leq \mathbf{P}(|Y|; |Y| > L).$$

由 $L > 0$ 的任意性知 $X = (X_t : t \in I)$ 是一致可积的. $\square$

定义 2.1.3 关于流 $(\mathcal{F}_t : t \in I)$ 适应的实值过程 $(M_t : t \in I)$ 称为局部鞅, 如果存在单增且趋于无穷的停时列 $\{\tau_n\}$ 使得对任何 $n \geq 1$, 过程 $M^{\tau_n} = (M_{t \wedge \tau_n} : t \in I)$ 是鞅. 这时 $\{\tau_n\}$ 称为 M 的局部化序列.

注意, 鞅一定是局部鞅, 但局部鞅不一定是鞅. 对任何连续局部鞅 $(M_t : t \geq 0)$, 总是存在一个局部化序列 $\{\tau_n\}$ 使得每个 $(M_{t \wedge \tau_n} : t \geq 0)$ 是有界连续鞅. 例如, 可令 $\tau_n = \inf\{t \in I : |M_t| \geq n\}$.

本节下面主要讨论离散时间鞅, 即 $I = \mathbb{Z}_+$ 的情况. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 是概率空间, $(\mathcal{F}_n : n \geq 0)$ 是其上的流. 随机过程 $(H_n : n \geq 0)$ 称为可料的, 如果 H_0 是 $\mathcal{F}_0$ 可测的且对任意的 $n \geq 1$, 随机变量 H_n 关于 $\mathcal{F}_{n-1}$ 可测. 设 X 是适应过程, H_n 是可料过程. 定义 $(H \cdot X)_0 = H_0 X_0$ 和

$$(H \cdot X)_n = (H \cdot X)_{n-1} + H_n(X_n - X_{n-1}), \quad n \geq 1. \quad (2.1.1)$$

称 $\{(H \cdot X)_n : n \geq 0\}$ 为 H 关于 X 的随机积分. 由上面递推公式得

$$(H \cdot X)_n = H_0 X_0 + \sum_{i=1}^n H_i(X_i - X_{i-1}), \quad n \geq 1. \quad (2.1.2)$$

(为了在符号上区别乘积与随机积分, 我们写乘积时一般不用点.) 上式实际上是随机分析中的随机积分概念的离散时间形式.

定理 2.1.7 设 X 是适应过程, H 是可料过程, 且 $H \cdot X$ 可积. 若 X 是鞅, 则 $H \cdot X$ 是鞅; 若 X 是下鞅且 H 非负, 则 $H \cdot X$ 是下鞅.

证明 显然 $H \cdot X$ 是适应的. 对 $n \geq 1$ 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[(H \cdot X)_n - (H \cdot X)_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbf{P}(H_n(X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= H_n \mathbf{P}(X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}). \end{aligned}$$

因此 X 是鞅(对应地, X 是下鞅且 H 非负)蕴含着 $H \cdot X$ 是鞅(对应地, 下鞅). $\square$

回忆前面定义的停止过程 $X_n^\tau = X_{\tau \wedge n}$. 作为上面定理的一个特例, 我们有

推论 2.1.8 设 X 是一个鞅(下鞅), τ 是一个停时, 则 τ 停止过程 X^τ 也是一个鞅(下鞅).

证明 定义 $H_n = 1_{\{\tau \geq n\}} = 1 - 1_{\{\tau \leq n-1\}}$. 则 $H_0 = 1$, 而且 H_n 非负有界而且是 $\mathcal{F}_{n-1}$ 可测的. 利用 (2.1.2) 得

$$\begin{aligned} (H \cdot X)_n &= H_0 X_0 - H_1(X_0 - X_1) - H_2(X_1 - X_2) - \cdots - H_n(X_{n-1} - X_n) \\ &= (H_0 - H_1)X_0 + (H_1 - H_2)X_1 + \cdots + (H_{n-1} - H_n)X_{n-1} + H_n X_n \\ &= 1_{\{\tau=0\}}X_0 + 1_{\{\tau=1\}}X_1 + \cdots + 1_{\{\tau=n-1\}}X_{n-1} + 1_{\{\tau \geq n\}}X_n \\ &= 1_{\{\tau < n\}}X_\tau + 1_{\{\tau \geq n\}}X_n = X_{\tau \wedge n}. \end{aligned}$$

因为 $(H_n : n \geq 0)$ 有界, 故每个 $(H \cdot X)_n$ 可积. 由定理 2.1.7 即得结论. $\square$

若对任意的 n , 随机变量 H_n 有界, 则称过程 $H = (H_n : n \geq 0)$ 是局部有界的. 不难证明, 如果 X 可积, 且 H 局部有界, 那么 $H \cdot X$ 是可积的. 下面的定理称为杜布有界停止定理, 是随机分析中非常本质的结果.

定理 2.1.9 设 X 是下鞅, σ 和 τ 是有界停时且 $\sigma \leq \tau$. 那么 X_σ 和 X_τ 是可积的且

$$\mathbf{P}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq X_\sigma.$$

证明 取 N 使得 $\tau \leq N$. 由推论 2.1.8 知 $X_\sigma = X_N^\sigma$ 和 $X_\tau = X_N^\tau$ 均可积. 根据引理 2.1.2, 只需证明对任意的 $B \in \mathcal{F}_\sigma$ 有

$$\mathbf{P}(X_\sigma; B) \leq \mathbf{P}[\mathbf{P}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma); B] = \mathbf{P}(X_\tau; B).$$

以下分两步进行讨论:

(1) 假设 $0 \leq \tau - \sigma \leq 1$. 此时, 我们可以写

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_\tau - X_\sigma; B) &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{P}(X_\tau - X_\sigma; B \cap \{\sigma = n\} \cap \{\tau = n+1\}) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{P}(X_{n+1} - X_n; B \cap \{\sigma = n\} \cap \{\tau = n+1\}). \end{aligned}$$

注意对任意的 $0 \leq n \leq N-1$ 有

$$B \cap \{\sigma = n\} \cap \{\tau = n+1\} = B \cap \{\sigma = n\} \cap \{\tau > n\} \in \mathcal{F}_n.$$

由下鞅性

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_\tau - X_\sigma; B) &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{P}\{\mathbf{P}[(X_{n+1} - X_n)1_{B \cap \{\sigma = n\} \cap \{\tau = n+1\}} | \mathcal{F}_n]\} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{P}\{\mathbf{P}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n)1_{B \cap \{\sigma = n\} \cap \{\tau = n+1\}}\} \geq 0. \end{aligned}$$

(2) 在一般情形, 令 $\tau_n = \tau \wedge (\sigma + n)$, 其中 $0 \leq n \leq N$. 则每个 τ_n 为停时且 $0 \leq \tau_{n+1} - \tau_n \leq 1$. 由于 $B \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\tau_n}$, 由上面证明的结论

$$\mathbf{P}(X_\tau; B) = \mathbf{P}(X_{\tau_N}; B) \geq \cdots \geq \mathbf{P}(X_{\tau_1}; B) \geq \mathbf{P}(X_{\tau_0}; B) = \mathbf{P}(X_\sigma; B).$$

故得予证结果. $\square$

推论 2.1.10 设 X 是可积适应过程, 则 X 是鞅当且仅当对任何有界停时 $\sigma \leq \tau$ 有 $\mathbf{P}(X_\sigma) = \mathbf{P}(X_\tau)$, 或等价地对任何有界停时 τ 有 $\mathbf{P}(X_\tau) = \mathbf{P}(X_0)$.

证明 设 X 是鞅. 由定理 2.1.9, 对任何有界停时 $\sigma \leq \tau$ 有 $X_\sigma = \mathbf{P}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma)$, 两端取期望得 $\mathbf{P}(X_\sigma) = \mathbf{P}(X_\tau)$. 反之, 设对任何有界停时 $\sigma \leq \tau$ 有 $\mathbf{P}(X_\sigma) = \mathbf{P}(X_\tau)$. 取 N 使得 $\tau \leq N$. 对任何 $B \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$ 令

$$\sigma_B = \sigma 1_B + N 1_{B^c}, \quad \tau_B = \tau 1_B + N 1_{B^c}.$$

下面验证 σ_B 和 τ_B 是停时. 事实上, 若 $t < N$, 则

$$\{\sigma_B \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap B \in \mathcal{F}_t, \quad \{\tau_B \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap B \in \mathcal{F}_t;$$

而若 $t \geq N$, 则 $\{\sigma_B \leq t\} = \{\tau_B \leq t\} = \Omega \in \mathcal{F}_t$. 因此, 由假定有 $\mathbf{P}(X_{\sigma_B}) = \mathbf{P}(X_{\tau_B})$, 或写为

$$\mathbf{P}(X_\sigma; B) + \mathbf{P}(X_N; B^c) = \mathbf{P}(X_\tau; B) + \mathbf{P}(X_N; B^c).$$

这推出 $\mathbf{P}(X_\sigma; B) = \mathbf{P}(X_\tau; B)$, 故 $X_\sigma = \mathbf{P}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma)$. 这就证明了 X 是鞅. $\square$

推论 2.1.11 可积非负局部鞅是上鞅.

证明 设 $X = (X_k : k \geq 0)$ 是非负局部鞅, 而 $\{\tau_n\}$ 为相应的局部化序列. 对于任意的整数 $l \geq k \geq 0$, 由条件数学期望的 Fatou 引理, 命题 1.3.11 和定理 2.1.9 有

$$\mathbf{P}(X_l | \mathcal{F}_k) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_{l \wedge \tau_n} | \mathcal{F}_k) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_{l \wedge \tau_n} | \mathcal{F}_{k \wedge \tau_n}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_{k \wedge \tau_n} = X_k.$$

所以 X 是上鞅. $\square$

定理 2.1.12 设 X 是非负上鞅. 令 $\sigma = \min\{k \geq 0 : X_k = 0\}$. 那么对任意的 $n \geq 0$ 有 $\mathbf{P}\{\sigma \leq n, X_n > 0\} = 0$.

证明 固定 $a > 0$, 并令 $\tau = \min\{k \geq \sigma : X_k \geq a\}$. 易证 σ 和 τ 是停时, 而且 $\sigma \leq \tau$. 由定理 2.1.9, 对任意的 $n \geq 0$ 有

$$\begin{aligned} 0 &\geq \mathbf{P}(X_{\tau \wedge n} - X_{\sigma \wedge n}) \\ &= \mathbf{P}(X_\tau - X_\sigma; \tau \leq n) + \mathbf{P}(X_n - X_\sigma; \sigma < n < \tau) + \mathbf{P}(X_n - X_n; \sigma \geq n) \\ &\geq a\mathbf{P}(\tau \leq n) + \mathbf{P}(X_n; \sigma < n < \tau) \\ &\geq a\mathbf{P}(\tau \leq n). \end{aligned}$$

因此 $\mathbf{P}(\tau \leq n) = 0$. 显然 $\{\sigma \leq n, X_n \geq a\} \subset \{\tau \leq n\}$, 故 $\mathbf{P}(\sigma \leq n, X_n \geq a) = 0$. 让 $a \rightarrow 0$ 即得所需结论. $\square$

上述定理说明非负上鞅在某时刻到达零点后永远停留在零点. 另外, 如果 $\{X_n : n \geq 0\}$ 是鞅, τ 是有界停时, 由杜布停止定理有 $\mathbf{P}(X_\tau) = \mathbf{P}(X_0)$. 下面的定理说明这个等式对于某些无界停时也是正确的.

定理 2.1.13 设 $(X_n : n \geq 0)$ 是鞅, τ 是停时. 如果: (1) $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$; (2) $\mathbf{P}|X_\tau| < \infty$; (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n; \tau > n) = 0$; 那么 $\mathbf{P}(X_\tau) = \mathbf{P}(X_0)$.

证明 利用有界停止定理, 有

$$\mathbf{P}(X_0) = \mathbf{P}(X_{\tau \wedge n}) = \mathbf{P}(X_\tau; \tau \leq n) + \mathbf{P}(X_n; \tau > n) \rightarrow \mathbf{P}(X_\tau) \quad (n \rightarrow \infty).$$

这里最后的极限关系成立是由于条件 (1), (2), (3) 及控制收敛定理. $\square$

容易验证, 若条件 (1) 满足且有条件: (4) $\mathbf{P}(\sup_{k \geq 0} |X_{\tau \wedge k}|) < \infty$ 成立, 则上面的条件 (2) 和 (3) 成立. 特别地, 若 $\{X_{\tau \wedge n} : n \geq 0\}$ 有界, 则显然条件 (4) 成立.

例 2.1.2 设 $\{\xi_n\}$ 是 Bernoulli 随机序列且 $\mathbf{P}\{\xi_i = 1\} = p$, $\mathbf{P}\{\xi_i = -1\} = q$, 其中 $p, q \geq 0$ 且 $p + q = 1$. 令 $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ ($n \geq 0$). 则 $\{S_n\}$ 是从 0 出发的简单随机游动. 取定整数 $a < 0 < b$, 并以 τ_a 和 τ_b 分别记 $\{S_n\}$ 首次到达 a 和 b 的时间. 令 τ 为 $\{S_n\}$ 首次到达 $\{a, b\}$ 的时间, 显然 $\tau = \tau_a \wedge \tau_b$. 分别记 $\{S_\tau = a\} = \{\tau_a < \tau_b\}$ 和 $\{S_\tau = b\} = \{\tau_b < \tau_a\}$ 的概率为 p_a 和 p_b . 由例 1.1.2 有 $\mathbf{P}(\tau < \infty) = 1$, 故 $p_a + p_b = 1$.

(1) 考虑 $p = q = 1/2$ 的情况. 此时, 由定理 2.1.13 后的说明, 有

$$0 = \mathbf{P}(S_0) = \mathbf{P}(S_\tau) = ap_a + bp_b = (b - a)p_b + a.$$

由此解得 $p_a = b(b - a)^{-1}$ 和 $p_b = |a|(b - a)^{-1}$.

(2) 考虑 $p \neq q$ 的情况. 此时, 因 $\mathbf{P}[(q/p)^{\xi_n}] = p + q = 1$, 我们有

$$\mathbf{P}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} - \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} \mathbf{P}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_n} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] - \left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n-1}} = 0.$$

因而 $\{(q/p)^{S_n} : n \geq 0\}$ 是鞅. 由定理 2.1.13 后的说明,

$$1 = \mathbf{P}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_0}\right] = \mathbf{P}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_\tau}\right] = \left(\frac{q}{p}\right)^a p_a + \left(\frac{q}{p}\right)^b p_b = \left(\frac{q}{p}\right)^a + \left[\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^a\right] p_b.$$

由此解得

$$p_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^b - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^a}, \quad p_b = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^a}. \quad (2.1.3)$$

故若 $0 < q < p < 1$, 则 $\mathbf{P}(\tau_a < \infty) = \lim_{b \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau_a < \tau_b) = (q/p)^{-a}$. 类似地, 若 $0 < p < q < 1$, 则 $\mathbf{P}(\tau_b < \infty) = (p/q)^b$. $\square$

例 2.1.3 前面提到过, 在赌博对局中, 鞅表达了一种公平性原则. 然而, 它只说明赌博的每一局是公平的, 其最后的结果仍然可能是不公平的. 考虑由从 0 出发的对称简单随机游动描述的赌博游戏. 赌徒开局时持有赌资为零. 如果他可以决定赌博的停止时间, 那么他可以规定自己在钱数达到 $a > 0$ 后离开. 上例说明他总可实现该目标. 之所以会出现这种不公平的结果, 是因为赌徒可以无利息无限制地借款, 而且可以随意决定停止的时刻. 所以同一个具有无限赌资的赌徒进行赌博是不公平的. 这个例子也说明杜布停止定理对于(有限但无界)停时未必成立. $\square$

鞅, 上鞅和下鞅的概念是美国概率学家杜布提出来的. 杜布建立的关于鞅, 上鞅或下鞅的很多不等式在鞅论研究中有重要的作用. 下面的不等式通常称为杜布不等式.

定理 2.1.14 设 $X = (X_n : n \geq 0)$ 是一个下鞅. 则有下列性质成立:

(1) 对任何 $\lambda > 0$ 及整数 $n \geq 0$,

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq k \leq n} |X_k| \geq \lambda\right\} \leq 2\mathbf{P}(X_n^+) - \mathbf{P}(X_0);$$

(2) 设 X 是非负的, 则对任何 $p > 1$ 及整数 $n \geq 0$,

$$\mathbf{P}\left(\max_{0 \leq k \leq n} X_k^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{P}[X_n^p].$$

证明 (1) 令 $\tau = \inf\{k \geq 0 : X_k \geq \lambda\}$. 则 τ 是停时. 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_n) &\geq \mathbf{P}(X_{\tau \wedge n}) = \mathbf{P}\left(X_\tau; \max_{0 \leq k \leq n} X_k \geq \lambda\right) + \mathbf{P}\left(X_n; \max_{0 \leq k \leq n} X_k < \lambda\right) \\ &\geq \lambda \mathbf{P}\left(\max_{0 \leq k \leq n} X_k \geq \lambda\right) + \mathbf{P}\left(X_n; \max_{0 \leq k \leq n} X_k < \lambda\right). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{P}\left(\max_{0 \leq k \leq n} X_k \geq \lambda\right) &\leq \mathbf{P}(X_n) - \mathbf{P}\left(X_n; \max_{0 \leq k \leq n} X_k < \lambda\right) \\ &\leq \mathbf{P}\left(X_n; \max_{0 \leq k \leq n} X_k \geq \lambda\right) \leq \mathbf{P}(X_n^+). \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

再令 $\sigma = \inf\{k \geq 0 : X_k \leq -\lambda\}$. 与上面类似地, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_0) &\leq \mathbf{P}(X_{\sigma \wedge n}) = \mathbf{P}\left(X_\sigma; \min_{0 \leq k \leq n} X_k \leq -\lambda\right) + \mathbf{P}\left(X_n; \min_{0 \leq k \leq n} X_k > -\lambda\right) \\ &\leq -\lambda \mathbf{P}\left(\min_{0 \leq k \leq n} X_k \leq -\lambda\right) + \mathbf{P}\left(X_n; \min_{0 \leq k \leq n} X_k > -\lambda\right). \end{aligned}$$

因此

$$\lambda \mathbf{P}\left(\min_{0 \leq k \leq n} X_k \leq -\lambda\right) \leq \mathbf{P}\left(X_n; \min_{0 \leq k \leq n} X_k > -\lambda\right) - \mathbf{P}(X_0) \leq \mathbf{P}(X_n^+) - \mathbf{P}(X_0).$$

结合上述两个不等式即得予证者.

(2) 令 $q = p/(p-1)$ 和 $\eta = \max_{0 \leq k \leq n} X_k$. 由 (2.1.4) 知

$$t \mathbf{P}(1_{\{\eta \geq t\}}) = t \mathbf{P}(\eta \geq t) \leq \mathbf{P}(X_n; \eta \geq t) = \mathbf{P}(X_n 1_{\{\eta \geq t\}}).$$

由 Fubini 定理, Hölder 不等式及上式得到

$$\mathbf{P}(\eta^p) = \mathbf{P}\left(\int_0^\infty p t^{p-1} 1_{\{t \leq \eta\}} dt\right) = p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbf{P}(1_{\{t \leq \eta\}}) dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq p \int_0^\infty t^{p-2} \mathbf{P}(X_n 1_{\{t \leq \eta\}}) dt = p \mathbf{P}\left(X_n \int_0^\eta t^{p-2} dt\right) \\
&= \frac{p}{p-1} \mathbf{P}(X_n \eta^{p-1}) \leq q [\mathbf{P}(X_n^p)]^{\frac{1}{p}} [\mathbf{P}(\eta^{(p-1)q})]^{\frac{1}{q}} \\
&= q [\mathbf{P}(X_n^p)]^{\frac{1}{p}} [\mathbf{P}(\eta^p)]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

两边同除以 $[\mathbf{P}(\eta^p)]^{\frac{1}{q}}$ 即得予证者. $\square$

§2.2 上穿不等式

关于鞅的不等式在随机过程的研究中起着重要的作用. 本节我们再证明另外一个非常重要的不等式. 现在设 $X = (X_n : n \geq 0)$ 是一个实值随机过程. 对于给定的常数 $-\infty < a < b < \infty$, 我们定义 $\tau_0 = 0$ 和

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \inf\{n \geq 0 : X_n \leq a\}; \\
\tau_2 &= \inf\{n \geq \tau_1 : X_n \geq b\}; \\
&\dots \\
\tau_{2k+1} &= \inf\{n \geq \tau_{2k} : X_n \leq a\}; \\
\tau_{2k+2} &= \inf\{n \geq \tau_{2k+1} : X_n \geq b\}; \\
&\dots
\end{aligned}$$

则 $\{\tau_n : n \geq 1\}$ 是一个严格单调上升的停时序列. 对 $N \geq 1$ 令

$$U_N^X[a, b] = \max\{k : \tau_{2k} \leq N\}.$$

随机变量 $U_N^X[a, b]$ 记录了过程 X 在时刻 0 到 N 之间上穿区间 $[a, b]$ 的次数. 下面是著名的杜布上穿不等式.

定理 2.2.1 设 X 是一个下鞅, 则对任何常数 $a < b$ 和非负整数 N , 有

$$\mathbf{P}\{U_N^X[a, b]\} \leq \frac{1}{b-a} \mathbf{P}[(X_N - a)^+ - (X_0 - a)^+] \leq \frac{1}{b-a} \mathbf{P}|X_N - a|.$$

证明 令 $Y_n = (X_n - a)^+$, 显然 $Y = (Y_n)$ 也是一个下鞅. 自然地有 $U_N^X[a, b] = U_N^Y[0, b-a]$. 取 k 使 $2k-1 \geq N$, 那么 $\tau_{2k} \geq 2k-1 \geq N$, 因此

$$\begin{aligned}
Y_N - Y_0 &= \sum_{n=1}^{2k} (Y_{\tau_n \wedge N} - Y_{\tau_{n-1} \wedge N}) \\
&= \sum_{n=1}^k (Y_{\tau_{2n} \wedge N} - Y_{\tau_{2n-1} \wedge N}) + \sum_{n=0}^{k-1} (Y_{\tau_{2n+1} \wedge N} - Y_{\tau_{2n} \wedge N})
\end{aligned}$$

$$\geq (b-a)U_N^Y[0, b-a] + \sum_{n=0}^{k-1} (Y_{\tau_{2n+1} \wedge N} - Y_{\tau_{2n} \wedge N}).$$

因为 $\tau_{2n+1} \geq \tau_{2n}$, 由定理 2.1.9 得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_N - Y_0) &\geq (b-a)\mathbf{P}\{U_N^X[a, b]\} + \sum_{n=0}^{k-1} [\mathbf{P}(Y_{\tau_{2n+1} \wedge N}) - \mathbf{P}(Y_{\tau_{2n} \wedge N})] \\ &\geq (b-a)\mathbf{P}\{U_N^X[a, b]\}. \end{aligned}$$

此即为予证不等式. $\square$

杜布上穿不等式是证明鞅或下鞅收敛定理的基本工具.

定理 2.2.2 设 (X_n) 是下鞅且 $K := \sup_{n \geq 0} \mathbf{P}|X_n| < \infty$. 则 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, 其中 X 是一个可积随机变量. 另外若 (X_n) 是一致可积下鞅, 则 $X_n \xrightarrow{L^1} X$; 若 (X_n) 是一致可积鞅, 则还有 $X_n = \mathbf{P}(X|\mathcal{F}_n)$.

证明 设 X^* 和 X_* 分别是 $\{X_n\}$ 的上极限与下极限. 显然

$$\{X^* > X_*\} = \bigcup_{a < b \in \mathbb{Q}} \{X_* < a < b < X^*\}.$$

由上穿不等式

$$\mathbf{P}\{U_N^X[a, b]\} \leq \frac{1}{b-a} \mathbf{P}|X_N - a| \leq \frac{K + |a|}{b-a}.$$

由单调收敛定理 $\mathbf{P}\{\lim_{N \rightarrow \infty} U_N^X[a, b]\} < \infty$. 因此几乎必然 $\lim_{N \rightarrow \infty} U_N^X[a, b] < \infty$. 但是

$$\{X_* < a < b < X^*\} \subset \{\lim_{N \rightarrow \infty} U_N^X[a, b] = \infty\},$$

故 $\mathbf{P}\{X_* < a < b < X^*\} = 0$, 推出几乎必然 $X^* = X_*$. 所以极限 $X := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ 几乎必然存在. 由 Fatou 引理有

$$\mathbf{P}|X| = \mathbf{P}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} |X_n|\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}|X_n| \leq K < \infty,$$

故 X 可积. 如果 $\{X_n\}$ 是一致可积下鞅, 由控制收敛定理有 $X_n \xrightarrow{L^1} X$. 若 $\{X_n\}$ 是一致可积鞅, 则有 $X_n \xrightarrow{L^1} X$ 且对 $k \geq n$ 和 $A \in \mathcal{F}_n$ 有

$$\mathbf{P}(X_n 1_A) = \mathbf{P}[\mathbf{P}(X_k|\mathcal{F}_n) 1_A] = \mathbf{P}(X_k 1_A),$$

令 $k \rightarrow \infty$ 得 $\mathbf{P}(X_n 1_A) = \mathbf{P}(X 1_A)$. 因而 $\mathbf{P}(X|\mathcal{F}_n) = X_n$. $\square$

推论 2.2.3 设 (X_n) 是非负上鞅. 则 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, 其中 X 是一个可积随机变量.

证明 因为 (X_n) 是非负上鞅, 序列 $\mathbf{P}|X_n| = \mathbf{P}(X_n)$ 不增, 从而有界. 应用定理 3.2.2 于下鞅 $(-X_n)$ 即可. $\square$

推论 2.2.4 对任何可积随机变量 Y 和 σ 代数流 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $X_n := \mathbf{P}(Y|\mathcal{F}_n)$ 几乎必然且 L^1 收敛于 $X_\infty := \mathbf{P}(Y|\mathcal{F}_\infty)$, 其中 $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n)$.

证明 由命题 2.1.6 知杜布鞅 (X_n) 一致可积. 根据定理 2.2.2, 在几乎必然和 L^1 意义下, 极限 $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \in \mathcal{F}_\infty$ 存在且 $X_n = \mathbf{P}(X|\mathcal{F}_n)$. 这样

$$\mathbf{P}(X_\infty|\mathcal{F}_n) = \mathbf{P}[\mathbf{P}(Y|\mathcal{F}_\infty)|\mathcal{F}_n] = \mathbf{P}(Y|\mathcal{F}_n) = X_n = \mathbf{P}(X|\mathcal{F}_n).$$

故对于 $A \in \mathcal{F}_n$ 有

$$\mathbf{P}(X; A) = \mathbf{P}(X_n; A) = \mathbf{P}(X_\infty; A).$$

由单调类定理可知上式对任何 $A \in \mathcal{F}_\infty$ 也成立. 所以几乎必然地 $X = X_\infty$. $\square$

推论 2.2.5 设有给定的随机变量列 $(Y_n)_{n \geq 0}$ 和 σ 代数流 $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. 如果几乎必然地 $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y$ 且有可积随机变量 Z 使得 $|Y_n| \leq Z$, 那么 $X_n := \mathbf{P}(Y_n|\mathcal{F}_n)$ 几乎必然且 L^1 收敛于 $X_\infty := \mathbf{P}(Y|\mathcal{F}_\infty)$, 其中 $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n)$.

证明 令 $W_n = \sup_{k \geq n} |Y_k - Y|$. 则 $|W_n| \leq 2Z$ 且几乎必然地 $W_n \rightarrow 0$. 再由推论 2.2.4 有 $X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(Y|\mathcal{F}_n)$, 故对于任何 $m \geq 0$ 有

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |X_n - X_\infty| &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |X_n - \mathbf{P}(Y|\mathcal{F}_n)| = \limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{P}(Y_n - Y|\mathcal{F}_n)| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|Y_n - Y||\mathcal{F}_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(W_m|\mathcal{F}_n) = \mathbf{P}(W_m|\mathcal{F}_\infty). \end{aligned}$$

根据条件期望的控制收敛定理, 上式右端当 $m \rightarrow \infty$ 时趋于零. 所以结论中的几乎必然收敛成立. 另一方面, 由于

$$|X_n| \leq \mathbf{P}(|Y_n||\mathcal{F}_n) \leq \mathbf{P}(Z|\mathcal{F}_n),$$

且右边的随机变量列一致可积, 显然 (X_n) 一致可积, 故结论中的 L^1 收敛也成立. $\square$

定理 2.2.2 中下鞅的收敛形象地说是向右收敛. 接下来我们来证明下鞅的向左的收敛定理, 这样的收敛要容易的多.

定理 2.2.6 设 $X = (X_n)_{n \leq 0}$ 是关于流 $(\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ 的下鞅且 $\inf_n \mathbf{P}(X_n) > -\infty$. 则 X 是一致可积的. 而且当 $n \rightarrow -\infty$ 时, X_n 几乎必然且 L^1 收敛于一个可积随机变量 $X_{-\infty}$, 且对任何 n 有 $\mathbf{P}(X_n | \mathcal{F}_{-\infty}) \geq X_{-\infty}$, 其中 $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n=0}^{-\infty} \mathcal{F}_n$.

证明 对任何 $n \leq 0$ 有 $\mathbf{P}(X_{n-1}) \leq \mathbf{P}(X_n)$. 所以 $\inf_n \mathbf{P}(X_n) > -\infty$ 蕴含极限 $x := \lim_{n \rightarrow -\infty} \mathbf{P}(X_n)$ 单调递降地存在且有限. 对于 $\epsilon > 0$ 取 $k \leq 0$ 使 $\mathbf{P}(X_k) < x + \epsilon$. 对于 $n \leq k$ 我们有 $\mathbf{P}(X_n) \geq x > \mathbf{P}(X_k) - \epsilon$, 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X_n|; |X_n| > \lambda) &= \mathbf{P}(X_n; X_n > \lambda) - \mathbf{P}(X_n; X_n < -\lambda) \\ &= \mathbf{P}(X_n; X_n > \lambda) - \mathbf{P}(X_n) + \mathbf{P}(X_n; X_n \geq -\lambda) \\ &\leq \mathbf{P}[\mathbf{P}(X_k | \mathcal{F}_n); X_n > \lambda] - \mathbf{P}(X_n) + \mathbf{P}[\mathbf{P}(X_k | \mathcal{F}_n); X_n \geq -\lambda] \\ &\leq \mathbf{P}(X_k; X_n > \lambda) - \mathbf{P}(X_k) + \epsilon + \mathbf{P}(X_k; X_n \geq -\lambda) \\ &= \mathbf{P}(X_k; X_n > \lambda) - \mathbf{P}(X_k; X_n < -\lambda) + \epsilon \\ &\leq \mathbf{P}(|X_k|; |X_n| > \lambda) + \epsilon. \end{aligned}$$

取 $L \geq 1$ 充分大使得 $\mathbf{P}(|X_k|; |X_k| > L) < \epsilon$. 由上式

$$\mathbf{P}(|X_n|; |X_n| > \lambda) \leq \mathbf{P}(|X_k|; |X_k| \leq L, |X_n| > \lambda) + 2\epsilon \leq L\mathbf{P}(|X_n| > \lambda) + 2\epsilon.$$

另外, 由 Chebyshev 不等式,

$$\mathbf{P}(|X_n| > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbf{P}|X_n| = \frac{1}{\lambda} [2\mathbf{P}(X_n^+) - \mathbf{P}(X_n)] \leq \frac{1}{\lambda} [2\mathbf{P}(X_0^+) - x],$$

其中最后的不等号是由于 $x \leq \mathbf{P}(X_n)$ 而 $X = (X_n^+)_{n \leq 0}$ 也是下鞅. 由上述两个不等式得

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{n \leq k} \mathbf{P}(|X_n|; |X_n| > \lambda) \leq 2\epsilon.$$

另外, 不难取常数 $N \geq 1$ 使当 $\lambda \geq N$ 时

$$\sup_{k \leq n \leq 0} \mathbf{P}(|X_n|; |X_n| > \lambda) \leq 2\epsilon.$$

综合以上二式得

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{n \leq 0} \mathbf{P}(|X_n|; |X_n| > \lambda) \leq 2\epsilon.$$

由 $\epsilon > 0$ 的任意性即知 $(X_n)_{n \leq 0}$ 一致可积, 故第一个断言得证. 类似于定理 2.2.2 的证明. 设 X^* 和 X_* 分别是 X_n 当 $n \rightarrow -\infty$ 时的上极限与下极限. 显然

$$\{X_* < X^*\} = \bigcup_{a < b \in \mathbb{Q}} \{X_* < a < b < X^*\}.$$

对非负整数 N , 用 $V_N^X[a, b]$ 表示下鞅 $\{X_{-N}, X_{-N+1}, \dots, X_0\}$ 对区间 $[a, b]$ 的上穿次数. 则

$$\mathbf{P}\{V_N^X[a, b]\} \leq \frac{1}{b-a} \mathbf{P}|X_0 - a| < \infty.$$

由单调收敛定理有 $\mathbf{P}\{\lim_{N \rightarrow -\infty} V_N^X[a, b]\} < \infty$. 但是

$$\{X_* < a < b < X^*\} \subset \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} V_N^X[a, b] = \infty \right\},$$

故 $\mathbf{P}(\{X_* < a < b < X^*\}) = 0$. 推出几乎必然 $X_* = X^*$. 所以极限 $X_{-\infty} := \lim_{n \rightarrow -\infty} X_n$ 几乎必然存在. 显然 $X_{-\infty}$ 关于 $\mathcal{F}_{-\infty}$ 可测. 再由 $\{X_n : n \leq 0\}$ 的一致可积性知 $X_{-\infty}$ 可积且 $X_n \xrightarrow{L^1} X_{-\infty}$. 另外对任何 $m < n \leq 0$ 和 $A \in \mathcal{F}_{-\infty} \subset \mathcal{F}_m$ 有

$$\mathbf{P}\{\mathbf{P}(X_n | \mathcal{F}_{-\infty})1_A\} = \mathbf{P}(X_n 1_A) = \mathbf{P}\{\mathbf{P}(X_n | \mathcal{F}_m)1_A\} \geq \mathbf{P}(X_m 1_A).$$

令 $m \rightarrow -\infty$ 得 $\mathbf{P}\{\mathbf{P}(X_n | \mathcal{F}_{-\infty})1_A\} \geq \mathbf{P}(X_{-\infty} 1_A)$. 因此 $\mathbf{P}(X_n | \mathcal{F}_{-\infty}) \geq X_{-\infty}$. $\square$

推论 2.2.7 设有给定的随机变量列 $(Y_n)_{n \leq 0}$ 和 σ 代数流 $(\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$. 如果几乎必然地 $\lim_{n \rightarrow -\infty} Y_n = Y$ 且有可积随机变量 Z 使得 $|Y_n| \leq Z$, 那么 $X_n := \mathbf{P}(Y_n | \mathcal{F}_n)$ 几乎必然且 L^1 收敛于 $X_{-\infty} := \mathbf{P}(Y | \mathcal{F}_{-\infty})$, 其中 $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_n \mathcal{F}_n$.

上面推论的证明与推论 2.2.5 类似 (作业). 作为鞅收敛定理的应用, 我们可以给出科尔莫戈罗夫强大数定律的一个简单证明. 为此先证明一个引理.

引理 2.2.8 设 X 是可积随机变量, $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 为 σ 代数. 若 $\mathcal{G}$ 独立于 X 和 $\mathcal{F}$ 生成的 σ 代数, 则 $\mathbf{P}(X | \mathcal{F}) = \mathbf{P}[X | \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})]$.

证明 对于 $A \in \mathcal{F}$ 和 $B \in \mathcal{G}$, 由于 $\mathcal{G}$ 独立于 X 和 $\mathcal{F}$ 生成的 σ 代数, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[\mathbf{P}(X | \mathcal{F}); A \cap B] &= \mathbf{P}[\mathbf{P}(X 1_A | \mathcal{F}) 1_B] = \mathbf{P}[\mathbf{P}(X 1_A | \mathcal{F})] \mathbf{P}(1_B) \\ &= \mathbf{P}(X 1_A) \mathbf{P}(1_B) = \mathbf{P}(X 1_{A \cap B}) = \mathbf{P}(X; A \cap B). \end{aligned}$$

利用单调类定理知对 $C \in \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ 有 $\mathbf{P}[\mathbf{P}(X | \mathcal{F}); C] = \mathbf{P}(X; C)$, 故得予证结果. $\square$

定理 2.2.9 设 $\{\xi_n\}$ 是独立同分布可积随机变量序列. 则

$$\frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)$$

几乎必然且 L^1 收敛于 $\mathbf{P}(\xi_1)$.

证明 令 $X_{-n} = (\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n)$ 和 $\mathcal{F}_{-n} = \sigma(X_k : k \leq -n)$. 因为 $\{\xi_n\}$ 独立同分布, 对于任何 $1 \leq i \leq j \leq n$ 及有界可测实函数 f 有

$$\mathbf{E}[\xi_i f(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n)] = \mathbf{E}[\xi_j f(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n)],$$

故 $\mathbf{E}[\xi_i | X_{-n}] = \mathbf{E}[\xi_j | X_{-n}]$. 由此和引理 2.2.8 推知

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} X_{-n} &= \frac{1}{n} \mathbf{E}[X_{-n} | X_{-n}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}[\xi_i | X_{-n}] = \mathbf{E}[\xi_1 | X_{-n}] \\ &= \mathbf{E}[\xi_1 | X_{-n}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots] = \mathbf{E}[\xi_1 | \mathcal{F}_{-n}]. \end{aligned}$$

所以 $(n^{-1}X_{-n})$ 关于 $(\mathcal{F}_{-n})$ 是鞅. 由上面的定理 2.2.6 推出 $n^{-1}X_{-n}$ 几乎必然且 L^1 收敛于一个可积随机变量 X . 不妨设 $\mathbf{P}(\xi_1) = 0$, 则有 $\mathbf{P}(X) = 0$. 用 ϕ 表示 ξ_1 的特征函数. 那么 ϕ 在零点可微且 $\phi'(0) = 0$. 因此

$$\mathbf{P}(e^{itX}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}e^{itX_{-n}/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t/n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\{n[\phi(t/n) - 1]\} = 1,$$

故几乎必然 $X = 0$. $\square$

§2.3 下鞅的正则化

本节中我们研究连续时间鞅或下鞅的轨道的正则性. 设 $I = [0, \infty)$, 而 D 是 $[0, \infty)$ 的一个可数稠子集. 考虑完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 和此概率空间上的加强流 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. 后面的很多结果都是在几乎必然意义下叙述的. 根据命题 1.4.4, 两个互为修正的过程关于该流的适应性等价, 这为正则化讨论提供了很大便利. 对 $K > 0$, 令 $D_K = [0, K] \cap (D \cup \{0, K\})$, 即 D_K 是包含 0 和 K 及它们之间的 D 中的点的全体.

现在设 $X = (X_t : t \geq 0)$ 是一个 $(\mathcal{F}_t)$ 下鞅, 并取 $F := \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = K\} \subset D_K$. 对 $0 \leq n \leq N$, 令 $Y_n = X_{t_n}$ 和 $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{t_n}$. 显然 $Y = (Y_n : 0 \leq n \leq N)$ 相对于流 $(\mathcal{G}_n : 0 \leq n \leq N)$ 是一个下鞅. 由杜布的不等式得

$$\lambda \mathbf{P}\left(\max_{0 \leq n \leq N} |Y_n| > \lambda\right) \leq 2\mathbf{P}(Y_N^+) - \mathbf{P}(Y_0) = 2\mathbf{P}(X_K^+) - \mathbf{P}(X_0),$$

和

$$\mathbf{P}\{U_N^Y[a, b]\} \leq \frac{1}{b-a} \mathbf{P}[(Y_N - a)^+] = \frac{1}{b-a} \mathbf{P}[(X_K - a)^+],$$

其中 $\lambda > 0$, $a < b$. 实际上, $U_N^X[a, b]$ 是 X 限制在 F 上对 $[a, b]$ 的上穿次数, 我们记其为 $U_F^X[a, b]$. 再令

$$U_{D_K}^X[a, b] = \sup\{U_F^X[a, b] : F \subset D_K \text{ 为有限集合}\},$$

它是 X 限制在 D_K 上对区间 $[a, b]$ 的上穿次数. 因为 D_K 可数, 故其有限子集全体是可数的, 因此 $U_{D_K}^X[a, b]$ 是一个非负随机变量. 由上面的不等式和 Fatou 引理容易推出

$$\lambda \mathbf{P}\left(\sup_{t \in D_K} |X_t| > \lambda\right) \leq 2\mathbf{P}(X_K^+) - \mathbf{P}(X_0), \quad (2.3.1)$$

和

$$\mathbf{P}\{U_{D_K}^X[a, b]\} \leq \frac{1}{b-a} \mathbf{P}[(X_K - a)^+]. \quad (2.3.2)$$

下面是连续时间下鞅正则化的第一个基本定理.

定理 2.3.1 设 $X = (X_t : t \geq 0)$ 是一个 $(\mathcal{F}_t)$ 下鞅, 而 D 是 $[0, \infty)$ 的一个可数稠子集. 那么

- (1) 对几乎所有的 $\omega \in \Omega$, 映射 $t \mapsto X_t(\omega)$ 对任何 $K > 0$ 在 D_K 上有界且存在极限 ($s_n \uparrow t$ 表示 $s_n < t$ 且 $s_n \uparrow t$; 符号 $\downarrow$ 的含义类似):

$$X_{t+}^D(\omega) := \lim_{s \in D, s \downarrow t} X_s(\omega) \quad (t \geq 0), \quad X_{t-}^D(\omega) := \lim_{s \in D, s \uparrow t} X_s(\omega) \quad (t > 0). \quad (2.3.3)$$

这里 $X_+^D = (X_{t+}^D : t \geq 0)$ 左极右连, 而 $X_-^D = (X_{t-}^D : t > 0)$ 左连右极.

- (2) 对每个 $t \geq 0$ 随机变量 X_{t+}^D 可积且 $X_t \leq \mathbf{P}(X_{t+}^D | \mathcal{F}_t)$. 若 $t \mapsto \mathbf{P}(X_t)$ 右连续, 则 $X_t = \mathbf{P}(X_{t+}^D | \mathcal{F}_t)$.

- (3) 过程 $X_+^D = (X_{t+}^D : t \geq 0)$ 是 $(\mathcal{F}_{t+})$ 下鞅; 且当 X 是 $(\mathcal{F}_t)$ 鞅时, X_+^D 是 $(\mathcal{F}_{t+})$ 鞅.

证明 (1) 记 N_0 为 Ω 中使得映射 $t \mapsto X_t(\omega)$ 在某个 D_K 上无界或在某个点 $t \geq 0$ 处 (2.3.3) 中右或左极限不存在的 ω 全体. 容易验证

$$N_0 \subset \bigcup_{K \geq 1} \left(\left\{ \sup_{t \in D_K} |X_t| = \infty \right\} \cup N_K \right), \quad (2.3.4)$$

其中

$$N_K = \bigcup_{a, b \in \mathbb{Q}, a < b} \{U_{D_K}^X[a, b] = \infty\}.$$

对任何整数 $K \geq 1$ 及 $a < b$, 由 (2.3.1) 有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{ \sup_{t \in D_K} |X_t| = \infty \right\} &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{ \sup_{t \in D_K} |X_t| > \lambda \right\} \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} [2\mathbf{P}(X_K^+) - \mathbf{P}(X_0)] = 0, \end{aligned}$$

而由 (2.3.2) 有

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{U_{D_K}^X[a, b] = \infty\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{U_{D_K}^X[a, b] \geq N\} \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{P}\{U_{D_K}^X[a, b]\} \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(b-a)} \mathbf{P}[(X_K - a)^+] = 0.\end{aligned}$$

所以 (2.3.4) 式右端的事件的概率为零. 再由 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 的完备性假定, 有 $N_0 \in \mathcal{F}$ 且 $\mathbf{P}(N_0) = 0$.

(2) 对任何 $t \geq 0$, 取序列 $\{s_0, s_1, \dots\} \subset D$ 满足 $s_n \downarrow t$. 对 $n \leq 0$ 令 $Y_n = X_{s_{-n}}$ 和 $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{s_{-n}}$. 则 $Y = (Y_n : n \leq 0)$ 是关于 $(\mathcal{G}_n : n \leq 0)$ 的下鞅, 且

$$\mathbf{P}(Y_n) = \mathbf{P}(X_{s_{-n}}) \geq \mathbf{P}(X_t).$$

由定理 2.2.6 知 Y 一致可积, 而且当 $n \rightarrow -\infty$ 时, $Y_n = X_{s_{-n}}$ 几乎必然且 L^1 收敛于 X_{t+}^D . 特别地, X_{t+}^D 可积. 又因为 $X_t \leq \mathbf{P}(X_{s_{-n}} | \mathcal{F}_t)$, 对于任何 $A \in \mathcal{F}_t$ 有 $\mathbf{P}(X_t; A) \leq \mathbf{P}(X_{s_{-n}}; A)$. 由 L^1 收敛性推出

$$\mathbf{P}(X_t; A) \leq \mathbf{P}(X_{t+}^D; A) = \mathbf{P}[\mathbf{P}(X_{t+}^D | \mathcal{F}_t); A],$$

所以 $X_t \leq \mathbf{P}(X_{t+}^D | \mathcal{F}_t)$. 若 $t \mapsto \mathbf{P}(X_t)$ 右连续, 则

$$\mathbf{P}(X_t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_{s_n}) = \mathbf{P}(X_{t+}^D) = \mathbf{P}[\mathbf{P}(X_{t+}^D | \mathcal{F}_t)].$$

从而 $X_t = \mathbf{P}(X_{t+}^D | \mathcal{F}_t)$.

(3) 首先由于 $(\mathcal{F}_{t+})$ 是加强流, 易知 X_+^D 是 $(\mathcal{F}_{t+})$ 适应的可积过程. 另外对 $t > s \geq 0$, 令 $s_0 = t$ 并取 $\{s_1, s_2, \dots\} \subset D$ 使 $s_0 > s_n \downarrow s$. 对于 (X_{s_n}) 应用定理 2.2.6 得到

$$X_{s+}^D = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{s_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_{s_0} | \mathcal{F}_{s_n}) = \mathbf{P}(X_{s_0} | \cap_{n \geq 0} \mathcal{F}_{s_n}) = \mathbf{P}(X_t | \mathcal{F}_{s+}).$$

再取 $\{t_n\} \subset D$ 满足 $t_n \downarrow t$. 对于任何 $A \in \mathcal{F}_{s+}$, 由上式有

$$\mathbf{P}(X_{s+}^D; A) \leq \mathbf{P}[\mathbf{P}(X_{t_n} | \mathcal{F}_{s+}); A] = \mathbf{P}(X_{t_n}; A).$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由 L^1 收敛得

$$\mathbf{P}(X_{s+}^D; A) \leq \mathbf{P}(X_{t+}^D; A) = \mathbf{P}[\mathbf{P}(X_{t+}^D | \mathcal{F}_{s+}); A],$$

从而 $X_{s+}^D \leq \mathbf{P}(X_{t+}^D | \mathcal{F}_{s+})$, 即 X_+^D 是关于 $(\mathcal{F}_{t+})$ 的下鞅. 若 X 是鞅, 则 $\mathbf{P}(X_t)$ 是常数, 那么 $\mathbf{P}(X_{t+}^D)$ 也是常数, 因此 X_+^D 是鞅. $\square$

注意, 上面右极限过程 X_+^D 的定义与可数稠集 D 有关, 但不难证明由两个不同可数稠集所定义的权利过程是不可区分的 (作业).

定理 2.3.2 (1) 若 X 是随机右连续的 $(\mathcal{F}_t)$ 下鞅, 则它有左极右连的 $(\mathcal{F}_{t+})$ 下鞅修正; (2) 若 X 是右连续的 $(\mathcal{F}_t)$ 下鞅, 则它是几乎必然左极右连的 $(\mathcal{F}_{t+})$ 下鞅.

证明 取 $[0, \infty)$ 的一个可数稠子集 D , 并定义过程 X_+^D . 由定理 2.3.1 知 X_+^D 为左极右连的 $(\mathcal{F}_{t+})$ 下鞅. 若 X 随机右连续, 则 X_+^D 是 X 的一个修正. 若假定 X 右连续, 则 X_+^D 与 X 不可区分, 因而 X 是几乎必然左极右连的 $(\mathcal{F}_{t+})$ 下鞅. $\square$

定理 2.3.3 设流 $(\mathcal{F}_t)$ 满足通常条件. 如果下鞅 X 的均值 $t \mapsto \mathbf{P}(X_t)$ 是右连续的, 那么 X 有左极右连的修正. 特别地, 在通常条件下, 鞅总有左极右连的修正.

证明 取 $[0, \infty)$ 的一个可数稠子集 D , 并定义过程 X_+^D . 由定理 2.3.1(1) 知 X_+^D 左极右连. 由定理 2.3.1(2) 有

$$X_t = \mathbf{P}(X_{t+}^D | \mathcal{F}_t) = \mathbf{P}(X_{t+}^D | \mathcal{F}_{t+}) = X_{t+}^D, \quad t \geq 0.$$

故 X_+^D 是 X 的修正. $\square$

由上述两个定理, 我们说到右连续下鞅时, 总可以假设对应的流满足通常条件. 另一方面, 如果流满足通常条件, 我们总可以假设鞅是左极右连的. 下面的定理是杜布有界停止定理的连续时间版本.

定理 2.3.4 设 X 是右连续 $(\mathcal{F}_t)$ 下鞅, τ 和 σ 是有界停时且 $\sigma \leq \tau$, 则 X_σ 和 X_τ 是可积的且

$$X_\sigma \leq \mathbf{P}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma). \quad (2.3.5)$$

证明 对 $n \geq 0$ 令 $D_n = \{i/2^n : i = 0, 1, 2, \dots\}$ 及 $\sigma_n = \inf\{t \in D_n : t > \sigma\}$. 注意 $D_n \subset D_{n+1}$ 且单调下降地 $\sigma_n \rightarrow \sigma$. 所以 σ_n 与 σ_{n+1} 是值域为 D_{n+1} 的关于流 $(\mathcal{F}_t : t \in D_{n+1})$ 的有界停时. 应用离散时间杜布有界停止定理于 $(\mathcal{F}_t : t \in D_{n+1})$ 下鞅 $(X_t : t \in D_{n+1})$ 知 X_{σ_n} 与 $X_{\sigma_{n+1}}$ 是可积的且

$$X_{\sigma_{n+1}} \leq \mathbf{P}(X_{\sigma_n} | \mathcal{F}_{\sigma_{n+1}}).$$

对 $k \leq 0$, 令 $Y_k = X_{\sigma_{-k}}$ 和 $\mathcal{G}_k = \mathcal{F}_{\sigma_{-k}}$. 上式说明 $(Y_k : k \leq 0)$ 是关于 $(\mathcal{G}_k : k \leq 0)$ 的下鞅. 对任何 $k \leq 0$ 我们有 $\mathbf{P}(Y_k) = \mathbf{P}(X_{\sigma_{-k}}) \geq \mathbf{P}(X_0)$. 因为 X 右连续, 由定理 2.1.14 知 X_{σ_n} 几乎必然且 L^1 收敛于 $X_\sigma = X_{\sigma+}$. 再定义 $\tau_n = \inf\{t \in D_n : t > \tau\}$. 与上面类似地可知 X_{τ_n} 几乎必然且 L^1 收敛于 $X_\tau = X_{\tau+}$. 由于 $\tau_n \geq \sigma_n$, 应用离散时间杜布停止定理得 $X_{\sigma_n} \leq \mathbf{P}(X_{\tau_n} | \mathcal{F}_{\sigma_n})$. 所以, 对任何 $A \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_n}$ 有

$$\mathbf{P}(X_{\sigma_n}; A) \leq \mathbf{P}[\mathbf{P}(X_{\tau_n} | \mathcal{F}_{\sigma_n}); A] = \mathbf{P}(X_{\tau_n}; A).$$

由 L^1 收敛性得 $\mathbf{P}(X_\sigma; A) \leq \mathbf{P}(X_\tau; A)$, 此蕴含予证者. $\square$

推论 2.3.5 关于 $(\mathcal{F}_t)$ 适应的右连续可积过程 X 是鞅当且仅当对任何有界停时 $\sigma \leq \tau$ 有 $\mathbf{P}(X_\sigma) = \mathbf{P}(X_\tau)$, 或等价地对任何有界停时 τ 有 $\mathbf{P}(X_\tau) = \mathbf{P}(X_0)$.

推论 2.3.6 设 τ 是停时, X 是 $(\mathcal{F}_t)$ 右连续下鞅(或鞅), 则 X 的 τ 停止过程 $X^\tau = (X_{t \wedge \tau} : t \geq 0)$ 也是关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的下鞅(或鞅).

证明 只考虑下鞅的情况. 因 $t \wedge \tau$ 是有界停时, 由命题 1.3.8 和命题 1.3.12 知 X^τ 是 $(\mathcal{F}_t)$ 适应过程. 再由定理 2.3.4 知 X^τ 可积. 此外, 对 $t > s$, 应用命题 1.3.11 和定理 2.3.4 有

$$\mathbf{P}(X_{t \wedge \tau} | \mathcal{F}_s) = \mathbf{P}(X_{t \wedge \tau} | \mathcal{F}_{t \wedge \tau \wedge s}) = \mathbf{P}(X_{t \wedge \tau} | \mathcal{F}_{s \wedge \tau}) \geq X_{s \wedge \tau}.$$

故 X^τ 也是下鞅. $\square$

下面定理的结论类似于定理 2.1.12, 说明一个右连续非负上鞅在到达零点后, 会永远停留在零点.

定理 2.3.7 设 X 是非负右连续上鞅. 令 $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \text{ 或 } X_{t-} = 0\}$. 则对任何 $t \geq 0$ 有 $\mathbf{P}\{X_t > 0, \tau < t\} = 0$.

证明 定义停时 $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : X_t < 1/n\}$. 当 $\tau_n < \infty$ 时, 显然 $X_{\tau_n} \leq 1/n$. 由定理 2.3.4 有 $\mathbf{P}(X_t | \mathcal{F}_{t \wedge \tau_n}) \leq X_{t \wedge \tau_n}$. 注意 $\tau_n \leq \tau$ 且 $\{\tau_n < t\} = \{t \wedge \tau_n < t\} \in \mathcal{F}_{t \wedge \tau_n}$. 利用 X 的非负性和上鞅性,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_t; \tau < t) &\leq \mathbf{P}(X_t; \tau_n < t) = \mathbf{P}[\mathbf{P}(X_t | \mathcal{F}_{t \wedge \tau_n}); \tau_n < t] \\ &\leq \mathbf{P}(X_{t \wedge \tau_n}; \tau_n < t) = \mathbf{P}(X_{\tau_n}; \tau_n < t) \leq 1/n. \end{aligned}$$

由 $n \geq 1$ 的任意性, 有 $\mathbf{P}(X_t; \tau < t) = 0$, 故得定理结论. $\square$

利用 Fatou 引理并对时间集进行可数稠子集逼近, 可以将杜布不等式推广到右连续下鞅的情况 (作业):

定理 2.3.8 设 $X = (X_t : t \geq 0)$ 是右连续下鞅. 则有下面性质成立:

(1) 对任何 $\lambda > 0$ 及 $t \geq 0$ 有

$$\lambda \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s| \geq \lambda\right\} \leq 2\mathbf{P}(X_t^+) - \mathbf{P}(X_0);$$

(2) 若 X 是非负的, 则对任何 $p > 1$ 及 $t \geq 0$ 有

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} X_s^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{P}(X_t^p).$$

(3) 若 X 是鞅, 则对任何 $t \geq 0$ 有

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} X_s^2\right) \leq 4\mathbf{P}(X_t^2).$$

另外, 关于鞅序列的收敛定理也可推广到连续时间的情况, 证明与离散时间的情况完全类似. 例如, 我们有 (作业):

定理 2.3.9 假设流 $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ 满足通常条件, 而 $(X_t : t \geq 0)$ 是下鞅且 $K := \sup_{t \geq 0} \mathbf{P}|X_t| < \infty$. 则 $X_t \xrightarrow{\text{a.s.}} X (t \rightarrow \infty)$, 其中 X 是一个可积随机变量. 另外若 (X_t) 是一致可积下鞅, 则 $X_t \xrightarrow{L^1} X$; 若 (X_t) 是一致可积鞅, 则还有 $X_t = \mathbf{P}(X|\mathcal{F}_t)$.

给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 和它上的流 $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$, 我们用 $\mathcal{O}$ 表示定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上的全体左极右连实值 $(\mathcal{F}_t)$ 适应过程所生成的乘积空间 $I \times \Omega$ 上的最小 σ 代数, 称之为可选 σ 代数. 用 $\mathcal{D}$ 表示定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上的全体左连右极实值 $(\mathcal{F}_t)$ 适应过程所生成的乘积空间 $I \times \Omega$ 上的最小 σ 代数, 称之为可料 σ 代数. 这两个 σ 代数都依赖于流 $(\mathcal{F}_t)$. 若随机过程 X 关于 $\mathcal{O}$ 可测, 则称之为可选的. 若 X 关于 $\mathcal{D}$ 可测, 则称之为可料的.

可料过程一定是可选的, 这是因为任何左连右极适应过程 $\{X(t) : t \geq 0\}$ 都可用连续适应过程列 $\{X_n(t) : t \geq 0\}$, $n = 1, 2, \dots$ 来逼近. 例如, 可以令

$$X_n(t) = n \int_{t-1/n}^t X(s \vee 0) ds.$$

这说明, $\mathcal{D}$ 也可由定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上的全体连续实值 $(\mathcal{F}_t)$ 适应过程所生成. 利用上面定理 1.3.1 和单调类定理还可以证明: 可选过程是循序可测的 (作业).

有了可选过程的概念, 我们可以来叙述随机过程一般理论中的一个非常重要的定理. 对它的证明感兴趣的读者可参见 [7, p.109].

定理 2.3.10 假定带流的概率空间满足通常条件. 设 Z 是实值有界可选过程. 如果对任何递减有界停时列 $\{\tau_n\}$ 都有 $\lim_n \mathbf{P}[Z_{\tau_n}] = \mathbf{P}[Z_{\lim_n \tau_n}]$, 那么 Z 几乎必然右连续.

第三章 马尔可夫过程

在本章中, 我们讨论马氏过程的基本性质, 主要是与马氏性, 强马氏性和转移半群有关的性质. 另外还要介绍博雷尔右马氏过程的概念. 有关一般马氏过程的更为深入的讨论, 可参见 [5, 8, 11, 19, 20] 等等.

§3.1 马氏性的定义

设 I 是时间集, 通常它可以为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{Z}$ 中的任何区间. 如无特别声明, 在本章中我们假定 $I = \mathbb{Z}_+$ 或 $\mathbb{R}_+$. 设 $(X_t : t \in I)$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ 上, 以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间, 且关于流 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 适应的随机过程. 我们称 (X_t) 相对于流 $(\mathcal{G}_t)$ 是马氏(马尔可夫, Markov) 的或具有马氏性, 如果对任何 $s < t \in I$ 及 $B \in \mathcal{E}$ 都有

$$\mathbf{P}(X_t \in B | \mathcal{G}_s) = \mathbf{P}(X_t \in B | X_s). \quad (3.1.1)$$

为了强调有时也称 $\mathcal{E}$ 马氏的或 $\mathcal{E}$ 马氏性. 它可直观地解释为: 在已知某时刻 $s \in I$ 之前的全部信息 $\mathcal{G}_s$ 的条件下, 过程在将来时刻 $t \in I$ 的取值只依赖于 X_s , 而与过程在更早的行为无关. 笼统地讲, 具有马氏性的随机过程称为马氏过程. 显然, 若 $(X_t : t \in I)$ 相对于流 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 具有 $\mathcal{E}$ 马氏性, 则对任何 $s \in I$ 过程 $(X_{s+t} : t \in I)$ 相对于流 $(\mathcal{G}_{s+t} : t \in I)$ 也具有 $\mathcal{E}$ 马氏性. 对于 $t \in I$ 定义自然 σ 代数 $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(\{X_s : s \in I, s \leq t\})$ 和 $\mathcal{F}^t = \sigma(\{X_s : s \in I, s \geq t\})$.

特别地, 当 E 是可数集时, $\mathcal{E}$ 为 E 的所有子集构成的 σ 代数时, 以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间的马氏过程就是马氏链.

定理 3.1.1 设 $(X_t : t \in I)$ 是以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间且适应于流 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 的过程. 那么 (X_t) 相对于 $(\mathcal{G}_t)$ 具有 $\mathcal{E}$ 马氏性当且仅当对任意的 $s \leq t \in I$ 和 $f \in \text{b}\mathcal{E}$ 有

$$\mathbf{P}[f(X_t) | \mathcal{G}_s] = \mathbf{P}[f(X_t) | X_s]. \quad (3.1.2)$$

证明 若 (3.1.2) 成立, 取 f 为 $B \in \mathcal{E}$ 的示性函数即得 (3.1.1). 反之, 假若 (3.1.1) 成立, 则 (3.1.2) 对于 $B \in \mathcal{E}$ 的示性函数成立. 由条件期望的线性性知 (3.1.2) 对简单函数 $f \in \text{b}\mathcal{E}$ 成立. 利用条件期望的控制收敛定理可证明 (3.1.2) 对一般的 $f \in \text{b}\mathcal{E}$ 也成立. $\square$

命题 3.1.2 设 $(X_t : t \in I)$ 是以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间且适应于流 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 的过程. 那么 (X_t) 相对于 $(\mathcal{G}_t)$ 具有 $\mathcal{E}$ 马氏性当且仅当对任意的 $s \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \in I$ 和 $f_1, \cdots, f_n \in \text{b}\mathcal{E}$ 有

$$\mathbf{P}[f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) | \mathcal{G}_s] = \mathbf{P}[f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) | X_s]. \quad (3.1.3)$$

证明 如果 (3.1.3) 成立, 取 $n = 1$ 知 (3.1.2) 成立, 从而过程 (X_t) 相对于流 $(\mathcal{G}_t)$ 具有马氏性. 反之, 假设 (X_t) 相对于流 $(\mathcal{G}_t)$ 具有马氏性. 由定理 3.1.1 知 (3.1.2) 成立, 即 (3.1.3) 对于 $n = 1$ 成立. 现在假设 (3.1.3) 对于某个 $n \geq 1$ 成立. 由 (3.1.2) 及测度论中的结论, 对任意的 $t_{n+1} \geq t_n \in I$ 和 $f_{n+1} \in \mathbf{b}\mathcal{E}$, 存在 $g \in \mathbf{b}\mathcal{E}$ 使得

$$\mathbf{P}[f_{n+1}(X_{t_{n+1}})|\mathcal{G}_{t_n}] = \mathbf{P}[f_{n+1}(X_{t_{n+1}})|X_{t_n}] = g(X_{t_n}).$$

所以

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}[f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) f_{n+1}(X_{t_{n+1}})|\mathcal{G}_s] \\ &= \mathbf{P}\{\mathbf{P}[f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) f_{n+1}(X_{t_{n+1}})|\mathcal{G}_{t_n}]\mathcal{G}_s\} \\ &= \mathbf{P}\{f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) \mathbf{P}[f_{n+1}(X_{t_{n+1}})|\mathcal{G}_{t_n}]\mathcal{G}_s\} \\ &= \mathbf{P}[f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) g(X_{t_n})|\mathcal{G}_s] \\ &= \mathbf{P}[f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) g(X_{t_n})|X_s] \\ &= \mathbf{P}\{f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) \mathbf{P}[f_{n+1}(X_{t_{n+1}})|\mathcal{G}_{t_n}]\mathcal{G}_s\} \\ &= \mathbf{P}\{\mathbf{P}[f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) f_{n+1}(X_{t_{n+1}})|\mathcal{G}_{t_n}]\mathcal{G}_s\} \\ &= \mathbf{P}[f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) f_{n+1}(X_{t_{n+1}})|X_s]. \end{aligned}$$

由数学归纳法知 (3.1.3) 对于所有 $n \geq 1$ 成立. $\square$

定理 3.1.3 设 $(X_t : t \in I)$ 是以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间且适应于流 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 的过程. 那么 (X_t) 相对于 $(\mathcal{G}_t)$ 具有马氏性当且仅当对任意的 $s \in I$ 和 $F \in \mathbf{b}\mathcal{F}^s$ 有

$$\mathbf{P}(F|\mathcal{G}_s) = \mathbf{P}(F|X_s). \quad (3.1.4)$$

证明 若 (3.1.4) 对任何 $s \in I$ 及 $F \in \mathbf{b}\mathcal{F}^s$ 成立, 只需令 $F = f(X_t)$ 即知 (3.1.2) 成立, 故 (X_t) 相对于 $(\mathcal{G}_t)$ 具有马氏性. 反之, 假设 (X_t) 相对于 $(\mathcal{G}_t)$ 具有马氏性. 固定 $s \in I$. 令 $\mathcal{C}$ 为所有形如 $f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n})$ 的随机变量构成的集合, 其中 $s \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \in I$ 且 $f_1, \dots, f_n \in \mathbf{b}\mathcal{E}$. 不难看出 $\mathcal{C}$ 对于乘积运算封闭且 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}^s$. 令 $\mathcal{L}$ 为使 (3.1.4) 成立的所有随机变量 $F \in \mathbf{b}\mathcal{F}^s$ 构成的集类. 则 $\mathcal{L}$ 为线性空间, 包含所有常值函数, 且对非负有界上升极限封闭. 由命题 3.1.2 知 $\mathcal{L} \supset \mathcal{C}$. 根据函数形式的单调类定理, 有 $\mathcal{L} \supset \mathbf{b}\sigma(\mathcal{C}) = \mathbf{b}\mathcal{F}^s$, 即 (3.1.4) 对任何 $s \in I$ 和 $F \in \mathbf{b}\mathcal{F}^s$ 成立. $\square$

推论 3.1.4 设 $(X_t : t \in I)$ 是以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间且适应于流 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 的过程. 那么 (X_t) 相对于 $(\mathcal{G}_t)$ 具有马氏性当且仅当对任意的 $s \in I$, $G \in \mathbf{b}\mathcal{G}_s$ 和 $F \in \mathbf{b}\mathcal{F}^s$ 有

$$\mathbf{P}(GF|X_s) = \mathbf{P}(G|X_s)\mathbf{P}(F|X_s). \quad (3.1.5)$$

证明 假设 (X_t) 相对于 $(\mathcal{G}_t)$ 具有马氏性. 由定理 3.1.3 知 (3.1.4) 成立. 所以

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(GF|X_s) &= \mathbf{P}[\mathbf{P}(GF|\mathcal{G}_s)|X_s] = \mathbf{P}[\mathbf{P}(F|\mathcal{G}_s)|X_s] \\ &= \mathbf{P}[\mathbf{P}(F|X_s)|X_s] = \mathbf{P}(F|X_s),\end{aligned}$$

即 (3.1.5) 成立. 反之, 若 (3.1.5) 成立, 则

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(GF) &= \mathbf{P}[\mathbf{P}(GF|X_s)] = \mathbf{P}[\mathbf{P}(G|X_s)\mathbf{P}(F|X_s)] \\ &= \mathbf{P}\{\mathbf{P}[\mathbf{P}(F|X_s)|X_s]\} = \mathbf{P}[\mathbf{P}(F|X_s)],\end{aligned}$$

由 G 的任意性即知 (3.1.4) 成立, 从而 (X_t) 相对于 $(\mathcal{G}_t)$ 具有马氏性. $\square$

如果 (X_t) 具有相对适应流 $(\mathcal{G}_t)$ 的马氏性, 它相对于自然流 $(\mathcal{F}_t^0)$ 也一定有 $\mathcal{E}$ 马氏性. 这可对 (3.1.1) 或 (3.1.2) 取关于 $\mathcal{F}_s^0$ 的条件期望看出. 以后如不给出流, 只说 X 有马氏性, 则指 X 关于其自然流有此性质, 即对任何 $s < t \in I$ 及 $B \in \mathcal{E}$ 都有

$$\mathbf{P}(X_t \in B | \mathcal{F}_s^0) = \mathbf{P}(X_t \in B | X_s). \quad (3.1.6)$$

命题 3.1.5 以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间的过程 $(X_t : t \in I)$ 具有马氏性的充分必要条件是对任意的 $\{s_1 < \cdots < s_n = s < t\} \subset I$ 和 $B \in \mathcal{E}$ 有

$$\mathbf{P}(X_t \in B | X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) = \mathbf{P}(X_t \in B | X_s). \quad (3.1.7)$$

证明 若 (X_t) 有马氏性, 则对任何 $s < t \in I$ 及 $B \in \mathcal{E}$ 有 (3.1.6) 成立, 对该式两边取关于 $(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})$ 的条件期望即得 (3.1.7). 反之, 设 (3.1.7) 成立, 则对任何 $f \in b\mathcal{E}^n$ 都有

$$\mathbf{P}[1_B(X_t)f(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})] = \mathbf{P}\{\mathbf{P}[1_B(X_t)|X_s]f(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})\}. \quad (3.1.8)$$

利用单调类方法易证对任何 $G \in b\mathcal{F}_s^0$ 有

$$\mathbf{P}[1_B(X_t)G] = \mathbf{P}\{\mathbf{P}[1_B(X_t)|X_s]G\},$$

故 (3.1.6) 成立, 即 (X_t) 有马氏性. $\square$

定理 3.1.6 以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间的过程 $(X_t : t \in I)$ 具有马氏性的充分必要条件是对任意的 $s \in I$, 在条件概率 $\mathbf{P}(\cdot | X_s)$ 之下 $(X_{t \wedge s} : t \in I)$ 和 $(X_{s+t} : t \in I)$ 独立.

证明 注意到 $\mathcal{F}_s^0 = \sigma(X_{t \wedge s} : t \in I)$ 和 $\mathcal{F}^s = \sigma(X_{s+t} : t \in I)$, 由推论 3.1.4 立得结论. $\square$

根据定理 3.1.6, 过程 (X_t) 具有马氏性等价于在已知当前状态 X_s 的条件概率之下, 过程在时刻 s 之前和之后的运动是独立的. 这也给出马氏性的一个通俗的解释.

§3.2 转移半群

研究马氏过程的基本工具之一是转移半群, 它实际上给出了过程的某种正则条件分布. 利用转移半群, 可以把马氏过程的有限维分布, 马氏性和强马氏性等刻画得非常简介和清楚. 首先让我们引入核及核诱导的算子等基本概念, 并证明它们的若干性质.

定义 3.2.1 设 $(E, \mathcal{E})$ 和 $(F, \mathcal{F})$ 是两个可测空间, 映射 $K : E \times \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ 称为从 $(E, \mathcal{E})$ 到 $(F, \mathcal{F})$ 的核, 如果它满足如下条件:

- (1) 当 $A \in \mathcal{F}$ 固定, $x \mapsto K(x, A)$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的可测函数;
- (2) 当 $x \in E$ 固定, $A \mapsto K(x, A)$ 是 $(F, \mathcal{F})$ 上的测度.

如果 $\sup_{x \in E} K(x, F) < \infty$, 我们称 K 是有界核. 特别, 若 $K(\cdot, F) = 1$, 我们称 K 是马氏核, 而若 $K(\cdot, F) \leq 1$, 则称 K 是次马氏核. 当 $E = F$ 且 $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ 时, 称 K 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的核.

核与函数空间上的线性算子之间有密切的联系. 设 K 是 $(E, \mathcal{E})$ 到 $(F, \mathcal{F})$ 的有界核. 对于 $f \in \mathbf{b}\mathcal{F}$ 令

$$Kf(x) = \int_F K(x, dy)f(y), \quad x \in E,$$

则 $Kf \in \mathbf{b}\mathcal{E}$, 即 K 诱导一个 $\mathbf{b}\mathcal{F}$ 至 $\mathbf{b}\mathcal{E}$ 的线性算子. 此外, 如果 μ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的有限测度, 令

$$\mu K(B) = \int_E \mu(dx)K(x, B), \quad B \in \mathcal{F},$$

则 μK 是 $(F, \mathcal{F})$ 上的一个有限测度, 即 K 诱导一个将 $(E, \mathcal{E})$ 上的有限测度映至 $(F, \mathcal{F})$ 上的有限测度的算子. 显然当 K 是马氏核时, 它将概率测度映为概率测度.

如果 K 和 L 分别是可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 到 $(F, \mathcal{F})$ 和 $(F, \mathcal{F})$ 到 $(B, \mathcal{B})$ 的有界核, 对 $x \in E$ 和 $A \in \mathcal{B}$ 我们定义

$$KL(x, A) = \int_F K(x, dy)L(y, A),$$

则 KL 是一个 $(E, \mathcal{E})$ 到 $(B, \mathcal{B})$ 的有界核, 称为 K 与 L 的复合. 关于此复合核导出的算子, 显然有

$$K(Lf) = (KL)f, \quad (\mu K)L = \mu(KL).$$

所以, 今后遇到上述运算时, 我们简写做 KLf 或 μKL .

设 $(E, \bar{\mathcal{E}})$ 和 $(F, \bar{\mathcal{F}})$ 分别是 $(E, \mathcal{E})$ 和 $(F, \mathcal{F})$ 普遍完备化. 则任何从 $(E, \mathcal{E})$ 到 $(F, \mathcal{F})$ 的有界核都可以自然地扩张为从 $(E, \bar{\mathcal{E}})$ 到 $(F, \bar{\mathcal{F}})$ 的有界核 (作业).

定义 3.2.2 如果对任何 $x \in E$ 都有 $\{x\} \in \mathcal{E}$, 我们称可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间. 状态空间 $(E, \mathcal{E})$ 上的一族(次)马氏核 $(P_t : t \in I)$ 称为转移半群, 如果 P_0 是恒等算子且对任意 $s, t \in I$, 有 $P_s P_t = P_{s+t}$. 此式等价于

$$P_{t+s}(x, B) = \int_E P_s(x, dy) P_t(y, B), \quad x \in E, B \in \mathcal{E}.$$

后者通常称为查普曼-科尔莫戈罗夫 (Chapman-Kolmogorov) 方程. 由马氏转移核构成的转移半群也称为保守的转移半群.

定理 3.2.1 设 $(P_t : t \in I)$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的保守转移半群. 如果以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间的 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 适应过程 $(X_t : t \in I)$ 具有性质: 对任何 $s, t \in I$ 及 $B \in \mathcal{E}$ 有

$$\mathbf{P}(X_{s+t} \in B | \mathcal{G}_s) = P_t(X_s, B), \quad (3.2.1)$$

那么 X 具有 $\mathcal{E}$ 马氏性 (3.1.1).

证明 对 (3.2.1) 两边取关于 X_s 的条件期望得

$$\mathbf{P}(X_{s+t} \in B | X_s) = P_t(X_s, B).$$

所以 $(X_t : t \in I)$ 满足 $\mathcal{E}$ 马氏性 (3.1.1). $\square$

定义 3.2.3 设 $(P_t : t \in I)$ 是状态空间 $(E, \mathcal{E})$ 上的保守转移半群. 如果定义于概率空间 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ 取值于 $(E, \mathcal{E})$ 且适应于流 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 的过程 $(X_t : t \in I)$ 具有性质 (3.2.1), 我们说 (X_t) 相对于流 $(\mathcal{G}_t)$ 具有以 (P_t) 为转移半群的马氏性. 为了强调, 有时也称 $\mathcal{E}$ 马氏性. 我们称 X_0 在 $(E, \mathcal{E})$ 上的分布 μ 为 X 的初始分布.

例 3.2.1 设 X_0 是实值随机变量. 对任何 $t \geq 0$ 令 $X_t = X_0 + t$. 则 $(X_t : t \geq 0)$ 是马氏过程, 其转移半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 可定义为 $P_t(x, dy) = \delta_{x+t}(dy)$. 这样, 对于任何 $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ 及 $f \in \mathbf{b}\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 有 $P_t f(x) = f(x+t)$. $\square$

例 3.2.2 设 X_0 是实值随机变量. 对任何 $t \geq 0$ 令 $X_t = X_0 + \text{sgn}(X_0)t$, 其中 sgn 为符号函数. 则 $(X_t : t \geq 0)$ 是马氏过程, 其转移半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 可定义为 $P_t(x, dy) = \delta_{x+\text{sgn}(x)t}(dy)$. 不难看出, 对于任何 $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ 及 $f \in \mathbf{b}\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 有 $P_t f(x) = f(x + \text{sgn}(x)t)$. $\square$

例 3.2.3 固定常数 $b \geq 0$. 对于 $t \geq 0$ 和 $x \in \mathbb{R}$ 令 $P_t(x, dy) = e^{-bt} \delta_x(dy)$. 则 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的转移半群. 对于任何 $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ 及 $f \in \mathbf{b}\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 显然有 $P_t f(x) = e^{-bt} f(x)$. 显然 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为保守半群的充要条件是 $b = 0$. $\square$

如无特别申明, 本节下面我们说到转移半群时总指马氏转移半群, 即我们假定半群是保守的. 在定义 3.2.3 的情况下, 对于任何 $r \in I$, 显然 $(X_{r+t} : t \in I)$ 相对于流 $(\mathcal{G}_{r+t} : t \in I)$ 是以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 马氏过程. 另外, 从 (3.1.1) 和 (3.2.1) 不难看出, 转移核 $P_t(x, dy)$ 直观上是随机变量 X_{r+t} 相对于 X_r 的正则条件分布.

定理 3.2.2 设 $(X_t : t \in I)$ 是以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间的 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 适应过程. 那么 $(X_t : t \in I)$ 相对于流 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 具有以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 马氏性的充要条件是对任意的 $s, t \in I$ 和 $f \in b\mathcal{E}$ 有

$$\mathbf{P}[f(X_{s+t})|\mathcal{G}_s] = P_t f(X_s). \quad (3.2.2)$$

证明 显然 (3.2.2) 蕴含 (3.2.1). 与定理 3.1.1 的证明类似地, 利用条件期望的线性性和控制收敛定理可证明 (3.2.1) 也蕴含 (3.2.2). $\square$

如果 $(X_t : t \in I)$ 相对适应流 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 具有以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 马氏性, 它相对于自然流 $(\mathcal{F}_t^0)$ 也一定有此性质, 即对任何 $s, t \in I$ 及 $B \in \mathcal{E}$ 都有

$$\mathbf{P}(X_{s+t} \in B | \mathcal{F}_s^0) = P_t(X_s, B). \quad (3.2.3)$$

与命题 3.1.5 类似地, 我们可以得到如下的:

命题 3.2.3 以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间的过程 $(X_t : t \in I)$ 具有以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 马氏性当且仅当对任意的 $\{s_1 < \cdots < s_n = s < t\} \subset I$ 和 $B \in \mathcal{E}$ 有

$$\mathbf{P}(X_t \in B | X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) = P_{t-s}(X_s, B). \quad (3.2.4)$$

下面我们来研究马氏过程的有限维分布族. 假定 $(P_t : t \in I)$ 为 $(E, \mathcal{E})$ 上的转移半群. 对任何 $x \in E$ 及 $J := \{t_1 < \cdots < t_n\} \in \mathcal{J}$, 显然存在 $(E^J, \mathcal{E}^J)$ 上唯一的概率测度 $P_J(x, \cdot)$ 使得

$$P_J(x, B_1 \times \cdots \times B_n) = \int_{B_1 \times \cdots \times B_n} P_{t_1}(x, dx_1) P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \cdots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n)$$

对所有 $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{E}$ 成立. 显然, 上式是 $x \in E$ 的可测函数. 利用单调类定理不难证明 P_J 是 $(E, \mathcal{E})$ 到 $(E^J, \mathcal{E}^J)$ 的马氏核. 对于一般的 $J \in \mathcal{J}$ 可以利用置换方法定义 $(E, \mathcal{E})$ 到 $(E^J, \mathcal{E}^J)$ 的马氏核 P_J . 给定 E 上的概率测度 μ , 令 $\mathcal{D}_\mu = \{\mu P_J : J \in \mathcal{J}\}$. 利用查普曼-科尔莫戈罗夫方程易证 $\mathcal{D}_\mu$ 是相容的有限维分布族 (作业).

定理 3.2.4 设 $(X_t : t \in I)$ 是状态空间 $(E, \mathcal{E})$ 上相对于流 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 马氏过程, 且初始分布为 μ . 则 $(X_t : t \in I)$ 的有限维分布族是 $\mathcal{D}_\mu = \{\mu P_J : J \in \mathcal{J}\}$.

证明 根据函数形式的单调类定理, 只需证明对任何 $J_n = \{t_1 < \cdots < t_n\} \subset I$ 及 $\{f_1, \cdots, f_n\} \subset \mathcal{b}\mathcal{E}$ 有

$$\mathbf{P}[f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n})] = \int_{E^n} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \mu P_{J_n}(dx_1, \cdots, dx_n). \quad (3.2.5)$$

使用数学归纳法. 当 $n = 1$ 有

$$\mathbf{P}[f(X_{t_1})] = \mathbf{P}[\mathbf{P}(f(X_{t_1})|\mathcal{G}_0)] = \mathbf{P}[P_{t_1}f(X_0)] = \int_E f(x) \mu P_{t_1}(dx).$$

设 (3.2.5) 对某个 $n \geq 1$ 成立. 对 $J_{n+1} = \{t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}\} \subset I$ 及 $\{f_1, \cdots, f_n, f_{n+1}\} \subset \mathcal{b}\mathcal{E}$, 利用 (3.2.1) 和 (3.2.5) 有

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}[f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) f_{n+1}(X_{t_{n+1}})] \\ &= \mathbf{P}\left[\mathbf{P}(f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) f_{n+1}(X_{t_{n+1}}) | \mathcal{G}_{t_n})\right] \\ &= \mathbf{P}\left[f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n}) P_{t_{n+1}-t_n} f_{n+1}(X_{t_n})\right] \\ &= \int_{E^n} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) P_{t_{n+1}-t_n} f_{n+1}(x_n) \mu P_{J_n}(dx_1, \cdots, dx_n) \\ &= \int_{E^n} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \mu P_{J_n}(dx_1, \cdots, dx_n) \int_E f_{n+1}(x_{n+1}) P_{t_{n+1}-t_n}(x_n, dx_{n+1}) \\ &= \int_E \mu(dx) \int_E f_1(x_1) P_{t_1}(x, dx_1) \int_E f_2(x_2) P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \\ &\quad \cdots \int_E f_n(x_n) P_{t_n-t_{n-1}}(dx_{n-1}, dx_n) \int_E f_{n+1}(x_{n+1}) P_{t_{n+1}-t_n}(x_n, dx_{n+1}) \\ &= \int_{E^{n+1}} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) f_{n+1}(x_{n+1}) \mu P_{J_{n+1}}(dx_1, \cdots, dx_n, dx_{n+1}). \end{aligned}$$

也就是说, 将 n 换为 $n+1$ 后 (3.2.5) 仍然成立. 此即完成证明. $\square$

定理 3.2.5 设 $(P_t : t \in I)$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的转移半群. 若取值于 $(E, \mathcal{E})$ 的过程 $(X_t : t \in I)$ 是有限维分布族 $\mathcal{D}_\mu = \{\mu P_J : J \in \mathcal{J}\}$ 的一个实现, 则 X 是以 μ 为初始分布, 以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的马氏过程.

证明 显然 X 的初始分布为 μ . 下证 X 相对于其自然流是以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的马氏过程. 根据命题 3.2.3, 只需验证对 $\{s_1 < \cdots < s_n = s < t\} \subset I$ 及 $B \in \mathcal{E}$ 有等式 (3.2.4) 成立. 记 $J = (s_1, \cdots, s_n)$ 和 $K = (s_1, \cdots, s_n, t)$ 并取 $A \in \mathcal{E}^n$. 则

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}[1_A(X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) 1_B(X_t)] \\ &= \int_E \mu(dx) \int_{A \times B} P_K(x, dx_1, \cdots, dx_n, dy) \\ &= \int_E \mu(dx) \int_A P_{s_1}(x, dx_1) \cdots P_{s_n-s_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) P_{t-s}(x_n, B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_E \mu(dx) \int_E 1_A(x_1, \dots, x_n) P_{t-s}(x_n, B) P_J(x, dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \\
&= \mathbf{P} \left[1_A(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) P_{t-s}(X_s, B) \right].
\end{aligned}$$

此即为欲证者. $\square$

定理 3.2.6 假设存在完备可分度量空间 F 使 $(E, \mathcal{E})$ 与 $(F, \mathcal{B}(F))$ 可测同构. 则对 $(E, \mathcal{E})$ 上的任意概率测度 μ 和马氏转移半群 $(P_t : t \in I)$, 存在以 μ 为初始分布以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的马氏过程.

证明 如上所述, 有限维分布族 $\mathcal{D}_\mu$ 是相容的. 根据定理 1.2.6 存在该有限维分布族的实现 $X = (X_t : t \in I)$. 由定理 3.2.5 知 X 是以 μ 为初始分布以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的马氏过程. $\square$

定义 3.2.4 设 $(X_t : t \in I)$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的关于流 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 强适应的过程. 如果对任意的 $t \in I$, $f \in b\mathcal{E}$ 和 $(\mathcal{G}_t)$ 停时 T 有

$$\mathbf{P}[f(X_{T+t})1_{\{T<\infty\}}|\mathcal{G}_T] = P_t f(X_T)1_{\{T<\infty\}}, \quad (3.2.6)$$

我们称 (X_t) 相对于流 $(\mathcal{G}_t)$ 具有以 (P_t) 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 强马氏性.

定理 3.2.7 关于流 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 强适应的过程 $(X_t : t \in I)$ 具有以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 强马氏性当且仅当对任意的 $t \in I$, $f \in b\mathcal{E}$ 和 $(\mathcal{G}_t)$ 停时 T 有

$$\mathbf{P}[f(X_{T+t})1_{\{T<\infty\}}] = \mathbf{P}[P_t f(X_T)1_{\{T<\infty\}}]. \quad (3.2.7)$$

证明 若 (X_t) 具有以 (P_t) 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 强马氏性, 我们可以在 (3.2.6) 两端取期望得 (3.2.7). 反之, 下设 (3.2.7) 对 $t \in I$, $f \in b\mathcal{E}$ 和 $(\mathcal{G}_t)$ 停时 T 成立. 对于 $A \in \mathcal{G}_T$ 令 $T_A = T \cdot 1_A + \infty \cdot 1_{A^c}$. 不难验证 T_A 是 $(\mathcal{G}_t)$ 停时. 对于 T_A 应用 (3.2.7) 得

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[f(X_{T+t})1_{\{T<\infty\}}1_A] &= \mathbf{P}[f(X_{T+t})1_{\{T_A<\infty\}}] = \mathbf{P}[f(X_{T_A+t})1_{\{T_A<\infty\}}] \\
&= \mathbf{P}[P_t f(X_{T_A})1_{\{T_A<\infty\}}] = \mathbf{P}[P_t f(X_T)1_{\{T<\infty\}}1_A].
\end{aligned}$$

因此 (3.2.6) 成立. $\square$

推论 3.2.8 设 $I = \mathbb{Z}_+$. 则任何以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 马氏过程 $(X_t : t \in I)$ 都具有 $\mathcal{E}$ 强马氏性.

证明 注意此时 (X_t) 关于流 $(\mathcal{G}_t)$ 循序可测, 因而强适应. 显然, 对任何 $n \in I$ 都有 $\{\tau = n\} \in \mathcal{G}_n$. 故利用 (X_t) 的马氏性得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[f(X_{T+t})1_{\{T < \infty\}}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}[f(X_{n+t})1_{\{T=n\}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\mathbf{P}[f(X_{n+t})1_{\{T=n\}}]|\mathcal{G}_n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{1_{\{T=n\}}P_t f(X_n)\} = \mathbf{P}[P_t f(X_T)1_{\{T < \infty\}}]. \end{aligned}$$

再由定理 3.2.7 知 (X_t) 满足 $\mathcal{E}$ 强马氏性. $\square$

不难看出, 若 $(X_t : t \in I)$ 相对于流 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 满足以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 强马氏性而 T 为有限的 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 停时, 则 $(X_{T+t} : t \in I)$ 相对于流 $(\mathcal{G}_{T+t} : t \in I)$ 是以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 强马氏过程. 另外, 与定理 3.2.1 类似地, 我们有 (作业):

定理 3.2.9 如果 $(X_t : t \in I)$ 相对于流 $(\mathcal{G}_t)$ 具有以 (P_t) 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 强马氏性, 那么对任意的 $t \in I$, $f \in b\mathcal{E}$ 和有限 $(\mathcal{G}_t)$ 停时 T 有

$$\mathbf{P}[f(X_{T+t})|\mathcal{G}_T] = \mathbf{P}[f(X_{T+t})|X_T].$$

对于有限 $(\mathcal{G}_t)$ 停时 T 令 $\mathcal{F}^T = \sigma(\{X_{T+t} : t \in I\})$. 基于定理 3.2.9, 与上节中的讨论类似地, 可以证明如下结果 (作业):

定理 3.2.10 如果 $(X_t : t \in I)$ 相对于流 $(\mathcal{G}_t)$ 具有以 (P_t) 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 强马氏性, 那么对于任意的有限 $(\mathcal{G}_t)$ 停时 T 和 $F \in b\mathcal{F}^T$ 有

$$\mathbf{P}(F|\mathcal{G}_T) = \mathbf{P}(F|X_T).$$

推论 3.2.11 如果 $(X_t : t \in I)$ 相对于流 $(\mathcal{G}_t)$ 具有以 (P_t) 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 强马氏性, 那么对任意的有限 $(\mathcal{G}_t)$ 停时 T , $F \in b\mathcal{F}^T$ 和 $G \in b\mathcal{G}_T$ 有

$$\mathbf{P}(GF|X_T) = \mathbf{P}(G|X_T)\mathbf{P}(F|X_T).$$

推论 3.2.12 如果 $(X_t : t \in I)$ 相对于流 $(\mathcal{G}_t)$ 具有以 (P_t) 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 强马氏性, 那么对任何有限 $(\mathcal{G}_t)$ 停时 T , 在 $\mathbf{P}(\cdot|X_T)$ 之下 $(X_{t \wedge T} : t \in I)$ 和 $(X_{T+t} : t \in I)$ 独立.

本节最后, 我们来考虑状态空间 $(E, \mathcal{E})$ 上的次马氏转移半群 $(P_t : t \in I)$. 取 $\partial \notin E$, 令 $\tilde{E} = E \cup \{\partial\}$, 再定义此空间上的 σ 代数 $\tilde{\mathcal{E}} = \sigma(\mathcal{E})$. 这样, 显然有 $E \in \tilde{\mathcal{E}}$ 和 $\{\partial\} = \tilde{E} \setminus E \in \tilde{\mathcal{E}}$. 对 $t \in I$ 令

$$\tilde{P}_t(y, A) = \begin{cases} P_t(y, A), & y \in E, A \in \mathcal{E}, \\ 1 - P_t(y, E), & y \in E, A = \{\partial\}, \\ \delta_\partial(A), & y = \partial, A \in \tilde{\mathcal{E}}. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

容易验证, 上式确定了 $(\tilde{E}, \tilde{\mathcal{E}})$ 上的一族概率核 $(\tilde{P}_t : t \in I)$ 且它们构成马氏转移半群 (作业). 所以, 任何一个次马氏转移半群总可扩张为马氏转移半群. 假设 $X = (X_t : t \in I)$ 是相对于流 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 以 $(\tilde{P}_t : t \in I)$ 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 强马氏过程. 当 $I = \mathbb{R}_+$ 时假定过程的轨道右连续. 令 $\zeta = \inf\{t \in I : X_t = \partial\}$. 注意当 $\zeta < \infty$ 有 $X_\zeta = \partial$. 由强马氏性, 对 $t \geq 0$ 有

$$\mathbf{P}(X_{\zeta+t} \neq \partial, \zeta < \infty) = \mathbf{P}[\tilde{P}_t(X_\zeta, E \setminus \{\partial\})1_{\{\zeta < \infty\}}] = 0.$$

据此及过程的右连续性不难证明 $\mathbf{P}(\text{存在 } t \geq 0 \text{ 使 } X_{\zeta+t} \neq \partial) = 0$. 也就是说, 过程一旦进入状态 ∂ 就不再活动, 所以我们称此状态为 X 的坟墓. 在很多情况下, 我们感兴趣的是过程在 E 中的行为. 因此, 也称 X 为 E 上以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的马氏过程, 而称 ζ 为其生命时.

§3.3 马氏系统

我们已经看到, 具有相同转移半群的马氏过程可能有不同的初始分布. 这些过程在轨道空间上的分布当然是不同的. 很多情况下, 我们需要对同一个过程考虑不同的初始分布, 这就产生了马氏系统的概念. 确切地, 我们有如下的:

定义 3.3.1 假设 $(E, \mathcal{E})$ 是状态空间, 而 $(P_t : t \in I)$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的转移半群. 我们称六元组

$$X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x : t \in I, x \in E)$$

为以 $(E, \mathcal{E})$ 为状态空间, 以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的马氏系统或马氏过程, 如果以下条件满足:

- (1) $(\mathbf{P}^x : x \in E)$ 是带流可测空间 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ 上的概率测度族, 而且对任何 $F \in \mathbf{b}\mathcal{G}$, $x \mapsto \mathbf{P}^x(F)$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的可测函数.
- (2) $(\theta_t : t \in I)$ 是 $(\Omega, \mathcal{G})$ 上的一族映射, 且对任何 $s, t \in I$ 满足 $\theta_s \circ \theta_t = \theta_{s+t}$ 和 $X_s \circ \theta_t = X_{s+t}$.
- (3) 对任何 $x \in E$ 有 $\mathbf{P}^x(X_0 = x) = 1$, 过程 $(X_t : t \in I)$ 关于流 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 适应, 且相对于 $(\mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^x)$ 满足以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的马氏性. 特别地, 对于 $s, t \in I$ 和 $f \in \mathbf{b}\mathcal{E}$ 有

$$\mathbf{P}^x[f(X_t \circ \theta_s) | \mathcal{G}_s] = \mathbf{P}^x[f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_s] = P_t f(X_s). \quad (3.3.1)$$

在上述条件下我们称马氏过程 X 是转移半群 $(P_t : t \in I)$ 的实现. 我们说马氏过程 X 右连续 (连续, 左极右连等等), 如果 E 是拓扑空间且对每个 $\omega \in \Omega$, 样本轨道 $t \mapsto X_t(\omega)$ 右连续 (连续, 左极右连等等).

马氏系统中包含了丰富的数学结构, 这使我们可以方便的表达过程的各种性质. 给定 $(E, \mathcal{E})$ 上的有限测度 μ , 定义 $(\Omega, \mathcal{G})$ 上的有限测度 $\mathbf{P}^\mu$ 如下:

$$\mathbf{P}^\mu(A) = \int_E \mathbf{P}^x(A) \mu(dx), \quad A \in \mathcal{G}. \quad (3.3.2)$$

显然, 若 $\mathbf{P}^\mu$ 为概率测度, 则 $\mathbf{P}^\mu$ 也是概率测度. 此时在 $\mathbf{P}^\mu$ 之下 $(X_t : t \in I)$ 相对于流 $(\mathcal{G}_t : t \in I)$ 是以 μ 为初始分布以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的马氏过程.

有时我们不把马氏系统所有的元素写出, 如简单地写 $X = (X_t, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}^x)$ 或 $X = (X_t)$ 等. 注意, 由 (3.3.1) 得

$$\mathbf{P}^x f(X_t) = \mathbf{P}^x \{ \mathbf{P}^x [f(X_t) | \mathcal{G}_0] \} = \mathbf{P}^x \{ P_t f(X_0) \} = P_t f(x). \quad (3.3.3)$$

定理 3.3.1 设 X 是一个马氏系统. 记其自然 σ 代数 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$. 那么对任何 $s \in I$ 及随机变量 $F \in \mathbf{b}\mathcal{F}$ 有 $F \circ \theta_s \in \mathbf{b}\mathcal{F}$, 而且

$$\mathbf{P}^\mu(F \circ \theta_s | \mathcal{G}_s) = \mathbf{P}^{X_s}(F). \quad (3.3.4)$$

上式右边是指将函数 $x \mapsto \mathbf{P}^x(F)$ 中的 x 替换为 X_s .

证明 首先, 由马氏过程的定义知 $x \mapsto \mathbf{P}^x(F)$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的可测函数, 所以上式右端关于 $\sigma(X_s) \subset \mathcal{G}_s$ 可测. 现考虑 $F = f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n})$ 的情况, 其中 $\{t_1 < \cdots < t_n\} \subset I$ 而 $\{f_1, \cdots, f_n\} \subset \mathbf{b}\mathcal{E}$. 在此情况下显然有

$$F \circ \theta_s = f_1(X_{t_1+s}) \cdots f_n(X_{t_n+s}) \in \mathbf{b}\mathcal{F}.$$

所以 (3.3.4) 等价于

$$\mathbf{P}^\mu [f_1(X_{t_1+s}) \cdots f_n(X_{t_n+s}) | \mathcal{G}_s] = \mathbf{P}^{X_s} [f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n})]. \quad (3.3.5)$$

下面用数学归纳法证明上式成立. 若 $n = 1$, 由 $(X_t : t \in I)$ 相对于 $(\mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P}^\mu)$ 的马氏性及定理 3.2.2 有

$$\mathbf{P}^\mu [f_1(X_{t_1+s}) | \mathcal{G}_s] = P_{t_1} f_1(X_s) = \mathbf{P}^{X_s} f_1(X_{t_1}).$$

假设当 n 换为 $n - 1$ 后等式 (3.3.5) 成立. 则

$$\mathbf{P}^\mu [f_1(X_{t_1+s}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}+s}) f_n(X_{t_n+s}) | \mathcal{G}_s]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{P}^\mu \left\{ f_1(X_{t_1+s}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}+s}) \mathbf{P}^\mu[f_n(X_{t_n+s}) | \mathcal{G}_{t_{n-1}+s}] \mathcal{G}_s \right\} \\
&= \mathbf{P}^\mu \left\{ f_1(X_{t_1+s}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}+s}) P_{t_n-t_{n-1}} f_n(X_{t_{n-1}+s}) | \mathcal{G}_s \right\} \\
&= \mathbf{P}^{X_s} \left\{ f_1(X_{t_1}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}}) P_{t_n-t_{n-1}} f_n(X_{t_{n-1}}) \right\} \\
&= \mathbf{P}^x \left\{ f_1(X_{t_1}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}}) P_{t_n-t_{n-1}} f_n(X_{t_{n-1}}) \right\} \Big|_{x=X_s} \\
&= \mathbf{P}^x \left\{ f_1(X_{t_1}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}}) \mathbf{P}^x[f_n(X_{t_n}) | \mathcal{G}_{t_{n-1}}] \right\} \Big|_{x=X_s} \\
&= \mathbf{P}^x \left\{ \mathbf{P}^x[f_1(X_{t_1}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}}) f_n(X_{t_n}) | \mathcal{G}_{t_{n-1}}] \right\} \Big|_{x=X_s} \\
&= \mathbf{P}^x \left\{ f_1(X_{t_1}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}}) f_n(X_{t_n}) \right\} \Big|_{x=X_s} \\
&= \mathbf{P}^{X_s} \left\{ f_1(X_{t_1}) \cdots f_{n-1}(X_{t_{n-1}}) f_n(X_{t_n}) \right\}.
\end{aligned}$$

所以, 当 $F = f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n})$ 时定理的结论成立. 由单调类定理知其对于任何 $F \in \mathbf{b}\mathcal{F}$ 也成立. $\square$

现在来考虑马氏系的流的强化问题. 因为我们同时考虑多个概率测度, 这种强化与前面给出的有所不同. 假设 $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ 是以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的马氏系统. 令 $(\mathcal{G}^\mu, \mathcal{G}_t^\mu)$ 是 $(\mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ 在 $\mathbf{P}^\mu$ 下的强化. 类似地, 令 $(\mathcal{F}^\mu, \mathcal{F}_t^\mu)$ 是自然 σ 代数 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$ 在 $\mathbf{P}^\mu$ 下的强化. 再令

$$\bar{\mathcal{G}} = \cap \{ \mathcal{G}^\mu : \mu \text{ 为初始分布} \}, \quad \bar{\mathcal{G}}_t = \cap \{ \mathcal{G}_t^\mu : \mu \text{ 为初始分布} \}.$$

我们称 $(\bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{G}}_t)$ 为 $(\mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ 在概率测度系 $\{\mathbf{P}^\mu : \mu \text{ 为初始分布}\}$ 之下的强化. 如果 $\mathcal{G} = \bar{\mathcal{G}}$ 且 $\mathcal{G}_t = \bar{\mathcal{G}}_t$ 对每个 $t \in I$ 成立, 我们称 $(\mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ 在 $\{\mathbf{P}^\mu : \mu \text{ 为初始分布}\}$ 之下是加强的. 令 $(\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{F}}_t)$ 为自然 σ 代数 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$ 在概率测度系 $\{\mathbf{P}^\mu : \mu \text{ 为初始分布}\}$ 之下的强化. 令 $\bar{\mathcal{E}}$ 是 $\mathcal{E}$ 的普遍完备化 σ 代数.

定理 3.3.2 对于每个初始分布 μ , 过程 (X_t) 相对于流 $(\mathcal{G}_t^\mu)$ 是 $\bar{\mathcal{E}}$ 适应的且在 $\mathbf{P}^\mu$ 之下相对于此流具有以 (P_t) 为转移半群的 $\bar{\mathcal{E}}$ 马氏性.

证明 由命题 1.4.5 知 (X_t) 关于流 $(\mathcal{G}_t^\mu)$ 是 $\bar{\mathcal{E}}$ 适应的. 再根据定理 3.2.2, 对于 $s, t \in I$, $A \in \mathcal{G}_s$ 和 $f \in \mathbf{b}\mathcal{E}$ 有

$$\mathbf{P}^\mu[1_A f(X_{s+t})] = \mathbf{P}^\mu[1_A P_t f(X_s)].$$

由命题 1.4.1, 对任何 $A \in \mathcal{G}_s^\mu$ 有 $A_0 \in \mathcal{G}_s$ 使得 $\mathbf{P}^\mu(A \triangle A_0) = 0$. 所以上式对 $A \in \mathcal{G}_s^\mu$ 也成立, 从而有

$$\mathbf{P}^\mu[f(X_{t+s}) | \mathcal{G}_s^\mu] = P_t f(X_s). \quad (3.3.6)$$

令 ν 为 X_{t+s} 在 $\mathbf{P}^\mu$ 之下在 E 上的分布. 下证上式对于 $f \in b\bar{\mathcal{E}}$ 也成立. 由推论 1.4.3 存在 $f_1, f_2 \in b\mathcal{E}$ 满足 $f_1 \leq f \leq f_2$ 且 $\nu(f_1 \neq f_2) = 0$. 这样, 我们有 $P_t f_1(X_s) \leq P_t f(X_s) \leq P_t f_2(X_s)$ 和

$$\mathbf{P}^\mu[f_1(X_{t+s})|\mathcal{G}_s^\mu] \leq \mathbf{P}^\mu[f(X_{t+s})|\mathcal{G}_s^\mu] \leq \mathbf{P}^\mu[f_2(X_{t+s})|\mathcal{G}_s^\mu].$$

但由 f_1, f_2 的取法不难看出, 上式中只能成立等号. 注意上式两端分别为 $P_t f_1(X_s)$ 和 $P_t f_2(X_s)$. 所以 (3.3.6) 对 $f \in b\bar{\mathcal{E}}$ 也成立, 即 (X_t) 相对于流 $(\mathcal{G}_t^\mu)$ 满足以 (P_t) 为转移半群的 $\bar{\mathcal{E}}$ 马氏性. $\square$

定理 3.3.3 对任何 $F \in b\bar{\mathcal{F}}$ 函数 $\phi(x) := \mathbf{P}^x(F)$ 关于 $\bar{\mathcal{E}}$ 可测. 特别地, 若 $F \in b\bar{\mathcal{F}}$, 则对任何 $s \in I$ 有 $F \circ \theta_s \in b\bar{\mathcal{F}}$, 且对任何初始分布 μ 有

$$\mathbf{P}^\mu(F \circ \theta_s | \mathcal{G}_s^\mu) = \mathbf{P}^{X_s}(F), \quad (3.3.7)$$

这里右边是指将函数 $\phi(x)$ 中的 x 替换为 X_s .

证明 首先设 $F \in b\bar{\mathcal{G}}$. 对任意 μ , 有 $F \in b\mathcal{G}^\mu$, 故存在 $G_1, G_2 \in b\mathcal{G}$ 满足 $G_1 \leq F \leq G_2$ 且 $\mathbf{P}^\mu\{G_1 \neq G_2\} = 0$. 由定义 3.3.1 知 $x \mapsto \psi_i(x) = \mathbf{P}^x(G_i)$ ($i = 1, 2$) 关于 $\mathcal{E}$ 可测. 显然 $\psi_1 \leq \phi \leq \psi_2$ 且

$$\int_E \psi_1(x) \mu(dx) = \mathbf{P}^\mu(G_1) = \mathbf{P}^\mu(G_2) = \int_E \psi_2(x) \mu(dx),$$

故 $\mu(\{\psi_1 \neq \psi_2\}) = 0$. 因此 $\phi \in b\mathcal{E}^\mu$. 这说明 $\phi \in b\bar{\mathcal{E}}$. 再由定理 3.3.2 知 (X_t) 关于 $(\mathcal{G}_t^\mu)$ 是 $\bar{\mathcal{E}}$ 适应的, 故 (3.3.7) 右端关于 $\mathcal{G}_s^\mu$ 可测. 给定初始分布 μ , 令 ν 为 X_s 在 $\mathbf{P}^\mu$ 之下的分布. 如果 $F \in b\bar{\mathcal{F}}$, 那么 $F \in b\bar{\mathcal{F}}^\nu$, 故存在 $F_1, F_2 \in b\bar{\mathcal{F}}$ 满足 $F_1 \leq F \leq F_2$ 且 $\mathbf{P}^\nu(F_1 \neq F_2) = 0$. 令 $\phi_i(x) = \mathbf{P}^x(F_i)$ ($i = 1, 2$), 我们有 $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$. 由定理 3.3.1 知 $F_i \circ \theta_s \in b\bar{\mathcal{F}}$ 且对于 $i = 1, 2$ 有

$$\mathbf{P}^\mu\{F_i \circ \theta_s | \mathcal{G}_s^\mu\} = \phi_i(X_s) = \mathbf{P}^{X_s}(F_i).$$

根据命题 1.4.1, 对任何 $A \in \mathcal{G}_s^\mu$ 有 $A_0 \in \mathcal{G}_s$ 使得 $\mathbf{P}^\mu(A \triangle A_0) = 0$. 再由上式得

$$\mathbf{P}^\mu\{F_i \circ \theta_s | \mathcal{G}_s^\mu\} = \phi_i(X_s) = \mathbf{P}^{X_s}(F_i), \quad (3.3.8)$$

进而

$$\mathbf{P}^\mu\{F_i \circ \theta_s\} = \mathbf{P}^\mu\{\phi_i(X_s)\} = \int_E \phi_i(x) \nu(dx) = \mathbf{P}^\nu(F_i).$$

因此有

$$\mathbf{P}^\mu\{F_1 \circ \theta_s\} = \mathbf{P}^\mu\{\phi_1(X_s)\} = \mathbf{P}^\mu\{\phi_2(X_s)\} = \mathbf{P}^\mu\{F_2 \circ \theta_s\}. \quad (3.3.9)$$

注意到 $F_1 \circ \theta_s \leq F \circ \theta_s \leq F_2 \circ \theta_s$, 我们推出 $F \circ \theta_s \in \mathbf{b}\mathcal{F}^\mu$. 这说明 $F \circ \theta_s \in \mathbf{b}\bar{\mathcal{F}}$. 再注意到 $\phi_1(X_s) \leq \phi(X_s) \leq \phi_2(X_s)$ 和

$$\mathbf{P}^\mu\{F_1 \circ \theta_s | \mathcal{G}_s^\mu\} \leq \mathbf{P}^\mu\{F \circ \theta_s | \mathcal{G}_s^\mu\} \leq \mathbf{P}^\mu\{F_2 \circ \theta_s | \mathcal{G}_s^\mu\}.$$

再由 (3.3.8) 可以看出上式左右两端分别为 $\phi_1(X_s)$ 和 $\phi_2(X_s)$. 注意到 (3.3.9) 便知上式中只能成立等号, 且该式之值等于 $\phi(X_s)$, 即 (3.3.7) 成立. $\square$

由定理 3.3.2 和定理 3.3.3 不难看出, 强化的六元组 $X = (\Omega, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{G}}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ 也是转移半群 $(P_t : t \in I)$ 在 $(E, \bar{\mathcal{E}})$ 上的一个实现.

定理 3.3.4 若存在完备可分度量空间 F 使 $(E, \mathcal{E})$ 与 $(F, \mathcal{B}(F))$ 可测同构, 则 $(E, \mathcal{E})$ 上的任何转移半群 $(P_t : t \in I)$ 都有实现.

证明 设 $W = E^I$ 是所有函数 $w : I \rightarrow E$ 构成的集合. 令 $X_t(w) = w(t)$ 为坐标过程, 而 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$ 是坐标过程生成的自然 σ 代数. 对于 $t \in I$ 和 $w \in W$ 令 $\theta_t w \in W$ 是由 $(\theta_t w)(s) = w(t+s)$ 定义的函数. 对于 $x \in E$ 令 $(Y_t : t \in I)$ 是 E 上以 $Y_0 = x$ 为初始值, 以 $(P_t : t \in I)$ 为转移半群的马氏过程. 其存在性由定理 3.2.6 保证. 我们可以将 $(Y_t : t \in I)$ 视为取值于 $(W, \mathcal{F})$ 的随机变量. 令 $\mathbf{P}^x$ 为 $(Y_t : t \in I)$ 在 $(W, \mathcal{F})$ 上的分布. 显然有 $\mathbf{P}^x(X_0 = x) = 1$, 而且过程 $(X_t : t \in I)$ 相对于 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P}^x)$ 满足以 (P_t) 为转移半群的马氏性. 由定理 3.2.4 对任何 $J := \{t_1 < \cdots < t_n\} \subset I$ 及 $\{f_1, \cdots, f_n\} \subset \mathbf{b}\mathcal{B}(E)$ 有

$$\mathbf{P}^x(f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n})) = \int_{E^n} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) P_J(x, dx_1, \cdots, dx_n).$$

由此和单调类定理可以证明: 若 $F \in \mathbf{b}\mathcal{F}$, 则 $x \mapsto \mathbf{P}^x(F)$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的可测函数. 定义 3.3.1 中的其他性质显然成立. 所以 $X = (W, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ 就是 (P_t) 的一个实现. $\square$

我们说马氏系统 $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ 具有 $\mathcal{E}$ 强马氏性是指 $(X_t : t \in I)$ 关于流 $(\mathcal{G}_t)$ 是强适应的且 (3.2.6) 对于每个概率测度 $\mathbf{P}^x$ 都成立. 由 (3.3.2) 和定理 3.2.7, 显然此时 (3.2.6) 对每个概率测度 $\mathbf{P}^\mu$ 也是成立的. 与前面定理类似地, 可以证明如下结论 (作业):

定理 3.3.5 设 X 具有 $\mathcal{E}$ 强马氏性. 那么对任意的随机变量 $F \in \mathbf{b}\mathcal{F}$ 和 $(\mathcal{G}_t)$ 停时 T 有 $F \circ \theta_T 1_{\{T < \infty\}} \in \mathbf{b}\mathcal{G}$, 且对任意的初始分布 μ 有

$$\mathbf{P}^\mu(F \circ \theta_T 1_{\{T < \infty\}} | \mathcal{G}_T) = \mathbf{P}^{X_T}(F) 1_{\{T < \infty\}}. \quad (3.3.10)$$

上式右边是指将函数 $x \mapsto \mathbf{P}^x(F)$ 中的 x 替换为 X_T .

证明 考虑 $F = f_1(X_{t_1}) \cdots f_n(X_{t_n})$ 的情况, 其中 $\{t_1 < \cdots < t_n\} \subset I$ 而 $\{f_1, \dots, f_n\} \subset \mathbf{b}\mathcal{E}$. 此时我们有 $F \circ \theta_T 1_{\{T < \infty\}} = f_1(X_{t_1+T}) \cdots f_n(X_{t_n+T}) 1_{\{T < \infty\}}$. 再由 X 的强适应性有 $f_i(X_{t_i+T}) 1_{\{T < \infty\}} \in \mathbf{b}\mathcal{G}_{t_i+T} \subset \mathbf{b}\mathcal{G}$, 故 $F \circ \theta_T 1_{\{T < \infty\}} \in \mathbf{b}\mathcal{G}$. 后面的推导与定理 3.3.1 的证明中类似. $\square$

定理 3.3.6 设 $I = \mathbb{R}_+$ 而 X 相对于右连续化的流 $(\mathcal{G}_{t+} : t \geq 0)$ 具有 $\mathcal{E}$ 强马氏性. 那么对于每个初始分布 μ , 此过程相对于流 $(\mathcal{G}_{t+}^\mu)$ 是 $\bar{\mathcal{E}}$ 强适应的且在 $\mathbf{P}^\mu$ 之下相对与此流具有以 (P_t) 为转移半群的 $\bar{\mathcal{E}}$ 强马氏性.

证明 由命题 1.4.10 知 X 相对于流 $(\mathcal{G}_{t+}^\mu)$ 是 $\bar{\mathcal{E}}$ 强适应的. 假设 $f \in \mathbf{b}\bar{\mathcal{E}}$ 而 T 为 $(\mathcal{G}_{t+}^\mu)$ 停时. 根据命题 1.4.9, 存在 $(\mathcal{G}_{t+})$ 停时 S 使得 $\mathbf{P}^\mu(S \neq T) = 1$. 再根据命题 1.4.7 知 $\mathcal{G}_{S+}^\mu = \mathcal{G}_{T+}^\mu$. 基于上述关系, 后面的推导与定理 3.3.2 的证明类似. $\square$

定理 3.3.7 设 $I = \mathbb{R}_+$ 而 X 相对于右连续化的流 $(\mathcal{G}_{t+} : t \geq 0)$ 具有 $\mathcal{E}$ 强马氏性. 那么对任意的随机变量 $F \in \mathbf{b}\bar{\mathcal{F}}$ 和 $(\mathcal{G}_{t+})$ 停时 T 有 $F \circ \theta_T 1_{\{T < \infty\}} \in \mathbf{b}\bar{\mathcal{G}}$, 且对任意的初始分布 μ 有

$$\mathbf{P}^\mu(F \circ \theta_T 1_{\{T < \infty\}} | \mathcal{G}_{T+}^\mu) = \mathbf{P}^{X_T}(F) 1_{\{T < \infty\}}, \quad (3.3.11)$$

这里右边是指将函数 $x \mapsto \mathbf{P}^x(F)$ 中的 x 替换为 X_T .

证明 根据命题 1.4.9, 可取 $(\mathcal{G}_{t+})$ 停时 S 使得 $\mathbf{P}^\mu(S \neq T) = 1$. 令 ν 为 X_S 在 $\mathbf{P}^\mu$ 之下在 E 上的分布, 注意它可能是一个次概率分布. 由于 $F \in \mathbf{b}\bar{\mathcal{F}} \subset \mathbf{b}\bar{\mathcal{F}}^\nu$, 存在 $F_1, F_2 \in \mathbf{b}\bar{\mathcal{F}}$ 满足 $F_1 \leq F \leq F_2$ 且 $\mathbf{P}^\nu(F_1 \neq F_2) = 0$. 与定理 3.3.3 的证明类似地可以得到

$$\mathbf{P}^\mu(F \circ \theta_S 1_{\{S < \infty\}} | \mathcal{G}_{S+}^\mu) = \mathbf{P}^{X_S}(F) 1_{\{S < \infty\}}.$$

再根据命题 1.4.7 知 $\mathcal{G}_{S+}^\mu = \mathcal{G}_{T+}^\mu$, 故上述关系与 (3.3.11) 等价. $\square$

§3.4 博雷尔右过程

在本节中我们取 $I = \mathbb{R}_+$. 假定存在紧度量空间 $\bar{E}$ 使得 E 与某个 $E_0 \in \mathcal{B}(\bar{E})$ 同胚. 在这种情况下, 我们称 E 为卢森 (Lusin) 拓扑空间. 将 E 的博雷尔 σ 代数简记为 $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$. 则存在完备可分度量空间 F 使 $(E, \mathcal{E})$ 与 $(F, \mathcal{B}(F))$ 可测同构; 参见 [16, p.14]. 我们说 $(E, \mathcal{E})$ 上的转移半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 是博雷尔的, 如果对每个 $A \in \mathcal{E}$, 映射 $(t, x) \mapsto P_t(x, A)$ 关于 $\mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{E}$ 可测. 这个条件等价于对每个 $f \in \mathbf{b}\mathcal{E}$, 映射 $(t, x) \mapsto P_t f(x)$ 关于 $\mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{E}$ 可测.

以下考虑卢森拓扑空间 E , 固定一个与其拓扑对应的度量 d , 并令 $C_u(E) = \mathbf{b}\mathcal{C}_u(E, d)$ 为此空间有界且一致连续的函数构成的集合. 设 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为 E 上的保守博雷尔转移半群. 假设 $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ 是 E 上以博雷尔半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为转移半群的右连续马氏过程, 而 $\mathbf{P}^\mu$ 是由 (3.3.2) 定义的概率测度. 基于命题 1.4.6, 我们引入记号 $\mathcal{G}_{t+}^\mu := (\mathcal{G}_t^\mu)_+ = (\mathcal{G}_{t+})^\mu$. 另外注意

$$\bigcap_{s>t} \bar{\mathcal{G}}_s = \bigcap_{s>t} \bigcap_{\mu} \mathcal{G}_s^\mu = \bigcap_{\mu} \bigcap_{s>t} \mathcal{G}_s^\mu = \bigcap_{\mu} \mathcal{G}_{t+}^\mu. \quad (3.4.1)$$

以后我们将上面的 σ 代数简单记为 $\bar{\mathcal{G}}_{t+}$. 对于 $\alpha > 0$, 函数 $f \in \mathbf{b}\mathcal{E}$ 的 α 位势 $U^\alpha f$ 定义如下:

$$U^\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t f(x) dt = \mathbf{P}^x \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right\}. \quad (3.4.2)$$

注意, 这里关于 $t \geq 0$ 的积分有意义, 且有 $U^\alpha f \in \mathbf{b}\mathcal{E}$. 上式定义了 $\mathbf{b}\mathcal{E}$ 上的一族算子 $(U^\alpha)_{\alpha>0}$. 若记 f 的上确界范数为 $\|f\|$, 则有 $\|\alpha U^\alpha f\| \leq \|f\|$. 取 $f \equiv 1$, 可知 αU^α 的算子范数 $\|\alpha U^\alpha\| = 1$. 算子族 $(U^\alpha)_{\alpha>0}$ 也可定义在 $\mathbf{p}\mathcal{E}$ 上, 但这时可能取值 ∞ . 我们称 $(U^\alpha)_{\alpha>0}$ 为半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 或过程 X 的预解式. 利用初等的计算可以证明 (作业): 对任意的 $\alpha, \beta > 0$ 和 $f \in \mathbf{b}\mathcal{E}$ 有如下的预解方程:

$$(\beta - \alpha) U^\alpha U^\beta f(x) = U^\alpha f(x) - U^\beta f(x), \quad x \in E. \quad (3.4.3)$$

定理 3.4.1 如果对每个 $\alpha > 0$ 和 $f \in C_u(E)$, 在概率测度 $\mathbf{P}^\mu$ 之下 $t \mapsto U^\alpha f(X_t)$ 几乎必然右连续, 那么在 $\mathbf{P}^\mu$ 之下 (X_t) 相对于流 $(\mathcal{G}_{t+}^\mu)$ 具有 $\mathcal{E}$ 强马氏性.

证明 根据定理 3.2.7, 我们需证明在概率测度 $\mathbf{P}^\mu$ 之下 (3.2.7) 对所有 $f \in \mathbf{b}\mathcal{E}$ 和 $(\mathcal{G}_{t+}^\mu)$ 停时 T 成立. 利用单调类定理, 只需考虑 $f \in C_u(E)$. 令 $\{T_n\}$ 是由 (1.4.3) 定义的 T 的二分点离散化 $(\mathcal{G}_t^\mu)$ 停时序列. 则当 $n \rightarrow \infty$, 递降地 $T_n \rightarrow T$. 由 (X_t) 的轨道的右连续性及相关于流 $(\mathcal{G}_t^\mu)$ 的马氏性,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-\alpha t} \mathbf{P}^\mu [f(X_{t+T}) 1_{\{T < \infty\}}] dt \\ &= \mathbf{P}^\mu \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_{t+T}) 1_{\{T < \infty\}} dt \right\} \\ &= \lim_n \mathbf{P}^\mu \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_{t+T_n}) 1_{\{T_n < \infty\}} dt \right\} \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^\infty \mathbf{P}^\mu \left\{ \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_{t+k/2^n}) dt \right) 1_{\{T_n = k/2^n\}} \right\} \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^\infty \mathbf{P}^\mu \left\{ \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right) \circ \theta_{k/2^n} 1_{\{T_n = k/2^n\}} \right\} \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^\infty \mathbf{P}^\mu \left\{ \mathbf{P}^\mu \left[\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right) \circ \theta_{k/2^n} \middle| \mathcal{G}_{k/2^n}^\mu \right] 1_{\{T_n = k/2^n\}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}^{\mu} \left\{ \mathbf{P}^{X_{k/2^n}} \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right) 1_{\{T_n = k/2^n\}} \right\} \\
&= \lim_n \mathbf{P}^{\mu} \left\{ \mathbf{P}^{X_{T_n}} \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right) 1_{\{T_n < \infty\}} \right\} \\
&= \lim_n \mathbf{P}^{\mu} [U^{\alpha} f(X_{T_n}) 1_{\{T_n < \infty\}}] = \mathbf{P}^{\mu} [U^{\alpha} f(X_T) 1_{\{T < \infty\}}] \\
&= \mathbf{P}^{\mu} \left\{ \mathbf{P}^{X_T} \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right) 1_{\{T < \infty\}} \right\} \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \mathbf{P}^{\mu} \left\{ \mathbf{P}^{X_T} [f(X_t)] 1_{\{T < \infty\}} \right\} dt.
\end{aligned}$$

因为 $t \mapsto \mathbf{P}^{\mu} [f(X_{t+T}) 1_{\{T < \infty\}}]$ 与

$$t \mapsto \mathbf{P}^{\mu} \left\{ \mathbf{P}^{X_T} [f(X_t)] 1_{\{T < \infty\}} \right\} = \mathbf{P}^{\mu} [P_t f(X_T) 1_{\{T < \infty\}}]$$

均右连续, 由拉普拉斯变换的惟一性知在概率测度 $\mathbf{P}^{\mu}$ 之下 (3.2.7) 成立. $\square$

推论 3.4.2 如果对每个 $\alpha > 0$ 和 $f \in C_u(E)$, 函数 $x \mapsto U^{\alpha} f(x)$ 在 E 上连续, 那么在每个 $\mathbf{P}^{\mu}$ 之下 (X_t) 相对于流 $(\mathcal{G}_{t+}^{\mu})$ 具有 $\mathcal{E}$ 强马氏性.

定理 3.4.3 如果在概率测度 $\mathbf{P}^{\mu}$ 之下 (X_t) 相对于流 $(\mathcal{G}_{t+}^{\mu})$ 具有 $\mathcal{E}$ 强马氏性, 那么对每个 $\alpha > 0$ 和 $f \in \mathbf{b}\mathcal{E}$ 在 $\mathbf{P}^{\mu}$ 之下 $t \mapsto U^{\alpha} f(X_t)$ 几乎必然右连续.

证明 首先注意流 $(\mathcal{G}_{t+}^{\mu})$ 满足通常条件. 由强马氏性, 对任何有界 $(\mathcal{G}_{t+}^{\mu})$ 停时 T , 利用 (3.4.2) 我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{\mu} [e^{-\alpha T} U^{\alpha} f(X_T)] &= \mathbf{P}^{\mu} \left\{ e^{-\alpha T} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} P_t f(X_T) dt \right\} \\
&= \mathbf{P}^{\mu} \left\{ e^{-\alpha T} \mathbf{P}^{X_T} \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right) \right\} \\
&= \mathbf{P}^{\mu} \left\{ e^{-\alpha T} \mathbf{P}^{\mu} \left[\left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right) \circ \theta_T \middle| \mathcal{G}_{T+}^{\mu} \right] \right\} \\
&= \mathbf{P}^{\mu} \left\{ e^{-\alpha T} \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right) \circ \theta_T \right\} \\
&= \mathbf{P}^{\mu} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\alpha(t+T)} f(X_{t+T}) dt \right\} = \mathbf{P}^{\mu} \left\{ \int_T^{\infty} e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right\}.
\end{aligned}$$

若有有界 $(\mathcal{G}_{t+}^{\mu})$ 停时列 $T_n \downarrow T$, 则

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{\mu} [e^{-\alpha T_n} U^{\alpha} f(X_{T_n})] &= \mathbf{P}^{\mu} \left\{ \int_{T_n}^{\infty} e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right\} \\
&\rightarrow \mathbf{P}^{\mu} \left\{ \int_T^{\infty} e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right\} = \mathbf{P}^{\mu} [e^{-\alpha T} U^{\alpha} f(X_T)],
\end{aligned}$$

对于 $g \in C_u(E)$, 过程 $t \mapsto e^{-\alpha t} g(X_t)$ 右连续, 因而可选. 利用单调类定理可证, 当 $g \in \mathbf{b}\mathcal{E}$ 时, $t \mapsto e^{-\alpha t} g(X_t)$ 也可选. 特别地, $t \mapsto e^{-\alpha t} U^{\alpha} f(X_t)$ 可选. 根据定理 2.3.10 知 $t \mapsto e^{-\alpha t} U^{\alpha} f(X_t)$ 几乎必然右连续, 因此 $t \mapsto U^{\alpha} f(X_t)$ 是几乎必然右连续的. $\square$

定义 3.4.1 假设 $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ 是一个以博雷尔半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为转移半群的右连续马氏过程. 称 X 为右过程, 如果:

- (i) 对每个初始分布 μ , $\alpha > 0$ 和 $f \in \mathbf{b}\mathcal{E}$ 在 $\mathbf{P}^\mu$ 之下 $t \mapsto U^\alpha f(X_t)$ 几乎必然右连续;
- (ii) $(\mathcal{G}_t)$ 右连续且 $(\mathcal{G}, \mathcal{G}_t)$ 在 $\{\mathbf{P}^\mu : \mu \text{ 为初始分布}\}$ 之下是加强的.

为强调转移半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 的博雷尔性, 也称 X 为博雷尔右过程. 如果博雷尔转移半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 有右过程的实现, 就称它是博雷尔右半群.

利用定理 3.3.6 和定理 3.4.1 不难发现, 如果 X 是博雷尔右过程, 那么对每个初始分布 μ , 在概率测度 $\mathbf{P}^\mu$ 之下 (X_t) 相对于流 $(\mathcal{G}_t^\mu)$ 具有 $\mathcal{E}$ 强马氏性.

定理 3.4.4 设 X 是博雷尔右过程, 那么加强的自然流 $(\mathcal{F}_t^\mu)$ 和 $(\bar{\mathcal{F}}_t)$ 都是右连续的.

证明 固定 $s \geq 0$ 并令 $\mathcal{H}$ 是使 $\mathbf{P}^\mu(Y|\mathcal{F}_{s+}^\mu) \in \mathcal{F}_s^\mu$ 成立的所有随机变量 $Y \in \mathbf{b}\mathcal{F}^\mu$ 构成的集合. 由假定和定理 3.4.1 知 (X_t) 相对于流 $(\mathcal{F}_t^\mu)$ 的强马氏性成立. 特别地, 对任意的 $s, t \geq 0$ 和 $f \in \mathbf{b}\mathcal{E}$, 几乎必然地有

$$\mathbf{P}^\mu[f(X_{s+t})|\mathcal{F}_{s+}^\mu] = P_t f(X_s),$$

其中 $P_t f(X_s) \in \mathbf{b}\mathcal{F}_s \subset \mathbf{b}\mathcal{F}_s^\mu$. 因为 $\mathcal{F}_s^\mu$ 使强化的, 由上式得 $\mathbf{P}^\mu[f(X_{s+t})|\mathcal{F}_{s+}^\mu] \in \mathcal{F}_s^\mu$, 即 $f(X_{s+t}) \in \mathcal{H}$. 用数学归纳法可以证明, 对任何 $t_n \geq \dots \geq t_1 \geq 0$ 与 $\{f_1, \dots, f_n\} \subset \mathbf{b}\mathcal{E}$ 有 $f_1(X_{s+t_1}) \cdots f_n(X_{s+t_n}) \in \mathcal{H}$. 再利用单调类定理得 $\mathbf{b}\mathcal{F}^s \subset \mathcal{H}$, 其中 $\mathcal{F}^s = \sigma(X_{s+t} : t \geq 0)$. 因为显然 $\mathbf{b}\mathcal{F}_s \subset \mathcal{H}$, 再由单调类定理得 $\mathbf{b}\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$, 进而 $\mathbf{b}\mathcal{F}^\mu \subset \mathcal{H}$. 特别地, 对每个 $Y \in \mathbf{b}\mathcal{F}_{s+}^\mu$ 有 $Y = \mathbf{P}(Y|\mathcal{F}_{s+}^\mu) \in \mathcal{F}_s^\mu$. 因此 $\mathcal{F}_{s+}^\mu = \mathcal{F}_s^\mu$, 即流 $(\mathcal{F}_t^\mu)$ 是右连续的. 再由 (3.4.1) 易知 $(\bar{\mathcal{F}}_t)$ 的右连续性. $\square$

作为这一节的结束, 我们给出一个简单而重要的结果, 称为布卢门撒尔 (Blumenthal) 的 0-1 律.

定理 3.4.5 令 $A \in \bar{\mathcal{F}}_0$. 则对每个 $x \in E$ 有 $\mathbf{P}^x(A) = 0$ 或 $\mathbf{P}^x(A) = 1$.

证明 首先假定 $A \in \mathcal{F}_0$. 此时, 对某个 $B \in \mathcal{E}$ 有 $A = X_0^{-1}(B)$. 因为 $\mathbf{P}^x\{X_0 = x\} = 1$, 我们有

$$\mathbf{P}^x(A) = \mathbf{P}^x(X_0^{-1}(B)) = \mathbf{P}^x(X_0 \in B) = 1_B(x).$$

此式只能取 0 或 1. 更一般地, 若 $A \in \bar{\mathcal{F}}_0$, 则对每个 $x \in E$ 存在 $A^x \in \mathcal{F}_0$ 使得 $\mathbf{P}^x\{A \triangle A^x\} = 0$. 所以 $\mathbf{P}^x(A) = \mathbf{P}^x(A^x)$ 也只能取 0 或 1. $\square$

从表面上看 $\tilde{\mathcal{F}}_0$ 只是 $\mathcal{F}_0$ 的微不足道的扩张, 上述结果看上去并没有什么令人惊奇的. 但若注意到 $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \tilde{\mathcal{F}}_{0+}$, 则可以给出该结果的一些有力的应用, 它表明一个事件是否会立刻发生是有先兆的. 例如, 若 T 是一个 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 停时, 则 $\{T = 0\} \in \tilde{\mathcal{F}}_0$, 故由上面的结论 $\{T = 0\}$ 在 $\mathbf{P}^x$ 下发生的概率为 0 或 1. 当 T 为某个集合的击中时的情况下, 这种二分性导出了位势理论中的一个基本概念, 即某个点相对于一个集的正则性或一个集合在一点的稀疏性.

第四章 费勒过程

本章里我们讨论一类具有较好分析性质的转移半群所对应的马氏过程, 即费勒 (Feller) 过程. 我们将会看到, 这类马氏过程总有左极右连的实现. 我们还将建立此类过程的强马氏性和拟左连续性. 这些结果将为更一般的研究提供了示范. 本章的主要参考文献是 [5].

§4.1 费勒转移半群

假设 E 为可分的局部紧度量空间, 取 $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ 为其博雷尔 σ 代数. 令 $\tilde{E} = E \cup \{\partial\}$ 是 E 的单点紧化. 也就是说, 如果 E 不是紧的, 那么点 ∂ 的邻域系就是 E 的所有紧子集的补集; 如果 E 是紧的, 那么 ∂ 是 $\tilde{E}$ 的孤立点. 这样 $\tilde{E}$ 是一个紧度量空间, 取其上的一个距离 ρ . 令 $C(E)$ 表示 E 上的所有有界连续函数构成的集合. 对于每个 $f \in C(E)$ 我们定义其上确界范数

$$\|f\| = \sup_{x \in \tilde{E}} |f(x)|. \quad (4.1.1)$$

令 $C_0(E)$ 表示 $C(E)$ 中满足 $\lim_{x \rightarrow \partial} f(x) = 0$ 的函数 f 构成的子类. 如果 E 是紧的, 那么 $C(E) = C_0(E)$. 在范数 $\|\cdot\|$ 下, 函数类 $C(E)$ 和 $C_0(E)$ 都是巴拿赫空间.

引理 4.1.1 我们有 $\mathcal{E} = \sigma(C(E)) = \sigma(C_0(E))$.

证明 因为任何 $f \in C(E)$ 关于 $\mathcal{E}$ 可测, 显然有 $\mathcal{E} \supset \sigma(C(E)) \supset \sigma(C_0(E))$. 另一方面, 设 $G \subset E$ 为开集. 对 $x \in E$ 令 $g(x) = \inf\{\rho(x, z) : z \in G^c\}$ 和 $h(x) = g(x)\rho(x, \partial)$. 显然 h 在 G 上严格正, 在 G^c 上取零值, 而且 $h \in C_0(E)$. 再令 $f_n(x) = 1 \wedge [nh(x)]$ 则 $f_n \in C_0(E)$ 且当 $n \rightarrow \infty$ 有 $f_n(x) \rightarrow 1_G(x)$. 由此知 $\mathcal{E} \subset \sigma(C(E)) \subset \sigma(C_0(E))$. $\square$

定义 4.1.1 假设 $(P_t)_{t \geq 0}$ 是 E 上的转移半群. 我们称 $(P_t)_{t \geq 0}$ 具有费勒性或者是费勒的, 如果下面性质成立:

- (i) 对任意的 $t \geq 0$ 和 $f \in C_0(E)$ 有 $P_t f \in C_0(E)$;
- (ii) 对于任意的 $x \in E$ 和 $f \in C_0(E)$ 有 $\lim_{t \rightarrow 0} P_t f(x) = f(x)$.

若 E 上的马氏过程 X 的转移半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 有费勒性, 则称其为费勒过程.

利用引理 4.1.1 和单调类定理不难证明, 空间 E 上的任何转移半群由它在 $C_0(E)$ 上的限制惟一决定. 因此, 对于费勒半群, 我们可以将其作用空间限定为 $C_0(E)$. 另外, 任何费勒半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 都是博雷尔的, 故可定义其预解式 $(U^\alpha)_{\alpha > 0}$. 不难证明, 例 3.2.1 和例 3.2.3 中定义的半群是费勒半群, 而例 3.2.2 中定义的半群不是费勒半群 (作业).

例 4.1.1 固定常数 $\alpha > 0$. 对于 $f \in b\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 定义 $P_0 f(x) = f(x)$ 和

$$P_t f(x) = e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k t^k}{k!} f(x+k), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

则 $(P_t)_{t \geq 0}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的费勒转移半群. $\square$

例 4.1.2 对于 $f \in b\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 定义 $P_0 f(x) = f(x)$ 和

$$P_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-(y-x)^2/2t} dy, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

则 $(P_t)_{t \geq 0}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的费勒转移半群. $\square$

命题 4.1.2 设 $(P_t)_{t \geq 0}$ 是 E 上的费勒半群. 对于 $\alpha > 0$ 令 $\mathcal{D} := U^\alpha C_0(E)$. 则 $\mathcal{D}$ 为 $C_0(E)$ 的稠密线性子空间且不依赖于常数 α 的选择.

证明 首先, 我们证明对 $\alpha > 0$ 和 $f \in C_0(E)$ 有 $U^\alpha f \in C_0(E)$. 由于 $P_t f \in C_0(E)$, 利用控制收敛定理有

$$U^\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t f(x) dt \rightarrow \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t f(x_0) dt = U^\alpha f(x_0) \quad (x \rightarrow x_0 \in E).$$

类似地, 当 $x \rightarrow \partial$ 有 $U^\alpha f(x) \rightarrow 0$. 这就证明了 $U^\alpha f \in C_0(E)$. 再由预解方程 (3.4.3) 可以看出 $\mathcal{D}$ 为 $C_0(E)$ 的线性子空间且与常数 $\alpha > 0$ 的选择无关. 下证 $\mathcal{D}$ 在 $C_0(E)$ 中稠密. 否则, 存在 $g \in C_0(E)$ 满足 $\inf_{f \in \mathcal{D}} \|f - g\| > 0$. 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $C_0(E)$ 上的有界线性泛函 ϕ 使 $\phi(g) \neq 0$ 同时对任意 $f \in \mathcal{D}$ 有 $\phi(f) = 0$; 如可参见 [13, p.214]. 利用 Riesz 表现定理, 有 E 上的有限符号测度 μ 使 $\phi(f) = \int_E f d\mu, f \in C_0(E)$. 由于 $\alpha U^\alpha g \in \mathcal{D}$, 我们有

$$0 = \phi(\alpha U^\alpha g) = \int_E \alpha U^\alpha g(x) \mu(dx) = \int_E \mu(dx) \int_0^\infty e^{-s} P_{s/\alpha} g(x) ds.$$

在上式中令 $\alpha \rightarrow \infty$, 利用控制收敛定理和条件 (ii) 得到 $0 = \int_E g d\mu = \phi(g)$, 与 ϕ 的取法矛盾. 故 $\mathcal{D}$ 在 $C_0(E)$ 中的稠密. $\square$

定理 4.1.3 若 $(P_t)_{t \geq 0}$ 是 E 上的费勒半群, 则对任何 $f \in C_0(E)$ 有 $\lim_{t \rightarrow 0} \|P_t f - f\| = 0$.

证明 由命题 4.1.2 知 $\mathcal{D} := U^\alpha C_0(E)$ 在 $C_0(E)$ 中稠密. 对于 $t, \alpha > 0$ 和 $g \in C_0(E)$ 有

$$P_t U^\alpha g(x) - U^\alpha g(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha s} P_{t+s} g(x) ds - \int_0^\infty e^{-\alpha s} P_s g(x) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_t^\infty e^{-\alpha(s-t)} P_s g(x) ds - \int_0^\infty e^{-\alpha s} P_s g(x) ds \\
&= (e^{\alpha t} - 1) \int_t^\infty e^{-\alpha s} P_s g(x) ds - \int_0^t e^{-\alpha s} P_s g(x) ds.
\end{aligned}$$

显然, 当 $t \rightarrow 0$ 时, 上式在上确界范数下趋于零. 所以对 $f \in \mathcal{D}$ 有 $\lim_{t \rightarrow 0} \|P_t f - f\| = 0$. 由 $\mathcal{D}$ 在 $C_0(E)$ 中的稠密性易得予证结论. $\square$

推论 4.1.4 假设 $(P_t)_{t \geq 0}$ 是 E 上的费勒半群. 那么映射 $(s, x, f) \rightarrow P_s f(x)$ 在 $[0, \infty) \times E \times C_0(E)$ 上连续.

证明 对于任何 $(s, x, f), (t, y, g) \in [0, \infty) \times E \times C_0(E)$ 我们有

$$\begin{aligned}
|P_s f(x) - P_t g(y)| &\leq |P_s f(x) - P_s g(x)| + |P_s g(x) - P_t g(x)| + |P_t g(x) - P_t g(y)| \\
&\leq \|P_s(f - g)\| + P_{s \wedge t} |P_{|t-s|} g - g|(x) + |P_t g(x) - P_t g(y)| \\
&\leq \|f - g\| + \|P_{|t-s|} g - g\| + |P_t g(x) - P_t g(y)|.
\end{aligned}$$

由定理 4.1.3, 上式右端当 $(s, x, f) \rightarrow (t, y, g)$ 时趋于零. $\square$

推论 4.1.5 假设 $(P_t)_{t \geq 0}$ 是费勒半群, 而 $(U^\alpha)_{\alpha > 0}$ 是它的预解式. 那么对任何 $f \in C_0(E)$ 有

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|\alpha U^\alpha f - f\| = 0. \quad (4.1.2)$$

证明 对于任何 $\alpha > 0$, 我们有

$$\|\alpha U^\alpha f - f\| \leq \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t} \|P_t f - f\| dt \leq \int_0^\infty e^{-s} \|P_{s/\alpha} f - f\| ds.$$

由定理 4.1.3 和控制收敛定理, 上式右端当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时趋于零. $\square$

不难看出, 算子 αU^α 在 $\alpha \rightarrow 0$ 和 $\alpha \rightarrow \infty$ 时所表现的性质对应于 P_t 当 $t \rightarrow 0$ 和 $t \rightarrow \infty$ 的性质. 这在拉普拉斯变换的理论中是熟知的. 事实上, 预解式 $(U^\alpha)_{\alpha > 0}$ 正是半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 在算子意义下的拉普拉斯变换.

下面我们考虑 E 上保守的费勒半群 $(P_t)_{t \geq 0}$. 因为 E 是可分的局部紧度量空间, 总可在其上选取一个完备的距离生成其拓扑. 根据定理 3.3.4, 对于 E 上的任何概率测度 μ , 都存在以 μ 为初始分布以 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为转移半群的马氏过程. 为了用鞅论的方法研究费勒过程的性质, 我们引入下面的概念:

定义 4.1.2 设 f 是定义于 E , 取值于 $[0, \infty]$ 的博雷尔可测函数. 如果对每个 $t \geq 0$ 有 $f \geq e^{-\alpha t} P_t f$, 我们说 f 关于 $(P_t)_{t \geq 0}$ 是 α 上平均的. 若还有 $f = \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\alpha t} P_t f$, 就说 f 是 α 过份的.

假设 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ 是完备的概率空间, 而 $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ 是定义在此概率空间上的流. 设 $X = (X_t : t \geq 0)$ 是 E 上的相对于 $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ 以 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为转移半群的 $\mathcal{E}$ 马氏过程.

命题 4.1.6 设 f 是 α 上平均的且 $f(X_t)$ 对每个 $t \geq 0$ 可积, 则 $\{e^{-\alpha t} f(X_t) : t \geq 0\}$ 是关于 $(\mathcal{G}_t : t \geq 0)$ 的上鞅.

证明 对于 $t \geq r \geq 0$, 由 f 的 α 上平均性和 $(X_t, \mathcal{G}_t)$ 的马氏性可得

$$\mathbf{P}[e^{-\alpha t} f(X_t) | \mathcal{G}_r] = e^{-\alpha t} \mathbf{P}[f(X_t) | \mathcal{G}_r] = e^{-\alpha t} P_{t-r} f(X_r) \leq e^{-\alpha r} f(X_r).$$

所以 $\{e^{-\alpha t} f(X_t) : t \geq 0\}$ 是关于 $(\mathcal{G}_t : t \geq 0)$ 的上鞅. $\square$

上述命题给出了马氏过程与鞅论的一种联系. 这种联系使 α 上平均函数和 α 过份函数在马氏过程的研究中发挥了重要的作用. 进一步, 我们有

命题 4.1.7 设 $\alpha > 0$, $f \in \text{bp}\mathcal{E}$. 则 $U^\alpha f$ 是 α 过份函数, 进而 $\{e^{-\alpha t} U^\alpha f(X_t) : t \geq 0\}$ 是关于 $(\mathcal{G}_t : t \geq 0)$ 的上鞅.

证明 对任何 $\alpha > 0$, 我们有

$$e^{-\alpha t} P_t(U^\alpha f) = e^{-\alpha t} \int_0^\infty e^{-\alpha s} P_{t+s} f ds = \int_t^\infty e^{-\alpha s} P_s f ds \leq U^\alpha f.$$

这表明 $U^\alpha f$ 是 α 上平均的. 当 $t \rightarrow 0$ 上面第三项收敛到第四项, 因而 $U^\alpha f$ 是 α 过份的. 因为 $U^\alpha f$ 有界, 由命题 4.1.6 可得此命题的最后一结论. $\square$

命题 4.1.8 设 (X_t) 关于 $(\mathcal{G}_t)$ 循序可测. 对 $\alpha > 0$ 和 $f \in \text{bp}\mathcal{E}$ 定义

$$Y_t = \int_0^t e^{-\alpha s} f(X_s) ds + e^{-\alpha t} U^\alpha f(X_t). \quad (4.1.3)$$

则 (Y_t) 是关于 $(\mathcal{G}_t)$ 循序可测的右闭鞅, 从而一致可积.

证明 注意 (4.1.3) 式右边第一项关于 $t \geq 0$ 连续, 故作为过程循序可测. 而由于 $U^\alpha f \in \text{bp}\mathcal{E}$, 过程 $\{U^\alpha f(X_t)\}$ 也循序可测. 所以 (Y_t) 关于 $(\mathcal{G}_t)$ 循序可测. 现定义有界随机变量

$$Y_\infty = \int_0^\infty e^{-\alpha s} f(X_s) ds. \quad (4.1.4)$$

在马氏系的记号下, 我们有

$$U^\alpha f(x) = \mathbf{P}^x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} f(X_s) ds \right] = \mathbf{P}^x(Y_\infty). \quad (4.1.5)$$

所以, 利用马氏性可得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(Y_\infty | \mathcal{G}_t) &= \int_0^t e^{-\alpha s} f(X_s) ds + \mathbf{P} \left[\int_t^\infty e^{-\alpha s} f(X_s) ds \middle| \mathcal{G}_t \right] \\
 &= \int_0^t e^{-\alpha s} f(X_s) ds + \mathbf{P} \left[\int_0^\infty e^{-\alpha(t+s)} f(X_{t+s}) ds \middle| \mathcal{G}_t \right] \\
 &= \int_0^t e^{-\alpha s} f(X_s) ds + \mathbf{P} \left[e^{-\alpha t} \int_0^\infty e^{-\alpha s} f(X_s \circ \theta_t) ds \middle| \mathcal{G}_t \right] \\
 &= \int_0^t e^{-\alpha s} f(X_s) ds + e^{-\alpha t} \mathbf{P}(Y_\infty \circ \theta_t | \mathcal{G}_t) \\
 &= \int_0^t e^{-\alpha s} f(X_s) ds + e^{-\alpha t} \mathbf{P}^{X_t}(Y_\infty) \\
 &= \int_0^t e^{-\alpha s} f(X_s) ds + e^{-\alpha t} U^\alpha f(X_t) = Y_t.
 \end{aligned}$$

因 Y_∞ 有界, 故 (Y_t) 是右闭鞅, 从而一致可积. $\square$

鞅论中著名的杜布-梅耶尔 (Doob-Meyer) 分解把上鞅分解为一个鞅与一个递增过程之差. 显然上述命题给出了杜布-梅耶尔分解的一个特例.

§4.2 轨道性质

首先我们来考虑 E 是紧度量空间的情况. 设 d 为 E 上的一个距离. 我们说 E 上的实函数族 $\mathcal{D}$ 分离 E 的点, 是指对于任何 $x \neq y \in E$ 都存在 $g \in \mathcal{D}$ 使得 $g(x) \neq g(y)$. 这是 Stone-Weierstrass 定理中用到的一个概念.

因为 E 是紧度量空间, 我们有 $C(E) = C_0(E)$. 假设 $(P_t)_{t \geq 0}$ 是 E 上的保守费勒转移半群, 相应的预解式记为 $(U^\alpha)_{\alpha > 0}$. 根据定理 3.2.6, 对于 E 上任何概率测度 μ , 存在以 μ 为初始分布以 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为转移半群的马氏过程. 假定 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P})$ 是带流的概率空间, 而 $(X_t : t \geq 0)$ 是定义在此概率空间上相对于流 $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ 的马氏过程, 以 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为转移半群.

命题 4.2.1 费勒过程 $(X_t : t \geq 0)$ 是随机连续的, 即对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $s \geq 0$ 有

$$\lim_{t \rightarrow s} \mathbf{P}(d(X_s, X_t) \geq \varepsilon) = 0. \quad (4.2.1)$$

证明 令 $f, g \in C(E)$. 对于 $t > s \geq 0$ 利用 (X_t) 的马氏性得

$$\mathbf{P}[f(X_s)g(X_t)] = \mathbf{P}[f(X_s)P_{t-s}g(X_s)] \rightarrow \mathbf{P}[f(X_s)g(X_s)] \quad (t \rightarrow s+).$$

令一方面, 对于 $s \geq t \geq 0$ 由马氏性有

$$|\mathbf{P}[f(X_s)g(X_t)] - \mathbf{P}[f(X_s)g(X_s)]|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\mathbf{P}[f(X_s)g(X_t)] - \mathbf{P}[f(X_t)g(X_t)]| + |\mathbf{P}[f(X_t)g(X_t)] - \mathbf{P}[f(X_s)g(X_s)]| \\
&\leq |\mathbf{P}[P_{t-s}f(X_t)g(X_t)] - \mathbf{P}[f(X_t)g(X_t)]| + |\mathbf{P}[f(X_t)g(X_t)] - \mathbf{P}[P_{t-s}(fg)(X_t)]| \\
&\leq \mathbf{P}[|(P_{t-s}f(X_t) - f(X_t))g(X_t)|] + \mathbf{P}[|f(X_t)g(X_t) - P_{t-s}(fg)(X_t)|] \\
&\leq \|(P_{t-s}f - f)g\| + \|(fg) - P_{t-s}(fg)\|.
\end{aligned}$$

上式右端随着 $t \rightarrow s-$ 趋于零. 综上我们得到

$$\lim_{t \rightarrow s} \mathbf{P}[f(X_s)g(X_t)] = \mathbf{P}[f(X_s)g(X_s)]. \quad (4.2.2)$$

下证对于任意的 $h \in C(E^2)$ 有

$$\lim_{t \rightarrow s} \mathbf{P}[h(X_s, X_t)] = \mathbf{P}[h(X_s, X_s)]. \quad (4.2.3)$$

事实上, 如果存在 $\{f_1, g_1, \dots, f_n, g_n\} \subset C(E)$ 使得

$$h(x, y) = \sum_{k=1}^n f_k(x)g_k(y), \quad x, y \in E, \quad (4.2.4)$$

由 (4.2.2) 知 (4.2.3) 成立. 由于形如 (4.2.4) 的函数分离 E 的点, 根据 Stone-Weierstrass 定理, 任何 $h \in C(E^2)$ 都可用形如 (4.2.4) 的函数序列一致地逼近; 参见 [13, p.95]. 据此易证 (4.2.3) 对于一般的 $h \in C(E^2)$ 也成立. 取 $h: E \times E \rightarrow [0, \infty)$ 为 E 的度量 d 得 $\lim_{t \rightarrow s} \mathbf{P}[d(X_s, X_t)] = 0$. 再利用 Chebyshev 不等式即得 (4.2.1). $\square$

引理 4.2.2 假设 $t \mapsto \xi(t)$ 是 $[0, \infty)$ 的可数稠子集 S 到 E 的映射, 而函数类 $\mathcal{C} \subset C(E)$ 分离 E 的点. 那么:

- (1) 若对任何 $g \in \mathcal{C}$ 映射 $S \ni t \mapsto g(\xi(t))$ 在 $[0, \infty)$ 上有右极限, 则 $S \ni t \mapsto \xi(t)$ 在 $[0, \infty)$ 有右极限;
- (2) 若对任何 $g \in \mathcal{C}$ 映射 $S \ni t \mapsto g(\xi(t))$ 在 $(0, \infty)$ 上有左极限, 则 $S \ni t \mapsto \xi(t)$ 在 $(0, \infty)$ 有左极限.

证明 假设 $S \ni t \mapsto \xi(t)$ 在某点 $t \in [0, \infty)$ 不存在右极限. 由于 E 是紧度量空间, 存在 $s_n, t_n \in S$ 满足 $s_n \downarrow t$ 和 $t_n \downarrow t$, 而同时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(s_n) = x \neq y = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(t_n)$. 由于 $\mathcal{C}$ 分离点, 存在 $g \in \mathcal{C}$ 使得 $g(x) \neq g(y)$. 因为 g 连续, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\xi(s_n)) = g(x) \neq g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(\xi(t_n)).$$

这与假设矛盾, 故 (1) 成立. 类似地可证明 (2). $\square$

现在取 E 的一个可数基 $\{O_n : n = 1, 2, \dots\}$. 可以证明这样的可数基是存在的 (作业). 对于 $x \in E$ 令 $f_n(x) = \inf\{d(x, y) : y \in O_n^c\}$. 容易证明 $\{f_1, f_2, \dots\} \subset pC(E)$ 分离 E 的点.

引理 4.2.3 可数函数族 $\mathcal{C}_0 := \{U^\alpha f_n : \alpha, n = 1, 2, \dots\} \subset \text{p}C(E)$ 分离 E 的点.

证明 对于任何 $x \neq y \in E$ 存在某个 O_n 使得 $x \in O_n$ 而 $y \notin \bar{O}_n$, 故 $f_n(x) > 0 = f_n(y)$. 由推论 4.1.5, 当 $\alpha \rightarrow \infty$ 有 $\alpha U^\alpha f_n(x) \rightarrow f_n(x)$ 和 $\alpha U^\alpha f_n(y) \rightarrow f_n(y) = 0$. 因此有足够大的整数 $\alpha \geq 1$ 使得

$$|\alpha U^\alpha f_n(x) - f_n(x)| + \alpha U^\alpha f_n(y) < \frac{1}{2} f_n(x).$$

所以有

$$\alpha U^\alpha f_n(x) > \frac{1}{2} f_n(x) > \alpha U^\alpha f_n(y).$$

因而 $U^\alpha f_n(x) \neq U^\alpha f_n(y)$, 故 $\mathcal{C}_0$ 分离 E 的点. $\square$

命题 4.2.4 令 S 是 $[0, \infty)$ 的可数稠子集. 则存在 $\Omega_0 \in \mathcal{G}$ 使 $P(\Omega_0) = 1$ 且对每个 $\omega \in \Omega_0$ 样本函数 $S \ni t \mapsto X_t(\omega)$ 在 $[0, \infty)$ 有右极限, 在 $(0, \infty)$ 有左极限.

证明 设 $\mathcal{C}_0$ 如引理 4.2.3 所给. 则对 $g \in \mathcal{C}_0$ 有 $\alpha \geq 1$ 和 $f \in \text{p}C_0(E)$ 使 $g = U^\alpha f$. 由命题 4.1.7 知 $t \mapsto e^{-\alpha t} g(X_t)$ 是非负上鞅. 根据定理 2.3.1, 存在 $\Omega_g \in \mathcal{G}$ 满足 $P(\Omega_g) = 1$ 且对每个 $\omega \in \Omega_g$ 函数 $S \ni t \mapsto e^{-\alpha t} g(X_t(\omega))$ 有有限的左右极限, 从而 $S \ni t \mapsto g(X_t(\omega))$ 有有限的左右极限. 令 $\Omega_0 = \bigcap_{g \in \mathcal{C}_0} \Omega_g \in \mathcal{G}$. 则 $P(\Omega_0) = 1$ 且对 $\omega \in \Omega_0$ 和 $g \in \mathcal{C}_0$ 函数 $S \ni t \mapsto g(X_t(\omega))$ 有有限的左右极限. 根据引理 4.2.2 知对所有 $\omega \in \Omega_0$ 轨道 $S \ni t \mapsto X_t(\omega)$ 有左右极限. $\square$

有了上面的准备, 我们来对过程 $(X_t : t \geq 0)$ 的样本轨道进行正则化. 设 Ω_0 如命题 4.2.4 中所取. 对于 $\omega \in \Omega_0^c$ 令 $\tilde{X}_t(\omega) = \hat{X}_t(\omega) = X_0(\omega)$. 对于 $\omega \in \Omega_0$ 令

$$\tilde{X}_t(\omega) = \lim_{S \ni s \downarrow t} X_s(\omega) \quad (t \geq 0), \quad \hat{X}_t(\omega) = \lim_{S \ni s \uparrow t} X_s(\omega) \quad (t > 0), \quad (4.2.5)$$

并补充定义 $\hat{X}_0(\omega) = X_0(\omega)$. 不难看出, 对于每个 $\omega \in \Omega$, 函数 $t \mapsto \tilde{X}_t(\omega)$ 右连续且在每个 $t > 0$ 有左极限 $\hat{X}_t(\omega)$. 类似地, 对于每个 $\omega \in \Omega$, 函数 $t \mapsto \hat{X}_t(\omega)$ 左连续且在每个 $t \geq 0$ 有右极限 $\tilde{X}_t(\omega)$.

定理 4.2.5 由 (4.2.5) 定义的过程 $(\tilde{X}_t : t \geq 0)$ 和 $(\hat{X}_t : t \geq 0)$ 都是 $(X_t : t \geq 0)$ 的修正. 它们都是相对于 $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ 的强化流 $(\mathcal{G}_t^*)_{t \geq 0}$ 的马氏过程, 且以 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为转移半群.

证明 注意依概率收敛蕴含存在几乎处处必然收敛的子列. 因此, 依据命题 4.2.1, 对每个固定的 $t \geq 0$ 存在 $s_n \in S$ 使 $s_n \downarrow t$ 且几乎必然地 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{s_n} = X_t$. 但是另一方面, 几乎必然地 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{s_n} = \tilde{X}_t$, 故对每个 $t \geq 0$ 成立 $\mathbf{P}(\tilde{X}_t = X_t) = 1$, 即 $(\tilde{X}_t)$ 是 (X_t) 的修

正. 由命题 1.4.4 知 $(\tilde{X}_t)$ 关于强化流 $(\mathcal{G}_t^*)$ 适应. 再由定理 3.3.2 知 (X_t) 相对于 $(\mathcal{G}_t^*)$ 也是以 (P_t) 为转移半群的马氏过程. 故对 $t \geq s \geq 0$, $f \in b\mathcal{E}$ 和 $G \in b\mathcal{G}_s^*$ 有

$$\mathbf{P}[f(\tilde{X}_{s+t})G] = \mathbf{P}[f(X_{s+t})G] = \mathbf{P}[P_s f(X_t)G] = \mathbf{P}[P_s f(\tilde{X}_t)G].$$

这就得到关于 $(\tilde{X}_t)$ 的断言. 关于 $(\tilde{X}_t)$ 的证明是类似的. $\square$

现在考虑一般的可分局部紧度量空间 E . 设 $(P_t)_{t \geq 0}$ 是 E 上的费勒半群, 其预解式记为 $(U^\alpha)_{\alpha > 0}$. 令 $\tilde{E} = E \cup \{\partial\}$ 是 E 的单点紧化. 我们可以将 $(P_t)_{t \geq 0}$ 扩张成 $\tilde{E}$ 上的保守费勒半群 $(\tilde{P}_t)_{t \geq 0}$, 相应的预解式记为 $(\tilde{U}^\alpha)_{\alpha > 0}$. 对于 $\tilde{E}$ 上的任何概率测度 μ , 根据定理 4.2.5, 存在以 $\tilde{E}$ 为状态空间, 以 μ 为初始分布, 以 $(\tilde{P}_t)_{t \geq 0}$ 为转移半群的左极右连马氏过程 $\{(Y_t, \mathcal{G}_t) : t \geq 0\}$. 它的样本函数也许可以取到附加点 ∂ , 做为一个值或者左极限.

定理 4.2.6 令 $\zeta = \inf\{t \geq 0 : Y_{t-} = \partial \text{ 或 } Y_t = \partial\}$. 那么在集合 $\{\zeta < \infty\}$ 上几乎必然有 $Y_{\zeta+t} = \partial$ 对所有 $t \geq 0$ 成立.

证明 设 ρ 是 $\tilde{E}$ 的一个度量. 对于 $x \in \tilde{E}$ 令 $f(x) = \rho(x, \partial)$. 那么 $f(x)$ 仅在 $x = \partial$ 处取零值. 因为 $f \in C(\tilde{E}) = C_0(\tilde{E})$, 当 $t \rightarrow 0$ 一致地有 $\tilde{P}_t f \rightarrow f$. 不难看出

$$\tilde{U}^1 f(x) = \int_0^\infty e^{-t} \tilde{P}_t f(x) dt$$

也是仅在 $x = \partial$ 取零值. 记 $Z_t = e^{-t} \tilde{U}^1 f(Y_t)$. 因为 (Y_t) 左极右连, 故 (Z_t) 左极右连. 再注意 $\zeta = \inf\{t \geq 0 : Z_{t-} = 0 \text{ 或 } Z_t = 0\}$. 由命题 4.1.7 知 $\{(Z_t, \mathcal{G}_t) : t \geq 0\}$ 是非负上鞅. 而根据定理 2.3.7, 在集合 $\{\zeta < \infty\}$ 上几乎必然有 $Z_{\zeta+t} = 0$ 对所有 $t \geq 0$ 成立. 故得要证结论. $\square$

定理 4.2.7 假设 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为保守半群, 而 μ 是 E 上的概率测度. 则对任意的 $T \geq 0$ 有 $\mathbf{P}(t \mapsto Y_t \text{ 在 } [0, T] \text{ 上有界}) = 1$.

证明 首先明确, 这里所说的 $t \mapsto Y_t$ 在 $[0, T]$ 上有界是指集合 $(Y_t : t \in [0, T])$ 相对紧. 按定理 4.2.6 中的方式定义 ζ . 因为 μ 是 E 上的概率测度, 对任何 $T \geq 0$ 有

$$\mathbf{P}(\zeta \leq T) = \mathbf{P}(Y_T = \partial) = \mathbf{P}[\tilde{P}_T(Y_0, \{\partial\})] = 0.$$

所以

$$\mathbf{P}\{\zeta < \infty\} = \mathbf{P}\{\text{有 } t \geq 0 \text{ 使 } Y_t = \partial \text{ 或 } Y_{t-} = \partial\} = 0.$$

因此 $(Y_t : t \geq 0)$ 实际上是以 E 为状态空间, 以 μ 为初始分布, 以 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为转移半群的左极右连马氏过程, 而且满足 $\mathbf{P}(t \mapsto Y_t \text{ 在 } [0, T] \text{ 上有界}) = 1$. $\square$

定理 4.2.8 可分局部紧度量空间 E 上保守的费勒半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 必有左极右连的实现.

证明 设 $W = D_E[0, \infty)$ 是所有左极右连函数 $w : [0, \infty) \rightarrow E$ 构成的集合. 令 $X_t(w) = w(t)$ 为坐标过程, 而 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$ 是坐标过程生成的自然 σ 代数. 对于 $t \geq 0$ 和 $w \in W$ 令 $\theta_t w \in W$ 是由 $(\theta_t w)(s) = w(t+s)$ 定义的函数. 对于 $x \in E$ 令 $(Y_t : t \geq 0)$ 是 E 上以 $Y_0 = x$ 为初始值, 以 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为转移半群的左极右连马氏过程. 其存在性由定理 4.2.7 保证. 令 $\mathbf{P}^x$ 为 $(Y_t : t \geq 0)$ 在 $(W, \mathcal{F})$ 上的分布. 与定理 3.3.4 的证明中类似地可以看出 $X = (W, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ 是以 (P_t) 为转移半群的马氏系, 显然它是左极右连的. $\square$

设 ρ 是 $\tilde{E}$ 的一个度量, 并令 $C_u(E)$ 表示 E 上关于 ρ 一致连续的函数构成的集合. 则每个函数 $f \in C_u(E)$ 可以惟一地延拓为 $\tilde{E}$ 上的一致连续函数, 故 $f - f(\partial) \in C_0(E)$. 利用此性质容易证明: 对每个 $\alpha > 0$ 和 $f \in C_u(E)$, 有 $U^\alpha f \in C_u(E)$ (作业).

今设 $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ 是保守的费勒半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 的右连续实现. 那么在每个 $\mathbf{P}^\mu$ 之下 $t \mapsto U^\alpha f(X_t)$ 几乎必然右连续. 根据推论 3.4.2 知 (X_t) 相对于流 $(\mathcal{G}_{t+}^\mu)$ 具有强马氏性, 故 $\bar{X} = (\Omega, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{G}}_{t+}, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ 是以 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为转移半群的博雷尔右过程. 所以保守的费勒半群是博雷尔右半群. 下面的定理给出了一个比强马氏性更强的结论.

定理 4.2.9 设 T 为取有限值的 $(\mathcal{G}_{t+}^\mu)$ 停时, 而非负随机变量 S 满足 $S \geq T$ 和 $S \in \mathcal{G}_{T+}^\mu$. 则对于每个 $f \in \text{b}\mathcal{E}$ 有

$$\mathbf{P}^\mu[f(X_S)1_{\{S < \infty\}} | \mathcal{G}_{T+}^\mu] = P_{S-T}f(X_T)1_{\{S < \infty\}}, \quad (4.2.6)$$

这里右端理解为函数 $(t, x) \mapsto P_t f(x)$ 在 $(t, x) = (S - T, X_T)$ 处的值.

证明 根据函数形式的单调类定理, 我们只需证明 (4.2.6) 对函数 $f \in C_0(E)$ 成立. 对于 $n \geq 1$ 令

$$U_n = \frac{[2^n(S - T)] + 1}{2^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} 1_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq S-T < \frac{k}{2^n}\}} + \infty \cdot 1_{\{S-T=\infty\}}.$$

则在 $\{S - T < \infty\} = \{S < \infty\}$ 上有 $U_n \downarrow (S - T)$. 因为 $S, T \in \mathcal{G}_{T+}^\mu$, 所以 $U_n \in \mathcal{G}_{T+}^\mu$. 因而, 我们有 $\{U_n = k/2^n\} \in \mathcal{G}_{T+}^\mu$. 设 $A \in \mathcal{G}_{T+}^\mu$, 则 $A_{n,k} = A \cap \{U_n = k/2^n\} \in \mathcal{G}_{T+}^\mu$. 由强马氏性有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^\mu\{1_{A \cap \{S < \infty\}} f(X_{T+U_n})\} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}^\mu\{1_{A_{n,k}} f(X_{T+k/2^n})\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}^\mu\{1_{A_{n,k}} P_{k/2^n} f(X_T)\} = \mathbf{P}^\mu\{1_{A \cap \{S < \infty\}} P_{U_n} f(X_T)\}. \end{aligned}$$

由于 $t \mapsto P_t f(x)$ 连续. 令 $n \rightarrow \infty$, 根据过程的右连续性有

$$\mathbf{P}^\mu\{1_{A \cap \{S < \infty\}} f(X_S)\} = \mathbf{P}^\mu\{1_{A \cap \{S < \infty\}} P_{T-S} f(X_T)\}.$$

这就证明了 (4.2.6). $\square$

在上面定理中, 因为要保证 (4.2.6) 右端关于 $\mathcal{G}_{T+}^\mu$ 可测, 所以 S 关于 $\mathcal{G}_{T+}^\mu$ 的可测性假定是自然的. 在定理的条件下, 对于每个 $t \geq 0$ 有 $\{S \leq t\} \in \mathcal{G}_{T+}^\mu$, 进而

$$\{S \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{G}_{t+}^\mu,$$

故 S 为 $(\mathcal{G}_{t+}^\mu)$ 停时. 特别地, 当 $S = T + t$ 时, 定理的结论就是强马氏性.

§4.3 生成元和鞅问题

本节我们对费勒马氏过程的生成元和鞅问题进行简单的讨论. 设 E 是可分的局部紧度量空间. 令 $\tilde{E} = E \cup \{\partial\}$ 是 E 的单点紧化. 回忆 $C_0(E)$ 表示 E 上满足 $\lim_{x \rightarrow \partial} f(x) = 0$ 的函数 f 构成的集合, 它在上确界范数 $\|\cdot\|$ 下是巴拿赫空间.

定义 4.3.1 费勒转移半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 的生成元 A 是巴拿赫空间 $C_0(E)$ 上的一个线性算子, 定义为

$$Af = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P_t f - f), \quad (4.3.1)$$

它的定义域 $\mathcal{D}(A)$ 是使上面极限在上确界范数下存在且属于 $C_0(E)$ 的所有 $f \in C_0(E)$ 构成的集合.

定理 4.3.1 假设费勒半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 有生成元 A . 那么对任意的 $t \geq 0$ 和 $f \in \mathcal{D}(A)$ 有 $P_t f \in \mathcal{D}(A)$ 且

$$\frac{d}{dt} P_t f = A P_t f = P_t A f, \quad (4.3.2)$$

其中的导数在上确界范数收敛下定义.

证明 当 $t = 0$ 时 (4.3.2) 就是 (4.3.1). 对于 $t, s > 0$, 利用半群的压缩性我们有

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{s} (P_{t+s} f - P_t f) - P_t A f \right\| &= \left\| \frac{1}{s} (P_s P_t f - P_t f) - P_t A f \right\| \\ &= \left\| P_t \left[\frac{1}{s} (P_s f - f) - A f \right] \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{s} (P_s f - f) - A f \right\|. \end{aligned}$$

当 $s \rightarrow 0+$ 时上式右端趋于零, 故知 $P_t f \in \mathcal{D}(A)$ 且 (4.3.2) 对右导数成立. 另一方面, 对于 $t > s > 0$ 有

$$\left\| \frac{1}{s} (P_t f - P_{t-s} f) - P_t A f \right\| = \left\| P_{t-s} \left[\frac{1}{s} (P_s f - f) - P_s A f \right] \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| \frac{1}{s}(P_s f - f) - P_s A f \right\| \\
&\leq \left\| \frac{1}{s}(P_s f - f) - A f \right\| + \|A f - P_s A f\|.
\end{aligned}$$

令 $s \rightarrow 0+$ 知 (4.3.2) 对左导数也成立. $\square$

推论 4.3.2 假设费勒半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 有生成元 A . 那么对任意的 $t \geq 0$ 和 $f \in \mathcal{D}(A)$ 有

$$P_t f - f = \int_0^t P_s A f ds = \int_0^t A P_s f ds, \quad (4.3.3)$$

其中的积分在上确界范数收敛下定义.

证明 对于任何整数 $n \geq 1$ 我们有

$$\begin{aligned}
&\left\| (P_t f - f) - \int_0^t P_s A f ds \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{2^n} \left\| (P_{kt/2^n} f - P_{(k-1)t/2^n} f) - \int_{(k-1)t/2^n}^{kt/2^n} P_s A f ds \right\| \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} \left\| P_{(k-1)t/2^n} \left[(P_{t/2^n} f - f) - \int_0^{t/2^n} P_s A f ds \right] \right\| \\
&\leq 2^n \left\| (P_{t/2^n} f - f) - \int_0^{t/2^n} P_s A f ds \right\| \\
&\leq \left\| 2^n (P_{t/2^n} f - f) - t A f \right\| + \left\| \int_0^t (A f - P_{s/2^n} A f) ds \right\|.
\end{aligned}$$

显然, 当 $n \rightarrow \infty$ 时上式右端趋于零, 故 (4.3.3) 中的第一个等号成立. 第二个等号由定理 4.3.1 推得. $\square$

定理 4.3.3 假设费勒半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 有生成元 A . 那么对任意的 $\alpha > 0$ 和 $f \in C_0(E)$ 有 $U^\alpha f \in \mathcal{D}(A)$ 且 $(\alpha - A)U^\alpha f = f$; 而当 $f \in \mathcal{D}(A)$ 有 $U^\alpha(\alpha - A)f = f$.

证明 对于 $\alpha > 0, t \geq 0$ 和 $f \in C_0(E)$ 有

$$P_t U^\alpha f = \int_0^\infty e^{-\alpha s} P_{t+s} f ds = e^{\alpha t} \int_t^\infty e^{-\alpha s} P_s f ds.$$

对上式在 $t = 0$ 求导即得 $A U^\alpha f = \alpha U^\alpha f - f$. 对于 $\alpha > 0, t \geq 0$ 和 $f \in \mathcal{D}(A)$ 有

$$U^\alpha P_t f = \int_0^\infty e^{-\alpha s} P_{s+t} f ds = e^{\alpha t} \int_t^\infty e^{-\alpha s} P_s f ds.$$

对上式在 $t = 0$ 求导并利用有界收敛定理得 $U^\alpha A f = \alpha U^\alpha f - f$. $\square$

推论 4.3.4 设费勒半群 (P_t) 有生成元 A . 那么对任何 $\alpha > 0$ 有 $\mathcal{D}(A) = U^\alpha C_0(E)$. 另外, 若 $f \in C_0(E)$ 且 $g = U^\alpha f$, 则 $Ag = \alpha g - f$.

推论 4.3.5 费勒半群 (P_t) 由其生成元 $(A, \mathcal{D}(A))$ 惟一决定.

证明 假设费勒半群 (P_t) 和 (Q_t) 有相同的生成元 $(A, \mathcal{D}(A))$. 由定理 4.3.3 知 (P_t) 和 (Q_t) 有相同的预解式 (U^α) . 再由拉普拉斯变换的惟一性即知 (P_t) 和 (Q_t) 相等. $\square$

由命题 4.1.2 和推论 4.3.4, 生成元 A 的定义域 $\mathcal{D}(A)$ 是 $C_0(E)$ 的稠密线性子空间.

定理 4.3.6 假设 (P_t) 是以 A 为生成元的费勒半群, 而 (X_t) 是 E 上的关于流 $(\mathcal{G}_t)$ 适应的左极右连过程. 那么 (X_t) 是关于流 $(\mathcal{G}_t)$ 以 (P_t) 为转移半群的马氏过程的充要条件是对于任何 $f \in \mathcal{D}(A)$ 过程

$$M_t(f) := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Af(X_s)ds \quad (4.3.4)$$

相对于 $(\mathcal{G}_t)$ 是鞅.

证明 假设 (X_t) 是以 (P_t) 为转移半群相对于流 $(\mathcal{G}_t)$ 的马氏过程. 对于 $r, t \geq 0$ 和 $f \in \mathcal{D}(A)$, 利用马氏性和推论 4.3.2 有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[M_{r+t}(f)|\mathcal{G}_r] &= \mathbf{P}\left\{\left[f(X_{r+t}) - f(X_0) - \int_r^{r+t} Af(X_s)ds - \int_0^r Af(X_s)ds\right] \middle| \mathcal{G}_r\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\left[f(X_{r+t}) - \int_0^t Af(X_{r+s})ds\right] \middle| \mathcal{G}_r\right\} - f(X_0) - \int_0^r Af(X_s)ds \\ &= P_t f(X_r) - \mathbf{P}^{X_r}\left[\int_0^t Af(X_s)ds\right] - f(X_0) - \int_0^r Af(X_s)ds \\ &= P_t f(X_r) - \int_0^t P_s Af(X_r)ds - f(X_0) - \int_0^r Af(X_s)ds \\ &= f(X_r) - f(X_0) - \int_0^r Af(X_s)ds. \end{aligned}$$

故 $\{M_t(f)\}$ 相对于 $(\mathcal{G}_t)$ 是鞅. 反之, 假设对于任何 $f \in \mathcal{D}(A)$, 由 (4.3.4) 定义的过程 $\{M_t(f)\}$ 相对于 $(\mathcal{G}_t)$ 是鞅. 则对取 $u \geq t \geq 0$ 和 $G \in \mathcal{G}_r$ 有

$$0 = \mathbf{P}\{[M_u(f) - M_t(f)]1_G\} = \mathbf{P}\left\{\left[f(X_u) - f(X_t) - \int_t^u Af(X_s)ds\right]1_G\right\}.$$

再取 $r, t \geq 0$. 对任何整数 $n \geq 1$, 利用 (4.3.3) 和上式有

$$\mathbf{P}\{[f(X_{r+t}) - P_t f(X_r)]1_G\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{2^n} \mathbf{P}\{[P_{t-kt/2^n} f(X_{r+kt/2^n}) - P_{t-(k-1)t/2^n} f(X_{r+(k-1)t/2^n})]1_G\} \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} \mathbf{P}\{[P_{t-kt/2^n} f(X_{r+kt/2^n}) - P_{t-(k-1)t/2^n} f(X_{r+kt/2^n})]1_G\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{2^n} \mathbf{P}\{[P_{t-(k-1)t/2^n} f(X_{r+kt/2^n}) - P_{t-(k-1)t/2^n} f(X_{r+(k-1)t/2^n})]1_G\} \\
&= - \sum_{k=1}^{2^n} \mathbf{P}\left\{\left[\int_{t-kt/2^n}^{t-(k-1)t/2^n} AP_s f(X_{r+kt/2^n}) ds\right]1_G\right\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{2^n} \mathbf{P}\left\{\left[\int_{r+(k-1)t/2^n}^{r+kt/2^n} AP_{t-(k-1)t/2^n} f(X_s) ds\right]1_G\right\} \\
&= - \sum_{k=1}^{2^n} \mathbf{P}\left\{\left[\int_{(k-1)t/2^n}^{kt/2^n} P_{t-s} A f(X_{r+kt/2^n}) ds\right]1_G\right\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{2^n} \mathbf{P}\left\{\left[\int_{(k-1)t/2^n}^{kt/2^n} P_{t-(k-1)t/2^n} A f(X_{r+s}) ds\right]1_G\right\}.
\end{aligned}$$

利用半群 (P_t) 的连续性和过程 (X_t) 的轨道的右连续性不难证明, 上式右端当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于零. 所以

$$\mathbf{P}[f(X_{r+t})|G] = \mathbf{P}[P_t f(X_r)|G].$$

由于 $\mathcal{D}(A)$ 在 $C_0(E)$ 中稠密, 上式对于 $f \in C_0(E)$ 也成立. 因此知 (X_t) 满足相对于流 $(\mathcal{G}_t)$ 以 (P_t) 为转移半群的马氏性. $\square$

在定理 4.3.6 的情况下, 我们说 $(X_t, \mathcal{G}_t)$ 满足 $(A, \mathcal{D}(A))$ 的鞅问题. 鞅问题的方法是马氏过程研究中的重要方法. 关于这方面的系统研究, 可以参阅 [8].

§4.4 拟左连续性

本节中我们将证明费勒过程有一些“左侧化”的性质, 并由此导出拟左连续性. 为此需要做一些准备, 主要是有关停时的一些预备知识. 考虑完备的概率空间 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ 和该空间上的 σ 代数流 $(\mathcal{G}_t : t \geq 0)$.

定义 4.4.1 对于 $(\mathcal{G}_t)$ 停时 τ , 令 $\mathcal{G}_{\tau-}$ 是由 $\mathcal{G}_0$ 和形如 $A \cap \{t < \tau\}$, 其中 $t \geq 0$ 且 $A \in \mathcal{G}_t$, 的集合全体记生成的 σ 代数. 显然 τ 关于 $\mathcal{G}_{\tau-}$ 可测.

命题 4.4.1 若 $\tau \equiv t > 0$ (常数), 则有 $\mathcal{G}_{\tau-} = \mathcal{G}_{t-}$.

证明 对于 $0 \leq s < t$ 和 $A \in \mathcal{G}_s$ 有 $A = A \cap \{s < \tau\} \in \mathcal{G}_{t-}$. 所以 $\mathcal{G}_s \subset \mathcal{G}_{t-}$, 进而 $\mathcal{G}_{t-} \subset \mathcal{G}_{\tau-}$. 另一方面, 取 $s \geq 0$ 和 $A \in \mathcal{G}_s$. 若 $t \leq s$, 则 $A \cap \{s < \tau\} = \emptyset$. 若 $t > s$, 则 $A \cap \{s < \tau\} = A$. 在上述两种情况, 都有 $A \cap \{s < \tau\} \in \mathcal{G}_{t-}$. 所以 $\mathcal{G}_{\tau-} \subset \mathcal{G}_{t-}$. $\square$

定义 4.4.2 称映射 $\tau: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ 为 $(\mathcal{G}_t)$ 可料时, 如果存在可选时列 $\{\tau_n\}$ 使得 $\tau_n \uparrow \tau$ 而且在 $\{\tau > 0\}$ 上对每个 n 有 $\tau_n < \tau$. 这种情况下, 我们说 $\{\tau_n\}$ 是 τ 的预报列. 显然, 可料时必然是停时.

命题 4.4.2 对于任意的 $A \in \mathcal{G}_\infty$ 有 $A \cap \{\tau = \infty\} \in \mathcal{G}_{\tau-}$.

证明 令 $\mathcal{A}$ 为使 $A \cap \{\tau = \infty\} \in \mathcal{G}_{\tau-}$ 的所有集合 $A \in \mathcal{G}$ 构成的集类. 显然 $\mathcal{A}$ 为 σ 代数. 若 $A \in \mathcal{G}_t$, 对任何 $s \geq t$ 有 $A \in \mathcal{G}_s$. 所以 $A \cap \{s < \tau\} \in \mathcal{G}_{\tau-}$, 故 $A \cap \{\tau = \infty\} \in \mathcal{G}_{\tau-}$. 这说明 $\mathcal{A} \supset \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{G}_t$, 故 $\mathcal{A} \supset \mathcal{G}_\infty$. $\square$

命题 4.4.3 对每个 $(\mathcal{G}_t)$ 停时 τ 有 $\mathcal{G}_{\tau-} \subset \mathcal{G}_\tau$.

证明 首先有 $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_\tau$. 对于 $t \geq 0$ 取 $A \in \mathcal{G}_t$. 显然 $A \cap \{t < \tau\} \in \mathcal{G}_t$. 对于任何 $s \geq 0$, 当 $s \leq t$ 有 $(A \cap \{t < \tau\}) \cap \{\tau \leq s\} = \emptyset$, 而当 $s > t$ 显然 $(A \cap \{t < \tau\}) \cap \{\tau \leq s\} \in \mathcal{G}_s$. 总之 $A \cap \{t < \tau\} \in \mathcal{G}_\tau$. 所以生成 $\mathcal{G}_{\tau-}$ 的每个集合都属于 $\mathcal{G}_\tau$. 因此 $\mathcal{G}_{\tau-} \subset \mathcal{G}_\tau$. $\square$

命题 4.4.4 如果 σ 和 τ 为 $(\mathcal{G}_t)$ 停时且 $\sigma \leq \tau$, 那么 $\mathcal{G}_{\sigma-} \subset \mathcal{G}_{\tau-}$. 若在 $\{\sigma < \infty\} \cap \{\tau > 0\}$ 上还成立 $\sigma < \tau$, 则 $\mathcal{G}_\sigma \subset \mathcal{G}_{\tau-}$.

证明 对于任何 $A \in \mathcal{G}_t$, 由于 $A \cap \{t < \sigma\} \in \mathcal{G}_t$, 我们有 $A \cap \{t < \sigma\} = (A \cap \{t < \sigma\}) \cap \{t < \tau\} \in \mathcal{G}_{\tau-}$. 所以 $\mathcal{G}_{\sigma-} \subset \mathcal{G}_{\tau-}$. 现设在 $\{\sigma < \infty\} \cap \{\tau > 0\}$ 上还成立 $\sigma < \tau$. 对于任何 $A \in \mathcal{G}_\sigma \subset \mathcal{G}_\infty$ 有

$$A = (A \cap \{\sigma = \infty\}) \cup (A \cap \{\tau = 0\}) \cup \bigcup_{s \in \mathbb{Q}_+} (A \cap \{\sigma < s < \tau\}).$$

因为 $A \cap \{\sigma = \infty\} \in \mathcal{G}_\infty$, 由命题 4.4.2 有

$$A \cap \{\sigma = \infty\} = A \cap \{\sigma = \infty\} \cap \{\tau = \infty\} \in \mathcal{G}_{\tau-}.$$

又由于 $A \cap \{\sigma = 0\} \in \mathcal{G}_0$ 和 $\{\tau = 0\} \in \mathcal{G}_0$, 有

$$A \cap \{\tau = 0\} = (A \cap \{\sigma = 0\}) \cap \{\tau = 0\} \in \mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_{\tau-}.$$

最后, 由于 $A \cap \{\sigma < s\} \in \mathcal{G}_s$, 有

$$A \cap \{\sigma < s < \tau\} = A \cap \{\sigma < s\} \cap \{s < \tau\} \in \mathcal{G}_{\tau-}.$$

综上得 $A \in \mathcal{G}_{\tau-}$, 故 $\mathcal{G}_\sigma \subset \mathcal{G}_{\tau-}$. $\square$

命题 4.4.5 设每个 τ_n 是 $(\mathcal{G}_t)$ 停时且 $\tau_n \uparrow \tau$. 则 $\sigma(\cup_n \mathcal{G}_{\tau_n-}) = \mathcal{G}_{\tau-}$.

证明 显然 $\sigma(\cup_n \mathcal{G}_{\tau_n-}) \subset \mathcal{G}_{\tau-}$. 另一方面, 对每个 n 有 $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_{\tau_n-}$. 再者, 对 $t \geq 0$ 取 $A \in \mathcal{G}_t$, 则有

$$A \cap \{t < \tau\} = A \cap \bigcup_n \{t < \tau_n\} = \bigcup_n (A \cap \{t < \tau_n\}) \in \bigcup_n \mathcal{G}_{\tau_n-}.$$

所以生成 $\mathcal{G}_{\tau-}$ 的每个事件都含于 $\cup_n \mathcal{G}_{\tau_n-}$, 故得 $\mathcal{G}_{\tau-} \subset \sigma(\cup_n \mathcal{G}_{\tau_n-})$. $\square$

命题 4.4.6 设 τ 是 $(\mathcal{G}_t)$ 可料时且以 τ_n 为其预报列. 则 $\sigma(\cup_n \mathcal{G}_{\tau_n}) = \mathcal{G}_{\tau-}$.

证明 由命题 4.4.4 有 $\mathcal{G}_{\tau_n} \subset \mathcal{G}_{\tau-}$, 故 $\sigma(\cup_n \mathcal{G}_{\tau_n}) \subset \mathcal{G}_{\tau-}$. 又由于 $\mathcal{G}_{\tau_n-} \subset \mathcal{G}_{\tau_n}$, 命题 4.4.5 的结论蕴含 $\sigma(\cup_n \mathcal{G}_{\tau_n}) \supset \mathcal{G}_{\tau-}$. $\square$

命题 4.4.7 假定 E 是可分的局部紧度量空间, 而 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{G}$ 的子 σ 代数. 设 X 和 Y 为取值于 E 的两个随机变量. 若对任意 $f \in C_0(E)$ 都有

$$\mathbf{P}\{f(Y)|\mathcal{F}\} = f(X), \quad (4.4.1)$$

则 $\mathbf{P}\{X = Y\} = 1$.

证明 由 (4.4.1) 知 X 关于 $\mathcal{F}$ 可测, 因而对任何 $f, g \in C_0(E)$ 有

$$\mathbf{P}\{f(Y)g(X)\} = \mathbf{P}\{\mathbf{P}[f(Y)g(X)|\mathcal{F}]\} = \mathbf{P}\{g(X)\mathbf{P}[f(Y)|\mathcal{F}]\} = \mathbf{P}\{f(X)g(X)\}.$$

再利用单调类定理可以证明, 对于任何 $h \in \mathcal{C}^2$ 有 $\mathbf{P}\{h(X, X)\} = \mathbf{P}\{h(Y, X)\}$. 因此 $\mathbf{P}\{X = Y\} = 1$. $\square$

命题 4.4.8 令 $(Y_t : t \geq 0)$ 是任意的随机连续的随机过程. 如果对于 $t > 0$ 左右极限 Y_{t-} 和 Y_{t+} 几乎必然存在, 那么该随机过程在 t 处几乎必然连续.

证明 因为 (Y_t) 在 $t > 0$ 处随机连续, 存在数列 $s_n \uparrow t$ 和 $t_n \downarrow t$ 使得几乎必然有 $\lim_n Y_{s_n} = Y_t = \lim_n Y_{t_n}$. 但是上面的这两个极限分别为 Y_{t-} 和 Y_{t+} . 因此 $\mathbf{P}\{Y_{t-} = Y_t = Y_{t+}\} = 1$. $\square$

如果一个随机过程 $(Y_t : t \geq 0)$ 在每个时刻 $t \geq 0$ 都几乎必然连续, 我们称这个过程没有固定的不连续时刻. 这可导出随机连续性, 但是从随机连续并不能导出这个性质.

现在考虑可分的局部紧度量空间 E . 设 $(P_t)_{t \geq 0}$ 是 E 上保守的费勒半群, 而 $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ 为 $(P_t)_{t \geq 0}$ 的右过程实现. 我们用 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$ 表示 (X_t) 的自然 σ 代数, 用 $(\mathcal{F}^\mu, \mathcal{F}_t^\mu)$ 和 $(\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{F}}_t)$ 表示它的加强自然 σ 代数.

定理 4.4.9 设 T 为 $(\mathcal{G}_t^\mu)$ 可料停时. 则对每个 $t \geq 0$, $f \in \text{b}\mathcal{E}$ 和初始分布 μ 有

$$\mathbf{P}^\mu\{f(X_{T+t-})1_{\{T<\infty\}}|\mathcal{G}_{T-}^\mu\} = P_tf(X_{T-})1_{\{T<\infty\}}, \quad (4.4.2)$$

此处我们规定 $X_{0-} = X_0$.

证明 显然我们可以假定 $f \in C_0(E)$. 取预报 T 的停时列 $\{T_n\}$. 注意每个 $T_n < \infty$. 由强马氏性我们得到

$$\mathbf{P}^\mu\{f(X_{T_n+t})|\mathcal{G}_{T_n}\} = P_tf(X_{T_n}).$$

因为 $T_n \in \mathcal{G}_{T_n}$, 由上式对任何 $M \geq 0$ 有

$$\mathbf{P}^\mu\{f(X_{T_n+t})1_{\{T_n \leq M\}}|\mathcal{G}_{T_n}\} = P_tf(X_{T_n})1_{\{T_n \leq M\}}. \quad (4.4.3)$$

因为在集合 $\{T = 0\}$ 上 $T_n = 0$, 在 $\{T > 0\}$ 上 $T_n \uparrow T$, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(X_{T_n+t}) = \begin{cases} f(X_t), & \text{如果 } T = 0, \\ f(X_{T+t-}), & \text{如果 } 0 < T < \infty. \end{cases}$$

由命题 4.4.8 几乎必然 $X_t = X_{t-}$. 因此上式右端统一为 $f(X_{T+t-})$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(X_{T_n+t}) = f(X_{T+t-})$. 类似地有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_tf(X_{T_n}) = P_tf(X_{T-})$. 由命题 4.4.6 知 $\mathcal{G}_{T_n}$ 递增趋向于 $\mathcal{G}_{T-}$. 在 (4.4.3) 中令 $n \rightarrow \infty$ 并对左端应用推论 2.2.5 我们有

$$\mathbf{P}^\mu\{f(X_{T+t-})1_{\{T \leq M\}}|\mathcal{G}_{T-}\} = P_tf(X_{T-})1_{\{T \leq M\}}.$$

令 $M \rightarrow \infty$ 知 (4.4.2) 成立. $\square$

定理 4.4.10 设 T 为 $(\mathcal{G}_t^\mu)$ 可料停时. 则对每个 $t \geq 0$, $f \in \text{b}\mathcal{E}$ 和初始分布 μ 有

$$\mathbf{P}^\mu\{f(X_{T+t})1_{\{T<\infty\}}|\mathcal{G}_{T-}^\mu\} = P_tf(X_{T-})1_{\{T<\infty\}}, \quad (4.4.4)$$

此处我们规定 $X_{0-} = X_0$.

证明 只需考虑 $f \in C_0(E)$. 取序列 $t_n \downarrow t$, 对每个 t_n 应用 (4.4.2), 然后取极限即得到 (4.4.4). $\square$

推论 4.4.11 设 T 为 $(\mathcal{G}_t^\mu)$ 可料停时. 则在 $\{T < \infty\}$ 上相对每个概率测度 $\mathbf{P}^\mu$ 几乎必然地有 $X_T = X_{T-}$.

证明 在 (4.4.4) 中令 $t = 0$ 知对任何 $f \in b\mathcal{E}$ 有

$$\mathbf{P}^\mu\{f(X_T)1_{\{T<\infty\}}|\mathcal{G}_{T-}\} = f(X_{T-})1_{\{T<\infty\}}.$$

现令 $\tilde{E} = E \cup \{\partial\}$ 为 E 的单点紧化, 而 $\tilde{\mathcal{E}}$ 为其博雷尔 σ 代数. 定义 $X_\infty = X_{\infty-} = \partial$ (即使极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t \in E$ 存在). 由上式不难推出, 对任何 $f \in b\tilde{\mathcal{E}}$ 有

$$\mathbf{P}^\mu\{f(X_T)|\mathcal{G}_{T-}\} = f(X_{T-}).$$

根据命题 4.4.7 知几乎必然地有 $X_T = X_{T-}$, 此即定理的结论. $\square$

推论 4.4.12 设 T 为 $(\mathcal{G}_t^\mu)$ 可料停时. 则对于任意的 $Y \in b\bar{\mathcal{G}}$ 和初始分布 μ 有

$$\mathbf{P}^\mu[1_{\{T<\infty\}}Y \circ \theta_T|\mathcal{G}_{T-}^\mu] = \mathbf{P}^{X_{T-}}(Y)1_{\{T<\infty\}}. \quad (4.4.5)$$

定理 4.4.9 和定理 4.4.10 都可认为是强马氏性的“左侧化”版本. 下面的定理不要求 T 可料, 因而加强了推论 4.4.11 的结果.

定理 4.4.13 令 $\{T_n\}$ 是 $(\mathcal{G}_t^\mu)$ 停时列, 且递增到 $(\mathcal{G}_t^\mu)$ 停时 T . 那么在 $\{T < \infty\}$ 上相对每个概率测度 $\mathbf{P}^\mu$ 几乎必然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = X_T$.

证明 我们把问题转化为推论 4.4.11 的情况. 令 $A = \cap_{n \geq 1} \{T_n < T\}$. 我们有 $\{T_n < T\} \in \mathcal{G}_T^\mu$ 和 $A \in \mathcal{G}_T^\mu$. 再定义

$$T'_n = \begin{cases} T_n & \text{在 } \{T_n < T\} \text{ 上,} \\ \infty & \text{在 } \{T_n = T\} \text{ 上;} \end{cases} \quad T' = \begin{cases} T & \text{在 } A \text{ 上,} \\ \infty & \text{在 } A^c \text{ 上.} \end{cases}$$

不难知道 T'_n 和 T' 都是可选的. 在 A 上 $T'_n = T_n$ 递增到 $T = T'$, 而在 $A^c = \cup_{n \geq 1} \{T_n = T\}$ 上 T'_n 显然递增到 T' . 接下来, 注意对任何 n , 在 $A \subset \{T_n < T\}$ 上有 $T'_n = T_n < T = T'$. 由此知在 Ω 上停时 $T'_n \wedge n$ 递增到 T' 并且 $T'_n \wedge n < T'$. 因而 T' 是可料的. 应用推论 4.4.11 的结果, 我们知道在 $\{T' < \infty\} = A \cap \{T' < \infty\} = A \cap \{T < \infty\}$ 上有 $X_{T'} = X_{T'-}$, 进而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{T'_n} = X_{T'-} = X_{T'} = X_T.$$

在 $A^c \cap \{T < \infty\}$ 上显然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{T_n} = X_T$. 从而定理得证. $\square$

上面定理中所描述的性质称为过程 $X = (\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, X_t, \theta_t, \mathbf{P}^x)$ 的拟左连续性. 具有拟左连续性的右过程通常称为亨特 (Hunt) 过程.

我们曾经证明, 对于满足通常条件的概率空间上定义的循序可测过程, 任意集合 $A \in \mathcal{E}$ 的击中时和进入时都是可选的. 但是, 我们的证明依赖于另外一个未证明的定理. 接下来, 我们给出有关此问题的简短讨论, 它还表明了为什么对自然流的加强是必要的. 拟左连续性在这里也发挥着重要作用. 回忆集合 $A \in \mathcal{E}$ 的击中时 T_A 和进入时 D_A 的定义:

$$T_A = \inf\{t > 0 : X_t \in A\}, \quad D_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}.$$

定理 4.4.14 对于任何开集 $A \subset E$, 进入时间 D_A 和击中时间 T_A 相对于右连续化的自然流 $(\mathcal{F}_{t+})$ 是可选的. 对开集或闭集 $A \subset E$, 进入时间 D_A 和击中时间 T_A 相对于加强的自然流 $(\mathcal{F}_t^\mu)$ 和 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 是可选的.

证明 由命题 1.3.11 的证明中的讨论, 我们只需证明对 D_A 的结论. 如果 $A \subset E$ 是开的, 那么对每个 $t > 0$ 有等式

$$\{D_A < t\} = \bigcup_{r \in Q_t} \{X_r \in A\}, \quad (4.4.6)$$

其中 $Q_t = \mathbb{Q} \cap [0, t)$. 事实上, 假定 $D_A < t$, 那么对某个 $s \in [D_A, t)$ 有 $X_s \in A$. 由右连续性知对某个有理数 $r \in (D_A, t)$ 有 $X_r \in A$. 所以 (4.4.6) 的左端是右端的子集. 相反的包含关系显然, 故 (4.4.6) 得证. 因为 (4.4.6) 的右端显然属于 $\mathcal{F}_t$, 我们得出 $\{D_A < t\} \in \mathcal{F}_t$, 从而 $\{D_A \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}$. 这说明 D_A 相对于右连续化的自然流 $(\mathcal{F}_{t+})$ 是可选的. 由于加强的自然流 $(\mathcal{F}_t^\mu)$ 和 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 右连续, 故 D_A 关于这两个流也可选.

接下来我们考虑 $A \subset E$ 是闭集的情况. 此时存在开集序列 A_n 满足对每个 $n \geq 0$ 有 $A_n \supset \bar{A}_{n+1}$ 且 $A = \bigcap_n A_n = \bigcap_n \bar{A}_n$. 例如, 可取 $A_n = \{x \in E : d(x, A) < 1/n\}$. 显然 D_{A_n} 递增且不大于 D_A , 故存在极限

$$S := \uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} D_{A_n} \leq D_A.$$

另外, 对任意 $B \in \mathcal{E}$, 在 $\{D_B < \infty\}$ 上有 $X_{D_B} \in \bar{B}$. 事实上, 如果 $D_B < \infty$, 那么对每个 $\delta > 0$, 存在 $t \in [D_B, D_B + \delta)$ 满足 $X_t \in B$. 因而再由右连续性有 $X_{D_B} \in \bar{B}$ 成立. 这样, 对所有的 n 我们有 $X_{D_{A_n}} \in \bar{A}_n$, 从而由拟左连续性在 $\{S < \infty\}$ 上 $\mathbf{P}^\mu$ 几乎必然地有

$$X_S = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{D_{A_n}} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n = A,$$

这意味着 $S \geq D_A$. 于是在 $\{S < \infty\}$ 上 $\mathbf{P}^\mu$ 几乎必然有 $D_A = S$. 但是在 $\{S = \infty\}$ 上显然 $D_A = S$. 这就证明了 $\mathbf{P}^\mu$ 几乎必然地 $D_A = \uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} D_{A_n}$. 因为每个 D_{A_n} 相对于 $(\mathcal{F}_t^\mu)$ 和 $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ 可选, 所以 D_A 也相对于这两个流可选. $\square$

第五章 莱维过程

莱维过程是一类非常重要的马氏过程, 此类过程具有空间的平移不变性, 这为研究带来很多便利. 本章里我们介绍莱维过程和卷积半群的概念, 并讨论两种最简单的莱维过程, 即普瓦松过程和布朗运动. 在此基础上, 我们给出莱维过程的莱维-伊藤表示定理. 有关莱维过程的系统讨论, 可参见 [1, 17].

§5.1 独立增量性

定义于带流概率空间 $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), \mathbf{P} : t \geq 0)$ 上, 取值于 $\mathbb{R}^d$ 的适应过程 $X = (X_t : t \geq 0)$ 称为相对于流 $(\mathcal{G}_t)$ 的独立增量过程, 如果对任何 $t > s \geq 0$, 增量 $X_t - X_s$ 与 $\mathcal{G}_s$ 独立. 若 $X = (X_t : t \geq 0)$ 是相对于流 $(\mathcal{G}_t)$ 的独立增量过程, 而且对任何 $t > s \geq 0$ 及 $r \geq 0$, 增量 $X_{r+t} - X_{r+s}$ 与 $X_t - X_s$ 还是同分布的, 则称 $X = (X_t : t \geq 0)$ 为相对于流 $(\mathcal{G}_t)$ 的平稳独立增量过程或莱维过程.

定义 5.1.1 设 $(\mu_t)_{t \geq 0}$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 上的概率测度族. 称 $(\mu_t)_{t \geq 0}$ 为卷积半群, 如果 $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$ ($s, t \geq 0$) 且当 $t \rightarrow 0+$ 时 $\mu_t \xrightarrow{w} \delta_0$. 这里 “*” 表示卷积, 而 “ $\xrightarrow{w}$ ” 表示概率测度的弱收敛.

假若 $X = (X_t : t \geq 0)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上相对于流 $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ 的平稳独立增量过程, 记 $X_t - X_0$ 的分布为 μ_t , 则显然 $(\mu_t)_{t \geq 0}$ 构成一个卷积半群, 称为 X 的卷积半群. 显然, 若 $(X_t : t \geq 0)$ 为相对于流 $(\mathcal{G}_t)$ 的莱维过程, 则 $(X_t - X_0 : t \geq 0)$ 为相对于该流的零初值莱维过程, 并且二者具有相同的卷积半群. 所以, 在很多情况下, 我们可以只研究零初值的莱维过程, 而将一般初值的结果作为推论.

卷积半群是研究莱维过程的重要和基本的工具. 给定 $\mathbb{R}^d$ 上的卷积半群 $(\mu_t)_{t \geq 0}$, 对于任何 $t \geq 0$ 我们可以定义 $\mathbb{R}^d$ 上的核 $P_t(x, dy)$ 如下:

$$P_t(x, B) = \mu_t(B - x), \quad x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (5.1.1)$$

其中 $B - x := \{y - x : y \in B\} = \{z : z + x \in B\}$. 利用示性函数-简单函数-有界可测函数的程序, 不难验证

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) P_t(x, dy) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x + z) \mu_t(dz), \quad f \in \mathbf{b}\mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (5.1.2)$$

定理 5.1.1 由 (5.1.1) 定义的核 $(P_t)_{t \geq 0}$ 构成 $\mathbb{R}^d$ 上一个费勒转移半群.

证明 假设 $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$. 由 (5.1.2) 显然有 $P_t f \in C_0(\mathbb{R}^d)$. 因为当 $t \rightarrow 0+$ 时 $\mu_t \xrightarrow{w} \delta_0$, 所以对任何 $x \in \mathbb{R}^d$ 有 $P_t f(x) \rightarrow f(x)$. 另外, 对于 $s, t \geq 0$ 有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} P_s(x, dy) \int_{\mathbb{R}^d} f(z) P_t(y, dz) &= \int_{\mathbb{R}^d} P_s(x, dy) \int_{\mathbb{R}^d} f(y+z) \mu_t(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mu_s(dy) \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y+z) \mu_t(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x+z) \mu_{s+t}(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z) P_{s+t}(x, dz). \end{aligned}$$

所以 $(P_t)_{t \geq 0}$ 是一个转移半群. $\square$

引理 5.1.2 设 $\mathcal{F}$ 是 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ 上的 σ 代数, 而 (X, Y) 是取值于抽象乘积可测空间 $(E^2, \mathcal{E}^2)$ 的随机变量, 且 X 关于 $\mathcal{F}$ 可测. 则对任何 $f \in b\mathcal{E}^2$ 有

$$\mathbf{P}[f(X, Y) | \mathcal{F}] = \mathbf{P}[f(x, Y) | \mathcal{F}]|_{x=X}.$$

证明 若有 $g, h \in b\mathcal{E}$ 使得 $f(x, y) \equiv g(x)h(y)$, 则结论显然. 对于一般的函数 f , 结论可由单调类定理推出. $\square$

定理 5.1.3 设 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为由 (5.1.1) 定义的转移半群, 而 $X = (X_t : t \geq 0)$ 相对于流 $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ 是以 $(\mu_t)_{t \geq 0}$ 为卷积半群的莱维过程. 那么 X 相对于流 $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ 是以 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为转移半群的马氏过程.

证明 任取 $f \in b\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. 对于 $t \geq s \geq 0$, 注意到 $X_t - X_s$ 与 $\mathcal{G}_s$ 的独立性, 对 $f(x, y) = f(x+y)$ 应用引理 5.1.2 和 (5.1.2) 有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[f(X_t) | \mathcal{G}_s] &= \mathbf{P}[f(X_s + X_t - X_s) | \mathcal{G}_s] = \mathbf{P}[f(x + X_t - X_s) | \mathcal{G}_s]|_{x=X_s} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x+y) \mu(dy) |_{x=X_s} = P_{t-s} f(X_s) |_{x=X_s} = P_{t-s} f(X_s). \end{aligned}$$

所以 X 相对于流 $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ 是以 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为转移半群的马氏过程. $\square$

定理 5.1.4 设 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为由 (5.1.1) 定义的转移半群, 而 $X = (X_t : t \geq 0)$ 相对于流 $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ 是以 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为转移半群的马氏过程. 则 X 相对于流 $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ 是以 $(\mu_t)_{t \geq 0}$ 为卷积半群的莱维过程.

证明 对于 $f \in b\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 和 $t \geq 0$, 由 (5.1.2) 有

$$\mathbf{P}^x[f(X_t - X_0)] = \mathbf{P}^x[f(X_t - x)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(y - x) P_t(x, dy) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \mu_t(dy).$$

再由马氏性, 对 $t \geq s \geq 0$ 有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^x[f(X_t - X_s)|\mathcal{G}_s] &= \mathbf{P}^x[f(X_{t-s} - X_0) \circ \theta_s|\mathcal{G}_s] \\ &= \mathbf{P}^{X_s}[f(X_{t-s} - X_0)] = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \mu_{t-s}(dy). \end{aligned}$$

这说明 $X_t - X_s$ 独立于 $\mathcal{G}_s$ 并有分布 μ_{t-s} , 因而 X 相对于流 $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ 是以 $(\mu_t)_{t \geq 0}$ 为卷积半群的莱维过程. $\square$

例 5.1.1 设 $X = (X_t : t \geq 0)$ 是相对于流 $(\mathcal{G}_t)$ 的独立增量过程且可积. 对于 $t \geq s \geq 0$ 有

$$\mathbf{P}(X_t|\mathcal{G}_s) = \mathbf{P}(X_s + (X_t - X_s)|\mathcal{G}_s) = X_s + \mathbf{P}(X_t - X_s) = X_s + \mathbf{P}(X_t) - \mathbf{P}(X_s).$$

因此当 $t \mapsto \mathbf{P}(X_t)$ 单调上升时, X 是下鞅; 当 $t \mapsto \mathbf{P}(X_t)$ 单调下降时, X 是上鞅; 当 $t \mapsto \mathbf{P}(X_t)$ 是常数时, X 是鞅. $\square$

称欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 上的概率测度 μ 是无穷可分的, 如果对任何整数 $n \geq 1$ 都有概率测度 μ_n 使得 $\mu = \mu_n * \cdots * \mu_n$ (n 重卷积). 无穷可分概率测度有一种典型表示. 考虑向量 $b \in \mathbb{R}^d$, 非负定对称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 和 $\mathbb{R}^d$ 上的 σ 有限测度 G . 假定后者满足 $G(\{0\}) = 0$ 且

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 \wedge |y|^2) G(dy) < \infty,$$

其中 “ $|\cdot|$ ” 表示欧氏范数. 在这些条件之下, 可定义 $\mathbb{R}^d$ 上的复值连续函数

$$\psi(\lambda) = i\langle b, \lambda \rangle - \frac{1}{2}\langle \lambda, A\lambda \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle \lambda, y \rangle} - 1 - i\langle \lambda, y \rangle 1_{\{|y| \leq 1\}}) G(dy). \quad (5.1.3)$$

下面的定理是概率论中熟知的, 如可参见 [17, pp.37–38].

定理 5.1.5 (莱维-辛钦公式) 欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 上的概率测度 μ 是无穷可分的当且仅当其特征函数有表达式

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \lambda, x \rangle} \mu(dx) = e^{\psi(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^d,$$

其中 $\psi(\lambda)$ 是形如 (5.1.3) 的连续函数, 且由 μ 惟一决定.

利用上面的莱维-辛钦公式, 我们可以给出卷积半群的一种典型表示.

定理 5.1.6 欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 上的概率测度族 $(\mu_t)_{t \geq 0}$ 构成一个卷积半群当且仅当其特征函数有表达式

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\langle \lambda, x \rangle} \mu_t(dx) = e^{t\psi(\lambda)}, \quad t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}^d, \quad (5.1.4)$$

其中 $\psi(\lambda)$ 是形如 (5.1.3) 的函数.

证明 由卷积半群的定义不难看出, 对任意的 $t \geq 0$ 概率测度 μ_t 是无穷可分的, 故有惟一的形如 (5.1.3) 的连续函数 $\psi_t(\lambda)$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \mu_t(dx) = e^{\psi_t(\lambda)}, \quad t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}^d.$$

再由卷积半群的定义, 当 $t \rightarrow s+$ 时,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \mu_t(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \mu_s(dx) \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \mu_{t-s}(dx) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \mu_s(dx).$$

所以 $t \mapsto \psi_t(\lambda)$ 右连续. 由关系 $\mu_t = \mu_{t/n} * \cdots * \mu_{t/n}$ (n 重卷积) 得 $\psi_t(\lambda) = n\psi_{t/n}(\lambda)$. 故对任何正有理数 m/n 有

$$\psi_{m/n}(\lambda) = \frac{1}{n}\psi_m(\lambda) = \frac{m}{n}\psi_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^d.$$

令 $\psi(\lambda) = \psi_1(\lambda)$. 由上式和 $t \mapsto \psi_t(\lambda)$ 的右连续性知 $\psi_t(\lambda) = t\psi(\lambda)$ 对所有 $t \geq 0$ 成立. 因此我们有表达式 (5.1.4). $\square$

§5.2 普瓦松过程

本节中我们讨论普瓦松过程的基本结构, 它们是最简单的一类莱维过程. 首先明确这类过程的定义. 固定常数 $\alpha > 0$. 对于 $t \geq 0$ 令 μ_t 是以 αt 为参数的普瓦松分布, 即

$$\mu_t(\{k\}) = \frac{(\alpha t)^k}{k!} e^{-\alpha t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

则 μ_t 有特征函数

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{ik\lambda} \mu_t(\{k\}) = e^{t\alpha(e^{i\lambda}-1)}, \quad t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

不难验证, 如上定义的 $(\mu_t)_{t \geq 0}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的卷积半群. 其对应的转移半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 有如下表示:

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+z) \mu_t(dz) = e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k t^k}{k!} f(x+k), \quad (5.2.1)$$

其中 $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ 而 $f \in \mathbf{b}\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

假定 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, \mathbf{P})$ 为带流的概率空间. 关于流 $(\mathcal{G}_t : t \geq 0)$ 适应的过程 $(N_t : t \geq 0)$ 称为参数为 $\alpha > 0$ 的普瓦松过程, 如果对任何 $t > s \geq 0$ 及 $k \geq 0$, 都有

$$\mathbf{P}(N_t - N_s = k | \mathcal{G}_s) = \frac{\alpha^k (t-s)^k}{k!} e^{-\alpha(t-s)}. \quad (5.2.2)$$

所以参数为 $\alpha > 0$ 的普瓦松过程就是以 $(\mu_t)_{t \geq 0}$ 为卷积半群的莱维过程, 其转移半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 由 (5.2.1) 给出. 此后我们假定 N_0 为正整数, 因而 $(N_t : t \geq 0)$ 不降且只取正整数值.

定理 5.2.1 对任何 $f \in \mathbf{b}\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 函数 $t \mapsto P_t f$ 在上确界范数下连续可微且

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} P_t f(x) \right|_{t=0} = \alpha[f(x+1) - f(x)], \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.2.3)$$

证明 利用 (5.2.1) 和泰勒展式得

$$\begin{aligned} P_t f(x) &= e^{-\alpha t} f(x) + \alpha t e^{-\alpha t} f(x+1) + e^{-\alpha t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k t^k}{k!} f(x+k) \\ &= f(x) - \alpha t f(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-\alpha t)^k}{k!} f(x) + \alpha t f(x+1) \\ &\quad + \alpha t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\alpha t)^k}{k!} f(x+1) + e^{-\alpha t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^k t^k}{k!} f(x+k). \end{aligned}$$

故有常数 $C > 0$ 使得

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{t} [P_t f(x) - f(x)] - \alpha[f(x+1) - f(x)] \right| \\ &\leq \alpha \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\alpha t)^{k-1}}{k!} |f(x)| + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!} |f(x+1)| \\ &\quad + \alpha \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\alpha t)^{k-1}}{k!} |f(x+k)| \\ &\leq C \|f\| t. \end{aligned}$$

于是 (5.2.3) 成立. 与定理 4.3.1 证明中类似地不难发现 $t \mapsto P_t f$ 在上确界范数下连续可微. $\square$

推论 5.2.2 参数为 $\alpha > 0$ 的普瓦松过程的生成元 A 的定义域 $\mathcal{D}(A)$ 重合于 $C_0(\mathbb{R})$ 且

$$Af(x) = \alpha[f(x+1) - f(x)], \quad x \in \mathbb{R}, f \in C_0(\mathbb{R}).$$

定理 5.2.3 给定参数为 $\alpha > 0$ 的普瓦松过程 $(N_t : t \geq 0)$, 对 $n \geq 0$ 定义停时 $S_n = \inf\{t \geq 0 : N_t - N_0 \geq n\}$. 再对 $n \geq 1$ 令 $T_n = S_n - S_{n-1}$. 则 $\{T_n : n \geq 1\}$ 是独立同分布的随机变量, 且都服从参数 α 的指数分布.

证明 取非负实数列 $\{\lambda_n\}$, 只需证明对 $n \geq 1$ 有

$$\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^n e^{-\lambda T_i}\right) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\alpha + \lambda_i}. \quad (5.2.4)$$

根据 (5.2.2), 对于 $t \geq 0$ 我们有

$$\mathbf{P}(T_1 \geq t) = \mathbf{P}(N_t - N_0 = 0) = e^{-\alpha t},$$

故 T_1 服从参数为 α 的指数分布. 所以 (5.2.4) 对于 $n = 1$ 成立. 假设该式对某个 $n \geq 1$ 成立. 采用马氏系的记号并利用强马氏性, 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{n+1} e^{-\lambda_i T_i}\right) &= \mathbf{P}\left[\prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i T_i} \mathbf{P}(e^{-\lambda_{n+1} T_{n+1}} | \mathcal{G}_{S_n})\right] \\ &= \mathbf{P}\left[\prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i T_i} \mathbf{P}(e^{-\lambda_{n+1} T_1 \circ \theta_{S_n}} | \mathcal{G}_{S_n})\right] \\ &= \mathbf{P}\left[\prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i T_i} \mathbf{P}^{N_{S_n}}(e^{-\lambda_{n+1} T_1})\right] \\ &= \mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i T_i}\right) \frac{1}{\alpha + \lambda_{n+1}} = \prod_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\alpha + \lambda_i}. \end{aligned}$$

因而 (5.2.4) 对于所有 $n \geq 1$ 成立. $\square$

根据上面定理, 我们可以给出普瓦松过程的一种简单构造. 给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上的一个服从参数为 $\alpha > 0$ 的指数分布的独立随机变量列 $\{T_n : n \geq 1\}$, 令 $S_0 = 0$ 和 $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ ($n \geq 1$). 现定义随机过程

$$N_t = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\} = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{S_n \leq t\}}, \quad t \geq 0.$$

定理 5.2.4 以上构造的随机过程 $(N_t : t \geq 0)$ 是参数为 α 的关于自然流的普瓦松过程.

证明 令 W 是所有左极右连函数 $w : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{Z}_+$ 构成的集合, 并定义其自然 σ 代数 $\mathcal{F} = \sigma(w_s : s \geq 0)$. 显然 $(N_t : t \geq 0)$ 在空间 $(W, \mathcal{F})$ 上的分布完全由随机变量列 $\{T_n : n \geq 1\}$ 决定. 由于 $\{T_n : n \geq 1\}$ 与定理 5.2.3 中的随机变量列同分布, 过程 $(N_t : t \geq 0)$ 也与定理 5.2.3 的同分布. 因此立得予证结论. $\square$

普瓦松过程在应用中经常出现. 随机变量 N_t 常被视为某个服务系统在 $t \geq 0$ 时刻前接到的服务请求的次数. 这样 S_n ($n \geq 1$) 可理解为第 n 次服务请求的时刻. 此外, 根据定理 5.2.4 知道, 例 1.1.4 中定义的过程 $(X_t : t \geq 0)$ 和 $(Y_t : t \geq 0)$ 都是参数为 α 的普瓦松过程.

§5.3 布朗运动

布朗运动是植物学家布朗发现的一种自然现象. 布朗发现漂浮在液体表面的花粉颗粒会无序地运动. 1905 年, 爱因斯坦指出, 花粉的运动是因为液体分子在各个方向撞击它们的缘故. 爱因斯坦还计算出了布朗运动增量的分布. 后来, 维纳证明这种随机过程可以在连续轨道上实现, 因此布朗运动也称为维纳过程, 它属于几类重要的随机过程的交集. 例如, 布朗运动是鞅, 是莱维过程, 并且有连续修正, 等等.

首先令 $\mu_0 = \delta_0$. 对于 $t > 0$ 令 μ_t 为欧氏空间 $\mathbb{R}^d$ 上的正态分布 $N(0, t)$, 即 $\mu_t(dx)$ 有密度

$$p(t, x) := \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{2t} \right\}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \quad (5.3.1)$$

其中 “ $|\cdot|$ ” 表示欧氏范数.

命题 5.3.1 如上定义的 $(\mu_t)_{t \geq 0}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的卷积半群.

证明 可利用正态分布的可加性, 对任意的 $s, t > 0$, 若 ξ_s 和 ξ_t 分别服从正态分布 $N(0, s)$ 和 $N(0, t)$ 且相互独立, 则 $\xi_s + \xi_t$ 分别服从正态分布 $N(0, s+t)$. 由此知 $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$ 成立. 另外, 对于 $\mathbb{R}^d$ 上的任意的有界连续函数 f , 利用积分变换和控制收敛定理, 有

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_t(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2t} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{t}z) e^{-z^2/2} dz \rightarrow f(0).$$

所以 $(\mu_t)_{t \geq 0}$ 是卷积半群. $\square$

既然上面定义的 $(\mu_t)_{t \geq 0}$ 是卷积半群, 根据定理 5.1.1, 我们可以从它出发定义 $\mathbb{R}^d$ 上的一个费勒转移半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 如下:

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z+x) p(t, z) dz = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) p(t, y-x) dy, \quad (5.3.2)$$

其中 $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$ 而 $f \in b\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

定理 5.3.2 对任何 $t > 0$ 及 $f \in \mathbf{b}\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, 函数 $P_t f$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上连续.

证明 利用 (5.3.2) 和控制收敛定理易得. $\square$

上面定理中所述的性质称为 $(P_t)_{t \geq 0}$ 的强费勒性. 以 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为转移半群的马氏过程称为 d 维布朗运动. 布朗运动与位势理论有密切的联系. 通常称转移半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ 为热半群, 称概率核 $P_t(x, dy)$ 为热核. 不难验证, 对任何 $f \in \mathbf{b}\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, 函数 $u(t, x) := P_t f(x)$ 满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \quad (5.3.3)$$

其中 Δ 是拉普拉斯 (Laplace) 算子:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}, \quad x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

令 $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ 为 $C_0(\mathbb{R}^d)$ 中具有连续的一阶和二阶偏导数且这些偏导数均属于 $C_0(\mathbb{R}^d)$ 的函数的全体. 不难验证 (5.3.3) 在上确界范数下对所有 $t \geq 0$ 成立 (作业). 所以布朗运动的强生成元 A 的定义域 $\mathcal{D}(A)$ 包含 $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ 且对任何 $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ 有

$$Af(x) = \frac{1}{2} \Delta f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (5.3.4)$$

相对于流 $(\mathcal{G}_t : t \geq 0)$ 的布朗运动 $(B_t : t \geq 0)$ 是莱维过程. 对任何 $t > s \geq 0$, 增量 $B_t - B_s$ 服从正态分布 $N(0, t - s)$. 所以 $\mathbf{P}(B_t - B_s | \mathcal{G}_s) = \mathbf{P}(B_t - B_s) = 0$. 因此布朗运动是鞅. 类似地可以验证 $B_t^2 - t$ 也是鞅.

为了证明布朗运动具有连续轨道的实现, 我们需要一个引理. 设 $a > 0$ 为常数. 我们说定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的函数 f 是 a 阶 Hölder 连续的, 如果对于任何 $T \geq 0$ 都有常数 $C_T \geq 0$ 使得

$$|f(s) - f(t)| \leq C_T |s - t|^a, \quad s, t \in [0, T].$$

形如 $i/2^n$ 的二分点称为 n 阶二分点. 设 N 是任何给定的自然数, $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{R}_+$ 上二分点全体, 即

$$\mathbb{D} = \{i/2^n : i, n = 0, 1, 2, \cdots\},$$

令 $\mathbb{D}_N = \mathbb{D} \cap [0, N]$.

引理 5.3.3 设 f 是 $\mathbb{D}$ 上的函数, 而 $a > 0$ 为常数. 若对任何自然数 N , 都存在常数 $C > 0$ 及自然数 k , 当 $m \geq k$ 时有

$$\left| f\left(\frac{i}{2^m}\right) - f\left(\frac{i-1}{2^m}\right) \right| \leq \frac{C}{2^{ma}}, \quad i = 1, 2, \cdots, 2^m N,$$

则 f 可以唯一地延拓成 $\mathbb{R}_+$ 上的 a 阶 Hölder 连续函数.

证明 第1步) 证明 f 在 $\mathbb{D}$ 上的 a 阶 Hölder 连续性. 为此固定自然数 N 及对应的常数 $C > 0$ 与自然数 k . 设 $s, t \in \mathbb{D}_N$ 满足 $|s - t| \leq 1/2^k$. 取自然数 $m \geq k$ 使得 $1/2^{m+1} < |s - t| \leq 1/2^m$. 则 s 落在某个小区间 $[p/2^m, (p+1)/2^m)$ 中. 下面我们来计算 $f(s)$ 与 f 在该小区间左端点的值 $f(p/2^m)$ 之间的差. 因 $s \in \mathbb{D}_N$, 其二进表示为

$$s = \frac{p}{2^m} + \frac{b_1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{b_l}{2^{m+l}},$$

其中 b_j 取值为 0 或 1, 令

$$s_0 = \frac{p}{2^m}, \quad s_j = s_0 + \sum_{i=1}^j \frac{b_i}{2^{m+i}}, \quad j = 1, 2, \dots, l.$$

显然 $p/2^m = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_l = s$, 且 s_{j-1} 与 s_j 或相同或是 $m+j$ 阶二分点的相邻点. 由定理条件

$$|f(s_j) - f(s_{j-1})| \leq \frac{C}{2^{(m+j)a}}, \quad j = 1, 2, \dots, l.$$

因此

$$\left| f(s) - f\left(\frac{p}{2^m}\right) \right| \leq \sum_{j=1}^l |f(s_j) - f(s_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^l \frac{C}{2^{(m+j)a}} = \frac{C}{2^{ma}(2^a - 1)}. \quad (5.3.5)$$

另一方面, t 与 s 的距离不超过 $\frac{1}{2^m}$, 故 t 必落在三个小区间

$$\left[\frac{p-1}{2^m}, \frac{p}{2^m}\right), \left[\frac{p}{2^m}, \frac{p+1}{2^m}\right), \left[\frac{p+1}{2^m}, \frac{p+2}{2^m}\right)$$

中之一, 而 $f(t)$ 与 f 在该小区间左端点的值之差并不大于 (5.3.5) 右端的值. 再由已知, f 在上面任一小区间左右端点的值之差并不大于 $C/2^{ma}$. 注意 $1/2^{m+1} < |s - t| \leq 1/2^m$, 因此

$$|f(s) - f(t)| \leq \frac{C}{2^{ma}} + \frac{2C}{2^{ma}(2^a - 1)} = \frac{C(2^a + 1)}{2^{ma}(2^a - 1)} \leq C_1 |s - t|^a, \quad (5.3.6)$$

其中 $C_1 = 2^a C(2^a + 1)(2^a - 1)^{-1}$. 即 f 在 $\mathbb{D}_N$ 上是 a 阶 Hölder 连续的.

第2步) 对任何 $x \in [0, N]$, 有点列 $\{s_n\} \subset \mathbb{D}_N$, 使得 $s_n \rightarrow x$. 显然 $\{f(s_n)\}$ 是 Cauchy 列, 记其极限为 $F_N(x)$, 此极限值与收敛点列 $\{s_n\}$ 的选取无关. 因此 F_N 是 $[0, N]$ 上的函数, 是 f 限制在 $\mathbb{D}_N$ 上的连续延拓, 显然这个延拓是唯一的. 对任何 $x, y \in [0, N]$ 且 $|x - y| \leq 1/2^k$, 取点列 $\{s_n\}, \{t_n\} \subset \mathbb{D}_N$ 满足 $|s_n - t_n| \leq 1/2^k$ 且 $s_n \rightarrow x, t_n \rightarrow y$. 由 (5.3.6) 有 $|f(s_n) - f(t_n)| \leq C_1 |s_n - t_n|^a$, 取极限得

$$|F_N(x) - F_N(y)| \leq C_1 |x - y|^a,$$

即 F_N 在 $[0, N]$ 上是 a 阶 Hölder 连续的. 另外, 显然函数列 $\{F_N : N \geq 1\}$ 是相容的, 即 F_{N+1} 限制在 $[0, N]$ 上与 F_N 一致. 现在对任何 $x \in \mathbb{R}_+$, 取 $N \geq x$, 并定义 $F(x) = F_N(x)$. 由相容性, 该定义无歧义, 而且 F 是 f 在 $\mathbb{R}_+$ 上的唯一延拓. 显然 F 在 $\mathbb{R}_+$ 上是 a 阶 Hölder 连续的. $\square$

定理 5.3.4 (维纳) 对任意的维数 $d \geq 1$, 存在从 $x \in \mathbb{R}^d$ 出发且具有连续轨道的 d 维标准布朗运动存在.

证明 首先假设 $d = 1$, 并取 $x \in \mathbb{R}$. 根据定理 1.2.6 和定理 3.2.5, 可以在某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ 上构造以热半群为转移半群的马氏过程 $(X_t : t \geq 0)$ 且 $X_0 = x$. 由正态分布的性质, 对任何 $t > s \geq 0$ 及整数 $k \geq 1$,

$$\mathbf{P}[|X_t - X_s|^{2k}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} x^{2k} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(t-s)}\right\} ds = C(k)|t-s|^k,$$

其中 $C(k) = (2k-1)!!$. 特别地, 在下面的证明中我们只用到 $\mathbf{P}[|X_t - X_s|^4] = 3|t-s|^2$. 取 $a > 0$, 由 Chebyshev 不等式,

$$\mathbf{P}\left\{\left|X_{\frac{i-1}{2^m}} - X_{\frac{i}{2^m}}\right| \geq \frac{1}{2^{ma}}\right\} \leq 2^{4ma} \mathbf{P}\left[\left|X_{\frac{i-1}{2^m}} - X_{\frac{i}{2^m}}\right|^4\right] = \frac{3}{2^{2m(1-2a)}}.$$

然后, 固定自然数 N , 并令

$$A_m = \bigcup_{i=1}^{2^m N} \left\{\left|X_{\frac{i-1}{2^m}} - X_{\frac{i}{2^m}}\right| \geq \frac{1}{2^{ma}}\right\}.$$

那么

$$\mathbf{P}(A_m) \leq \sum_{i=1}^{2^m N} \frac{3}{2^{2m(1-2a)}} = \frac{3N}{2^{m(1-4a)}}.$$

这样, 当 $4a < 1$ 时有 $\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(A_m) < \infty$. 由 Borel-Cantelli 引理, 若记

$$\Omega_0^N = \liminf_{m \rightarrow \infty} A_m^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m^c,$$

则 $\Omega_0^N \in \mathcal{G}$ 且 $\mathbf{P}(\Omega_0^N) = 1$. 再令

$$\Omega_0 = \bigcap_{N=1}^{\infty} \Omega_0^N = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m^c \in \mathcal{G},$$

则 $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$. 对任何 $\omega \in \Omega_0$, 轨道 $t \mapsto X_t(\omega)$ 满足: 对任何自然数 N , 存在 $n = n(\omega, N)$, 使得当 $m \geq n$ 时,

$$\left|X_{\frac{i-1}{2^m}}(\omega) - X_{\frac{i}{2^m}}(\omega)\right| < \frac{1}{2^{ma}}, \quad i = 1, 2, \dots, 2^m N.$$

由引理 5.3.3, 对任何 $\omega \in \Omega_0$, 我们可将 $\{X_t(\omega) : t \in \mathbb{D}\}$ 唯一地延拓成连续函数 $\{B_t(\omega) : t \geq 0\}$. 对 $\omega \notin \Omega_0$, 定义 $B_t(\omega) = x$. 显然对固定的 $t \geq 0$, 可取点列 $\{t_n\} \subset \mathbb{D}$ 满足 $t_n \rightarrow t$, 从而 $B_t = x1_{\Omega_0^c} + \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}1_{\Omega_0}$. 因此 B_t 是随机变量, 故 $B = (B_t : t \geq 0)$ 是一

个实值随机过程. 另外 B_t 是 $\{X_{t_n}\}$ 的几乎必然收敛的极限, 而 $\mathbf{P}[|X_{t_n} - X_t|^2] = |t_n - t|$, 故 X_t 是 $\{X_{t_n}\}$ 的 L^2 极限. 所以几乎必然 $B_t = X_t$, 即 $(B_t : t \geq 0)$ 是 $(X_t : t \geq 0)$ 的修正, 故 $(B_t : t \geq 0)$ 也是以热半群为转移半群的马氏过程.

当 $d \geq 2$ 时, 令 $x = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d$. 由第 1 步的结论, 可以在某个概率空间 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ 上构造以热半群为转移半群的 d 个独立的 1 维的马氏过程 $(B_t^i : t \geq 0)$, $i = 1, \dots, d$, 且 $B_0^i = x^i$. 不难验证, d 维过程 $\{(B_t^1, \dots, B_t^d) : t \geq 0\}$ 是以热半群为转移半群的马氏过程, 即它是从 $x \in \mathbb{R}^d$ 出发且具有连续轨道的 d 维标准布朗运动. $\square$

由引理 5.3.3 及定理 5.3.4 的证明, 对于任何常数 $0 < a < 1/4$, 布朗运动是 a 阶局部 Hölder 连续的. 这里的限制 $0 < a < 1/4$ 来自于等式 $\mathbf{P}[|X_t - X_s|^4] = 3|t - s|^2$. 若我们在证明中改用等式 $\mathbf{P}[|X_t - X_s|^{2k}] = C(k)|t - s|^k$, 则只需 $0 < a < (k - 1)/2k$. 由整数 $k \geq 1$ 的任意性, 对任何常数 $0 < a < 1/2$, 布朗运动的轨道都是 a 阶局部 Hölder 连续的.

在很多文献中, 标准布朗运动是指从原点出发, 具有连续轨道的布朗运动. 所以, 标准布朗运动是一个中心化的高斯过程, 而且当 $d = 1$ 时, 对任意的 $s, t \geq 0$ 有 $\mathbf{P}(B_t B_s) = t \wedge s$. 反之, 因为中心化高斯过程的有限维分布由其协方差矩阵唯一决定, 故我们有下列刻画.

定理 5.3.5 从零出发且具有连续轨道的实值过程 $B = (B_t : t \geq 0)$ 是标准布朗运动, 当且仅当它是中心化的高斯过程且对任意的 $s, t \geq 0$ 有 $\mathbf{P}(B_t B_s) = t \wedge s$.

利用上面定理, 容易验证下列关于布朗运动的性质, 详细的证明留给读者.

推论 5.3.6 设 $(B_t : t \geq 0)$ 是标准布朗运动, 而 $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ 为其自然流. 则有如下性质:

- (1) 马氏性: 对任何 $s \geq 0$, 过程 $(B_{t+s} - B_s : t \geq 0)$ 是独立于 $\mathcal{F}_s$ 的标准布朗运动;
- (2) 自相似性: 对任何 $c > 0$, 过程 $(c^{-1} B_{c^2 t} : t \geq 0)$ 是一个标准布朗运动;
- (3) 0 与 ∞ 的对称性: 设 B 是标准的, 定义

$$\tilde{B}_t = \begin{cases} t B_{1/t}, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

则 $(\tilde{B}_t : t \geq 0)$ 也是标准布朗运动.

虽然布朗运动的轨道是连续的, 但下面的定理说明它们是处处不可导的.

定理 5.3.7 设 $B = (B_t : t \geq 0)$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ 上的 d 维标准布朗运动. 则存在 $\Omega_0 \in \mathcal{G}$ 满足 $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$, 且对任何 $\omega \in \Omega_0$, 函数 $t \mapsto B_t(\omega)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 的任何长度非零的区间上都不是有界变差的.

证明 为简单起见, 我们假定 $d = 1$. 对于任何 $t > s \geq 0$, 有

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[(B_t - B_s)^2 - (t - s)]^2 &= \mathbf{P}[(B_t - B_s)^4 - 2(t - s)(B_t - B_s)^2 + (t - s)^2] \\ &= 3(t - s)^2 - 2(t - s)^2 + (t - s)^2 = 2(t - s)^2.\end{aligned}$$

另外, 设 $t_2 > s_2 \geq t_1 > s_1 \geq 0$, 则由独立增量性,

$$\mathbf{P}\{[(B_{t_1} - B_{s_1})^2 - (t_1 - s_1)][(B_{t_2} - B_{s_2})^2 - (t_2 - s_2)]\} = 0.$$

现在, 固定 $t > s \geq 0$, 取 $[s, t]$ 的一个划分

$$\Delta_n := \{s = t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \cdots < t_{n,k_n} = t\}$$

使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$|\Delta_n| := \max_{1 \leq j \leq k_n} |t_{n,j} - t_{n,j-1}| \rightarrow 0.$$

记 $\Delta B_{t_{n,j}} = B_{t_{n,j}} - B_{t_{n,j-1}}$ 和 $\Delta t_{n,j} = t_{n,j} - t_{n,j-1}$. 计算得

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left\{\left[\sum_{j=1}^{k_n} (\Delta B_{t_{n,j}})^2 - (t - s)\right]^2\right\} &= \mathbf{P}\left\{\left[\sum_{j=1}^{k_n} ((\Delta B_{t_{n,j}})^2 - \Delta t_{n,j})\right]^2\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{P}\left\{[(\Delta B_{t_{n,j}})^2 - \Delta t_{n,j}]^2\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} 2(\Delta t_{n,j})^2 \leq 2(t - s)|\Delta_n| \rightarrow 0.\end{aligned}$$

即 $\sum_{j=1}^{k_n} (B_{t_{n,j}} - B_{t_{n,j-1}})^2$ 在 L^2 意义下收敛于 $t - s$, 因此存在划分列 $\{\Delta_n\}$ 的一个子列, 仍然记为 $\{\Delta_n\}$, 使得几乎必然

$$\sum_{j=1}^{k_n} (B_{t_{n,j}} - B_{t_{n,j-1}})^2 \rightarrow t - s.$$

因为 $B = (B_t : t \geq 0)$ 连续, 使上式成立的轨道在 $[s, t]$ 一定不是有界变差的. 现在将上述收敛不成立的 ω 组成的集合记为 $N_{s,t}$. 容易验证, 若 $\omega \notin N_{s,t}$, 则 $r \mapsto B_r(\omega)$ 在 $[s, t]$ 上不是有界变差的. 令

$$N = \bigcup_{s,t \in \mathbb{Q}, 0 \leq s < t} N_{s,t} \in \mathcal{G}, \quad \Omega_0 := \Omega \setminus N \in \mathcal{G},$$

其中 $\mathbb{Q}$ 是有理数集. 则 $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$, 而且对任何 $\omega \in \Omega_0$, 轨道 $t \mapsto B_t(\omega)$ 在任何长度非零的区间上都不是有界变差的. $\square$

§5.4 莱维-伊藤表示

我们首先给出随机测度的概念. 设 E 是完备可分的度量空间, 并记 $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$. 用 M 表示 E 上博雷尔测度的全体, 并定义 M 上的 σ 代数

$$\mathcal{M} = \sigma(\{\nu \mapsto \nu(B) : B \in \mathcal{E}\}).$$

定义在某个完备的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, 取值于 $(M, \mathcal{M})$ 的随机元 X 称为 E 上的随机测度. 显然 X 诱导了 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(E, \mathcal{E})$ 的一个核 $(\omega, B) \mapsto X(\omega, B)$. 反之 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(E, \mathcal{E})$ 的任何一个核可自然地视为 E 上的随机测度. 给定 E 上的随机测度 X , 定义

$$\mu(B) = \mathbf{E}[X(B)], \quad B \in \mathcal{E}.$$

由 Fubini 定理易证 μ 是 E 上的测度, 称为 X 的强度. 用 $M_0 \subset M$ 表示 E 上的非负整数值 (可取无穷值) 测度全体, 并令 $\mathcal{M}_0 = M_0 \cap \mathcal{M}$. 如果 E 上的一随机测度 X 只在 M_0 中取值, 我们称其为整值随机测度.

定义 5.4.1 设 μ 是 E 上的一个测度. 我们称 E 上以 μ 为强度的整值随机测度 X 为普瓦松随机测度, 如果它满足下列条件:

- (1) 若 $B \in \mathcal{E}$ 且 $\mu(B) < \infty$, 则 $X(B)$ 服从参数为 $\mu(B)$ 的普瓦松分布;
- (2) 若 $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{E}$ 两两不相交, 则 $X(B_1), \dots, X(B_n)$ 独立.

由上面的定义不难看出, 若 X 是 E 上以 μ 为强度的普瓦松随机测度, 则 X 在 $F \in \mathcal{E}$ 上的限制是以 $\mu|_F$ 为强度的普瓦松随机测度. 给定普瓦松随机测度 X 和 E 上的博雷尔函数 f , 简记

$$X(f) := \int_E f(x) X(dx), \quad (5.4.1)$$

只要右边的积分几乎必然有意义.

定理 5.4.1 设 μ 为 E 上的 σ 有限测度. 那么 X 是以 μ 为强度的普瓦松随机测度当且仅当对于任何 $f \in \mathcal{P}\mathcal{E}$ 有

$$\mathbf{P} \exp\{-X(f)\} = \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-f(x)}) \mu(dx)\right\}. \quad (5.4.2)$$

证明 假设 X 是以 μ 为强度的普瓦松随机测度. 取 $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{E}$ 两两不相交, 且 $\mu(B_i) < \infty$, $1 \leq i \leq n$. 对于任何非负实数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, 由普瓦松随机测度的定义有

$$\mathbf{P} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \alpha_i X(B_i)\right\} = \exp\left\{-\sum_{i=1}^n (1 - e^{-\alpha_i}) \mu(B_i)\right\}. \quad (5.4.3)$$

所以 (5.4.2) 对简单函数 $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{B_i}$ 成立. 利用控制收敛定理可证 (5.4.2) 对任何函数 $f \in \mathbf{p}\mathcal{E}$ 成立. 反之, 假若 (5.4.2) 对任何函数 $f \in \mathbf{p}\mathcal{E}$ 成立, 取 $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{B_i}$ 知 (5.4.3) 成立. 所以 X 是以 μ 为强度的普瓦松随机测度. $\square$

定理 5.4.2 对于 E 上的任何 σ 有限测度 μ , 存在以 μ 为强度的普瓦松随机测度 X .

证明 首先, 考虑 $0 < \mu(E) < \infty$ 的情况. 由推论 1.2.7, 存在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 及其上满足如下条件的随机变量族:

- (1) $\{\xi_i : i = 1, 2, \dots\}$ 是取值于 E 的随机变量, 有相同的分布 $\mu(E)^{-1}\mu(dx)$;
- (2) η 是服从以 $\mu(E)$ 为参数的普瓦松分布的随机变量;
- (3) 所有随机变量 $\{\eta, \xi_i : i = 1, 2, \dots\}$ 是相互独立的.

定义随机测度 $X := \sum_{i=1}^{\eta} \delta_{\xi_i}$ (如果 $\eta = 0$, 约定和式为零). 对于任何 $f \in \mathbf{bp}\mathcal{E}$ 有

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \exp\{-X(f)\} &= \mathbf{P} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{\eta} f(\xi_i)\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu(E)} \frac{\mu(E)^n}{n!} \mathbf{P} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu(E)} \frac{\mu(E)^n}{n!} \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E e^{-f(x)} \mu(dx)\right)^n \\ &= \exp\left\{-\mu(E) + \int_E e^{-f(x)} \mu(dx)\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-f(x)}) \mu(dx)\right\}. \end{aligned}$$

由定理 5.4.1 知 X 是以 μ 为强度的普瓦松随机测度. 现在, 我们考虑 $\mu(E) = \infty$ 的情况. 因为 μ 是 σ 有限的, 存在两两不相交的集合列 $\{E_n\} \subset \mathcal{E}$ 使得 $0 < \mu(E_n) < \infty$ 且 $\cup_n E_n = E$. 由第 1 步和推论 1.2.7, 存在 E 上的独立随机测度族 $\{X_i : i = 1, 2, \dots\}$, 其中 X_i 的强度为 $\mu(E_i)^{-1}\mu(dx)|_{E_i}$. 令 $X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$. 容易验证 (5.4.2) 仍然成立. 所以 X 是以 μ 为强度的普瓦松随机测度. $\square$

命题 5.4.3 设 X 是以 E 上的 σ 有限测度 μ 为强度的普瓦松随机测度. 如果函数 $f \in \mathcal{E}$ 相对 μ 可积, 则 (5.4.1) 右边的积分有意义, 并且有

$$\mathbf{P}[X(f)] = \int_E f(x) \mu(dx). \quad (5.4.4)$$

证明 如果 f 非负, 则 (5.4.1) 右边的积分有意义. 我们取 $\theta > 0$, 在 (5.4.1) 中用 θf 代替 f , 对该式关于 θ 求导数得

$$\mathbf{P}[X(f) \exp\{-\theta X(f)\}] = \int_E f(x) e^{-\theta f(x)} \mu(dx) \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-\theta f(x)}) \mu(dx)\right\}. \quad (5.4.5)$$

再令 $\theta \downarrow 0$ 得 (5.4.4). 对于一般的情况, 予证结果可由积分的线性性推得. $\square$

给定 E 上的以 σ 有限测度 μ 为强度的普瓦松随机测度 X , 我们可定义随机符号测度 $\tilde{X} = X - \mu$. 对于 E 上的博雷尔函数 f , 形式地定义

$$\tilde{X}(f) = \int_E f(x) \tilde{X}(dx). \quad (5.4.6)$$

下面的定理说明在自然条件下此式有意义, 其证明给出了右端积分的含义的解释.

命题 5.4.4 如果函数 $f \in \mathcal{E}$ 相对 μ 平方可积, 则 (5.4.6) 右边作为平方可积随机变量有意义, 而且有 $\mathbf{P}[\tilde{X}(f)] = 0$ 和

$$\mathbf{P}[\tilde{X}(f)^2] = \int_E f(x)^2 \mu(dx). \quad (5.4.7)$$

证明 第 1 步) 假定 μ 有限且 $f \in \text{b}\mathcal{E}$. 此时 $X(E)$ 服从参数为 $\mu(E)$ 的普瓦松分布, 各阶矩有限. 因而 (5.4.6) 右边有意义. 由命题 5.4.3, 显然有 $\mathbf{P}[\tilde{X}(f)] = 0$. 如果 $f \in \text{bp}\mathcal{E}$, 我们可以对 (5.4.5) 求关于 $\theta > 0$ 的导数得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X(f)^2 \exp\{-\theta X(f)\}] &= \left[\int_E f(x) e^{-\theta f(x)} \mu(dx) \right]^2 \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-\theta f(x)}) \mu(dx)\right\} \\ &\quad + \int_E f(x)^2 e^{-\theta f(x)} \mu(dx) \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-\theta f(x)}) \mu(dx)\right\}. \end{aligned}$$

再令 $\theta \downarrow 0$ 推出

$$\mathbf{P}[X(f)^2] = \left[\int_E f(x) \mu(dx) \right]^2 + \int_E f(x)^2 \mu(dx).$$

由命题 5.4.3 即得 (5.4.7). 对于 $f \in \text{b}\mathcal{E}$ 的情况, 利用分解 $f = f^+ - f^-$ 可证 $\mathbf{P}[\tilde{X}(f)] = 0$ 和 (5.4.7) 仍然成立.

第 2 步) 假定 μ 有限且函数 $f \in \mathcal{E}$ 相对 μ 平方可积. 对于 $n \geq 1$ 和 $x \in E$ 定义 $f_n(x) = f(x) 1_{\{|f(x)| \leq n\}}$. 显然 $\tilde{X}(f_n)$ 有意义, 且各阶矩有限. 特别地, 有 $\mathbf{P}[\tilde{X}(f_n)] = 0$ 且 (5.4.7) 对 $f = f_n$ 成立. 不难验证 $\{\tilde{X}(f_n)\}$ 在 L^2 意义下是柯西列. 记它的极限为 $\tilde{X}(f)$, 易证 $\mathbf{P}[\tilde{X}(f)] = 0$ 且 (5.4.7) 成立.

第 3 步) 对于一般情况, 取可测集序列 $\{E_n\} \subset \mathcal{E}$ 满足 $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ 且对每个 $n \geq 1$ 有 $\mu(E_n) < \infty$. 对于 $n \geq 1$ 和 $x \in E$ 定义 $g_n(x) = f(x) 1_{E_n}(x)$. 由于 X 在 E_n 上的

限制是以有限测度 $\mu|_{E_n}$ 为强度的普瓦松随机测度, 由上步知 $\tilde{X}(g_n)$ 有意义, 平方可积, $\mathbf{P}[\tilde{X}(g_n)] = 0$ 且 (5.4.7) 对 $f = g_n$ 成立. 不难发现 $\{\tilde{X}(g_n)\}$ 在 L^2 意义下是柯西列. 记它的极限为 $\tilde{X}(f)$, 易证 $\mathbf{P}[\tilde{X}(f)] = 0$ 且 (5.4.7) 成立. $\square$

例 5.4.1 设 $\alpha > 0$ 是常数而 m 是 $\mathbb{R}_+$ 上的勒贝格测度. 给定 $\mathbb{R}_+$ 上以 αm 为强度的普瓦松随机测度 X , 我们定义 $N_t = X(0, t]$. 不难证明随机过程 $N = (N_t : t \geq 0)$ 是一个普瓦松过程.

现在我们讨论莱维过程的轨道的构造. 为简单起见, 我们只讨论一维的情况. 由定理 5.1.6, 欧氏空间 $\mathbb{R}$ 上的概率测度族 $(\mu_t)_{t \geq 0}$ 构成一个卷积半群当且仅当其特征函数有表达式

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \mu_t(dx) = \exp \left\{ t \left[ib\lambda - \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\lambda y} - 1 - i\lambda y 1_{\{|y| \leq 1\}}) G(dy) \right] \right\}, \quad (5.4.8)$$

其中 $b \in \mathbb{R}$ 和 $\sigma \in \mathbb{R}_+$ 为常数, 而 G 是 $\mathbb{R}$ 上的 σ 有限测度, 满足 $G(\{0\}) = 0$ 且

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge y^2) G(dy) < \infty.$$

考虑完备的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. 假设在此概率空间上定义了标准布朗运动 $\{B(t) : t \geq 0\}$ 和强度为 $dsG(dx)$ 的普瓦松随机测度 $\{N(ds, dx) : s \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$. 那么 $\{B(t)\}$ 和 $\{N(ds, dx)\}$ 必然是独立的; 参见 [14, p.77]. 对于 $t \geq 0$ 令 $\mathcal{G}_t$ 是由随机变量族

$$B(s), N([0, s] \times B), \quad 0 \leq s \leq t, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ 且 } G(B) < \infty,$$

生成的 σ 代数的强化, 再令

$$X(t) = bt + \sigma B(t) + \int_{[0, t]} \int_{\{|y| \leq 1\}} y \tilde{N}(ds, dx) + \int_{[0, t]} \int_{\{|y| > 1\}} y N(ds, dx), \quad (5.4.9)$$

其中 $\tilde{N}(ds, dx) = N(ds, dx) - dsG(dx)$. 根据命题 5.4.3 和命题 5.4.4, 上式右边的两个积分有意义.

定理 5.4.5 (莱维-伊藤表示) 由 (5.4.9) 定义的随机过程 $\{X(t) : t \geq 0\}$ 相对于流 $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ 是以 $(\mu_t)_{t \geq 0}$ 为卷积半群的莱维过程, 并且它有左极右连的修正.

证明 利用布朗运动和普瓦松随机测度的性质不难发现 $\{X(t) : t \geq 0\}$ 相对于流 $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ 有独立平稳增量性, 因而是莱维过程. 分别记

$$\xi(t) = \int_{[0, t]} \int_{\{|y| \leq 1\}} y \tilde{N}(ds, dy), \quad \eta(t) = \int_{[0, t]} \int_{\{|y| > 1\}} y N(ds, dy).$$

那么 $\{\xi(t) : t \geq 0\}$ 和 $\{\eta(t) : t \geq 0\}$ 都是相对于流 $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ 的莱维过程, 相互独立且独立于 $\{B(t) : t \geq 0\}$. 再令

$$\xi_n(t) = \int_{[0,t]} \int_{\{1/n < |y| \leq 1\}} y \tilde{N}(ds, dy) = \int_{[0,t]} \int_{\{1/n < |y| \leq 1\}} y N(ds, dy) - a_n t$$

其中

$$a_n = \int_{\{1/n < |y| \leq 1\}} y G(dy).$$

由命题 5.4.4 的证明, 在 L^2 收敛的意义下有 $\xi_n(t) \rightarrow \xi(t)$. 对于任何 $\lambda \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned} \mathbf{P} e^{i\lambda \eta(t)} &= \mathbf{P} \exp \left\{ \int_{[0,t]} \int_{\{|y| > 1\}} i\lambda y N(ds, dy) \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_{[0,t]} ds \int_{\{|y| > 1\}} (e^{i\lambda y} - 1) G(dy) \right\} \\ &= \exp \left\{ t \int_{\{|y| > 1\}} (e^{i\lambda y} - 1) G(dy) \right\}. \end{aligned}$$

类似地, 不难发现

$$\mathbf{E} e^{i\lambda \xi_n(t)} = \exp \left\{ t \int_{\{1/n < |y| \leq 1\}} (e^{i\lambda y} - 1 - i\lambda y) G(dy) \right\}.$$

在上式中令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$\mathbf{E} e^{i\lambda \xi(t)} = \exp \left\{ t \int_{\{|y| \leq 1\}} (e^{i\lambda y} - 1 - i\lambda y) G(dy) \right\}.$$

因为 $\sigma B(t)$ 服从正态分布 $N(0, \sigma^2 t)$, 所以 $X(t) = bt + \sigma B(t) + \xi(t) + \eta(t)$ 有分布 μ_t . 由于 $G([-1, 1]^c) < \infty$, 对任何 $t \geq 0$ 几乎必然有 $N([0, t] \times [-1, 1]^c) < \infty$. 所以 $\{\eta(t) : t \geq 0\}$ 几乎必然右连续. 显然, 莱维过程 $\{\xi(t) : t \geq 0\}$ 是随机右连续的鞅, 根据定理 2.3.2 它有左极右连修正. 再因为 $\{B(t) : t \geq 0\}$ 连续, 所以 $\{X(t) : t \geq 0\}$ 有左极右连修正. $\square$

前面的 (5.4.9) 给出了零初值莱维过程的一个构造. 事实上, 任何以 $(\mu_t)_{t \geq 0}$ 为卷积半群的零初值莱维过程都可以分解为 (5.4.9) 的形式; 参见 [17, p.120]. 分别记由该莱维过程的转移半群和生成元为 A 和 $(P_t)_{t \geq 0}$. 对于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 考虑复数值函数 $f(x) = e^{i\lambda x}$, 我们有

$$P_t f(x) = \exp \left\{ ix\lambda + t \left[ib\lambda - \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\lambda y} - 1 - i\lambda y 1_{\{|y| \leq 1\}}) G(dy) \right] \right\}.$$

如果将 A 的定义域扩充到复数值函数, 那么不难发现

$$A f(x) = f(x) \left[ib\lambda - \frac{1}{2} \sigma^2 \lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\lambda y} - 1 - i\lambda y 1_{\{|y| \leq 1\}}) G(dy) \right].$$

注意 $f'(x) = f(x)i\lambda$ 和 $f''(x) = -f(x)\lambda^2$, 于是有

$$Af(x) = bf'(x) + \frac{\sigma^2}{2}f''(x) + \int_{\mathbb{R}} [f(x+y) - f(x) - yf'(x)1_{\{|y|\leq 1\}}]G(dy). \quad (5.4.10)$$

显然, 如果将 f 换为形如 $x \mapsto e^{i\lambda x}$ 的函数的线性组合, 上式仍然成立. 事实上, 我们有 $C_0^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(A)$ 且 (5.4.10) 对于 $C_0^2(\mathbb{R})$ 中的 (实值) 函数 f 都是成立的; 参见 [17, p.208].

参考文献

- [1] Bertoin, J. (1996): *Lévy Processes*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [2] Chen, M.F. (2004a): *From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems*. 2nd Ed. World Sci., River Edge, NJ.
- [3] Chen, M.F. (2004b): *Eigenvalues, Inequality and Ergodic Theory*. Springer, New York.
- [4] 陈木法和毛永华 (2010): *随机过程导论*. 高等教育出版社, 北京.
- [5] Chung, K.L. (1982): *Lectures from Markov Processes to Brownian Motion*. Springer-Verlag, Heidelberg.
- [6] Dellacherie, C. and Meyer, P.A. (1978): *Probabilities and Potential*. Chapters I–IV. North-Holland, Amsterdam.
- [7] Dellacherie, C. and Meyer, P.A. (1982): *Probabilities and Potential*. Chapters V–VIII. North-Holland, Amsterdam.
- [8] Ethier, S.N. and Kurtz, T.G. (1986): *Markov Processes: Characterization and Convergence*. Wiley, New York.
- [9] 何声武, 汪嘉刚和严加安 (1995): *半鞅与随机分析*. 科学出版社, 北京.
- [10] Gikhman, I.I. and Skorokhod, A.V. (1974): *The Theory of Stochastic Processes*. I. Springer, Heidelberg.
- [11] Gikhman, I.I. and Skorokhod, A.V. (1975): *The Theory of Stochastic Processes*. II. Springer, Heidelberg.
- [12] Gikhman, I.I. and Skorokhod, A.V. (1979): *The Theory of Stochastic Processes*. III. Springer, Heidelberg.
- [13] Hewitt, E. and Stromberg, K. (1965): *Real and Abstract Analysis*. Springer, Heidelberg.
- [14] Ikeda, N. and Watanabe, S. (1989): *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. 2nd Ed. North-Holland, Amsterdam; Kodansha, Tokyo.
- [15] Li, Z. (2011): *Measure-Valued Branching Markov Processes*. Springer, Heidelberg.
- [16] Parthasarathy, K.R. (1967): *Probability Measures on Metric Spaces*. Academic Press, New York.
- [17] Sato, K. (1999): *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

- [18] 钱敏平和龚光鲁 (1997): 随机过程论. 第 2 版. 北京大学出版社, 北京.
- [19] Sharpe, M. (1988): *General Theory of Markov Processes*. Academic Press, New York.
- [20] 王梓坤 (1996): 随机过程通论(上、下卷). 北京师范大学出版社, 北京.
- [21] Wentzell, A.D. (1981): *A Course in the Theory of Stochastic Processes*. McGraw-Hill, New York.
- [22] 应坚刚和金蒙伟 (2005): 随机过程基础. 复旦大学出版社, 上海.