发表于《中国科学: 数学》第 49 卷 (2019 年) 第 3 期 415-432 页

# 带有相依移民的连续状态分枝过程 [1]

李增沪,　张卫

北京师范大学数学科学学院, 北京 100875

Email: lizh@bnu.edu.cn

**摘要:** 通过求解由轨道空间上的 Poisson 随机测度驱动的随机积分方程, 对于满足 Yamada–Watanabe 型条件的移民速度函数, 给出了带相依移民连续状态分枝过程的构造. 此构造改进了 Dawson 和 Li (2003), Fu 和 Li (2004), Li (2011) 等在 Lipshitz 条件下的结果.

**关键词:** 连续状态分枝过程, 相依移民, 移民速度函数, 随机积分方程, Poisson 随机测度, Yamada–Watanabe 型条件.

**MSC (2010) 主题分类:** 60J80, 60H10, 60H20

## §1　引言

连续状态分枝过程和带移民的连续状态分枝过程是描述群体发展的数学模型, 在生物, 物理, 金融学等领域有广泛的应用. 关于连续状态分枝过程和带移民的连续状态分枝过程的早期研究, 可参阅 Lamperti [14] 及 Kawazu 和 Watanabe [12]. 有关该模型在金融方面得应用的讨论, 可参阅 Cox 等 [3], Lamberton 和 Lapeyre [13]. 下面简单介绍若干基本概念. 假设 $c \geq 0$ 和 $b \in \mathbb{R}$ 是常数, 而 $(z \wedge z^2)m(\mathrm{d}z)$ 是 $(0,\infty)$ 上的有限测度. 定义 $[0,\infty)$ 上的函数

$$\phi(\lambda) = b\lambda + c\lambda^2 + \int_0^\infty (\mathrm{e}^{-z\lambda} - 1 + z\lambda)m(\mathrm{d}z), \qquad \lambda \geq 0. \tag{1.1}$$

则有 $\phi'(0) = b$ 和

$$\phi''(0) = 2c + \int_0^\infty z^2 m(\mathrm{d}z) \leq \infty. \tag{1.2}$$

称以 $[0,\infty)$ 为状态空间的马氏过程 $\{x(t) : t \geq 0\}$ 为*连续状态分枝过程*, 如果其转移半群为 $(Q_t)_{t\geq 0}$ 由下式确定:

$$\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-\lambda y} Q_t(x, \mathrm{d}y) = \mathrm{e}^{-xv_t(\lambda)}, \qquad \lambda \geq 0,\ x \geq 0, \tag{1.3}$$

其中 $t \mapsto v_t(\lambda)$ 是下列方程的惟一非负解

$$\frac{\partial}{\partial t} v_t(\lambda) = -\phi(v_t(\lambda)), \qquad v_0(\lambda) = \lambda. \tag{1.4}$$

此时称 $\phi$ 为 $\{x(t) : t \geq 0\}$ 的*分枝机制*. 转移半群 $(Q_t)_{t\geq 0}$ 显然具有 Feller 性, 因此 $\{x(t) : t \geq 0\}$ 有左极右连的强马氏实现.

我们可以用随机积分方程的强解给出上述连续状态分枝过程构造. 为此, 设 $(\Omega, \mathscr{G}, \mathscr{G}_t, \mathbf{P})$ 是一个带流的概率空间, 满足通常条件. 设 $\{B(t)\}$ 是标准的 $(\mathscr{G}_t)$ 布朗运动, 而 $\{M(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u)\}$ 是强度为

[1] 本项目由国家自然科学基金 (11531001, 11626245) 资助

$\mathrm{d}sm(\mathrm{d}z)\mathrm{d}u$ 的 $(\mathscr{G}_t)$ Poisson 随机测度. 根据 Dawson 和 Li [5] 中的 Theorem 5.1 和 5.2, 对任意的 $\mathscr{G}_0$ 可测非负随机变量 $x(0)$, 下面随机方程存在轨道惟一的解:

$$x(t) = x(0) - \int_0^t bx(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sqrt{2cx(s)}\mathrm{d}B(s) + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{x(s-)} z\tilde{M}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u), \qquad t \geq 0. \tag{1.5}$$

其中 $\tilde{M}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u) = M(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u) - \mathrm{d}sm(\mathrm{d}z)\mathrm{d}u$. Dawson 和 Li [5] 还证明 (1.5) 的解 $\{x(t)\}$ 是以 $\phi$ 为分枝机制的连续状态分枝过程. 另外, Bertoin 和 Le Gall [2] 研究了 (1.5) 的一个特例.

下面介绍连续状态分枝过程的一个推广的形式. 假设 $\beta \geq 0$ 是常数, 而 $z\nu(\mathrm{d}z)$ 是 $(0,\infty)$ 上的有限测度. 称以 $[0,\infty)$ 为状态空间的马氏过程 $\{y(t) : t \geq 0\}$ 为带移民的连续状态分枝过程, 如果其转移半群为 $(P_t)_{t\geq 0}$ 由下式确定:

$$\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-\lambda y} P_t(x, \mathrm{d}y) = \exp\bigg\{ - xv_t(\lambda) - \int_0^t \psi(v_s(\lambda))\mathrm{d}s \bigg\}, \tag{1.6}$$

其中

$$\psi(\lambda) = \beta\lambda + \int_0^\infty (1 - \mathrm{e}^{-z\lambda})\nu(\mathrm{d}z), \qquad \lambda \geq 0. \tag{1.7}$$

在这种情况下, 我们称 $\{y(t) : t \geq 0\}$ 为*带移民的连续状态分枝过程*, 并分别称 $\phi$ 和 $\psi$ 为其*分枝机制*和*移民机制*.

带移民的连续状态分枝过程也可以用随机积分方程的强解进行构造. 事实上, 我们可以构造一种更广的模型. 假设 $h$ 和 $q$ 分别是定义在 $[0,\infty)$ 和 $[0,\infty) \times (0,\infty)$ 上的非负 Borel 可测函数. 对 $x \geq 0$ 令

$$\rho_1(x) = \int_0^\infty q(x,z)z\nu(\mathrm{d}z), \quad \rho_2(x) = \int_0^\infty q(x,z)z^2\nu(\mathrm{d}z).$$

如果存在常数 $K \geq 0$ 使得

$$h(x) + \rho_1(x) \leq K(1 + x), \qquad x \geq 0, \tag{1.8}$$

我们就称 $(h, q)$ 满足*线性增长条件*. 如果存在 $[0,\infty)$ 上的单增的凹函数 $r$ 使得 $\int_{0+} r(u)^{-1}\mathrm{d}u = \infty$ 且

$$|h(x) - h(y)| + \int_0^\infty |q(x,z) - q(y,z)|z\nu(\mathrm{d}z) \leq r(|x - y|), \quad x, y \geq 0, \tag{1.9}$$

我们称 $(h, q)$ 满足 *Yamada–Watanabe 型条件*. 假设 $\{N(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u)\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{G}, \mathscr{G}_t, \mathbf{P})$ 上且强度为 $\mathrm{d}s\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}u$ 的 $(\mathscr{G}_t)$ Poisson 随机测度. 再假设 $\{B(t)\}$, $\{M(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u)\}$, $\{N(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u)\}$ 相互独立. 给定 $\mathscr{G}_0$ 可测的随机变量 $y(0)$, 考虑随机方程

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + \int_0^t \sqrt{2cy(s)}\mathrm{d}B(s) + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{y(s-)} z\tilde{M}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u) \\ &\quad + \int_0^t [h(y(s)) - by(s)]\mathrm{d}s + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{q(y(s-),z)} zN(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u), \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

根据 Fu 和 Li [9] 中的 Theorem 5.1, 若 $(h, q)$ 满足线性增长条件 (1.8) 和 Yamada–Watanabe 型条件 (1.9), 则 (1.10) 有轨道惟一解 $\{y(t) : t \geq 0\}$. 特别地, 若 $h(x) \equiv \beta$ 和 $q(x,z) \equiv 1$ 为常数, 则 $\{y(t)\}$ 是带移民的连续状态分枝过程, 且分别以 $\phi$ 和 $\psi$ 为分枝机制和移民机制的. 在一般情形下, 我们称 (1.10) 的解为*带相依移民的连续状态分枝过程*, 其中函数对 $(h, q)$ 决定移民发生的速度.

本文的目的是从一个连续状态分枝过程出发, 再利用轨道空间上的 Poisson 随机测度, 通过求解另一随机积分方程, 给出带相依移民的连续状态分枝过程的另外一种构造. 这种构造将给出的分枝机制和移民机制的更为清晰和直观的解释. 在移民速度函数 $(h, q)$ 满足 Lipshitz 条件的情况下, Dawson 和 Li [4], Fu 和 Li [8], Li [16] 研究了类似的测度值过程的构造. 关于带独立移民的连续状态分枝过程

的构造, 可以参见 Li [15, 16, 17] 及那里给出的参考文献. 我们将在 Yamada–Watanabe 型条件下讨论带相依移民的连续状态分枝过程的构造问题.

令 $D[0,\infty)$ 表示 $[0,\infty)$ 到自身的所有左极右连的轨道构成的空间, 并赋予 Skorokhod 拓扑. 对于 $w\in D[0,\infty)$ 令 $\tau_0(w)=\inf\{s>0: w(s)=0\}$. 再令 $D_0[0,\infty)=\{w\in D[0,\infty):$ 对任意 $t\geq\tau_0(w)$ 有 $w(t)=0\}$. 我们用 $\mathbf{Q}_x(\mathrm{d}w)$ 表示初值为 $x(0)=x$ 的连续状态分枝过程 $\{x(t):t\geq 0\}$ 在 $D[0,\infty)$ 上的分布. 由 (1.3) 不难看出, 零点是 $\{x(t):t\geq 0\}$ 的吸收态, 因此也可以假定 $\mathbf{Q}_x(\mathrm{d}w)$ 是 $D_0[0,\infty)$ 上的 Borel 概率测度.

令 $(Q_t^\circ)_{t\geq 0}$ 为 $(Q_t)_{t\geq 0}$ 在 $(0,\infty)$ 上的限制. 若分枝机制 $\phi$ 满足 $\phi'(\infty)=\infty$, 根据 [16] 中的 Theorem 3.10, 存在 $(0,\infty)$ 上的 $\sigma$ 有限测度族 $(l_t)_{t>0}$ 使得

$$\int_0^\infty (1-\mathrm{e}^{-\lambda y})l_t(\mathrm{d}y)=v_t(\lambda),\qquad t>0,\lambda\geq 0. \tag{1.11}$$

根据 [16] 中的 Theorem 8.22 或 [17] 中的 Theorem 9.1, 此时存在 $D_0[0,\infty)$ 上的 $\sigma$ 有限测度 $\mathbf{N}_0$ 满足

$$\begin{aligned}&\mathbf{N}_0(w(t_1)\in\mathrm{d}x_1,w(t_2)\in\mathrm{d}x_2,\ldots,w(t_n)\in\mathrm{d}x_n)\\&\qquad = l_{t_1}(\mathrm{d}x_1)Q^\circ_{t_2-t_1}(x_1,\mathrm{d}x_2)\cdots Q^\circ_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},\mathrm{d}x_n)\end{aligned} \tag{1.12}$$

其中 $\{t_1<\cdots<t_n\}\subset(0,\infty)$, 而 $\{x_1,\ldots,x_n\}\subset(0,\infty)$. 测度 $\mathbf{N}_0$ 称为连续状态分枝过程的 excursion 率.

*本文此后总假定* $\phi'(\infty)=\infty$. 对于 $\phi'(\infty)<\infty$ 的情况, 我们将另行讨论.

假设 $\{X_t:t\geq 0\}$ 是一个连续状态分枝过程, 且满足 $\mathbf{E}(X_0^2)<\infty$. 再设 $\{N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\}$ 和 $\{N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\}$ 分别是 $(0,\infty)^2\times D_0[0,\infty)$ 和 $(0,\infty)^3\times D_0[0,\infty)$ 上强度为 $\mathrm{d}s\mathrm{d}u\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)$ 和 $\mathrm{d}s\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}u\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)$ 的 Poisson 随机测度. 假设 $\{X_t\}$, $\{N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\}$ 和 $\{N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\}$ 定义在同一个概率空间之上, 且相互独立. 考虑随机积分方程

$$\begin{aligned}Y_t &= X_t+\int_0^t\int_0^{h(Y_{s-})}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\\&\quad+\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{q(Y_{s-},z)}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w).\end{aligned} \tag{1.13}$$

我们称非负左极右连的过程 $\{Y_t:t\geq 0\}$ 是 (1.13) 的解, 是指上述方程对任意的 $t\geq 0$ 几乎必然成立. 这里及以后对于 $a\leq b\in\mathbb{R}$ 我们规定

$$\int_a^b=\int_{(a,b]},\quad \int_b^a=-\int_{(a,b]},\quad \int_a^\infty=\int_{(a,\infty)}.$$

下面是本文的主要定理:

**定理 1.1** *假设线性增长条件* (1.8) *和 Yamada–Watanabe 型条件* (1.9) *成立, 再设* $\phi''(0)<\infty$ *且* $\rho_2(x)$ *关于* $x\geq 0$ *局部有界. 则方程* (1.13) *存在轨道惟一的解* $\{Y_t:t\geq 0\}$.

**定理 1.2** *在定理 1.1 的条件下, 方程* (1.13) *的解* $\{Y_t:t\geq 0\}$ *是* (1.10) *的弱解.*

由于我们不假定 $(h,q)$ 满足 Lipshitz 条件, 这里关于 (1.13) 的解的存在性的证明比较冗长. 条件 $\phi''(0)<\infty$ 和 $\rho_2(x)$ 关于 $x\geq 0$ 局部有界只用于解的存在性的证明, 而且可能并不是必须的. 我们把此问题留给感兴趣的学者.

## §2 预备内容

在这节中我们给出有关连续状态分枝过程的若干结果, 为下一节主要定理的证明做准备. 假设 $X=(W,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,x(t),\mathbf{P}_x)$ 是以 $\phi$ 为分枝机制的连续状态分枝过程的 Hunt 过程实现, 再设 $\mathbf{N}_0$ 由 (1.12) 给出. 本节中我们采用马氏过程理论中的若干常用的表示, 如见 Sharpe [18]. 特别地, 相对于概率测度 $\mathbf{P}_x$ 的数学期望仍用记号 $\mathbf{P}_x$ 表示.

**引理 2.1** (i) 对于 $x,t\ge 0$ 有 $\mathbf{P}_x[x(t)]=x\mathrm{e}^{-bt}$. (ii) 若 $\phi''(0)<\infty$, 则对 $x,t\ge 0$ 有

$$\mathbf{P}_x[x(t)^2]=x^2\mathrm{e}^{-2bt}+x\phi''(0)\mathrm{e}^{-bt}\beta(t),$$

其中

$$\beta(t)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-bs}\mathrm{d}s=\begin{cases} b^{-1}(1-\mathrm{e}^{-bt}), & b\neq 0,\\ t, & b=0.\end{cases} \tag{2.1}$$

**证明** 文献 [16] 中建立了关于测度值分枝过程的相应结论. 这里的结果是 [16] 中 Corollary 2.26, Proposition 2.27 和 Proposition 2.38 的结果的特例. □

**引理 2.2** 假设 $\phi''(0)<\infty$. 则存在 $[0,\infty)$ 上的非负递增函数 $t\mapsto C(t)$ 使对任意 $t\ge 0$ 有

$$\mathbf{P}_x\Big[\sup_{0\le s\le t}x(s)^2\Big]\le(1+x^2)C(t).$$

**证明** 注意 $\{\mathrm{e}^{bt}x(t):t\ge 0\}$ 是非负鞅, 应用 Doob 不等式有

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_x\Big[\sup_{0\le s\le t}x(s)^2\Big] &\le \mathrm{e}^{2|b|t}\mathbf{P}_x\Big[\sup_{0\le s\le t}|\mathrm{e}^{bs}x(s)|^2\Big]\\ &\le \mathrm{e}^{2|b|t}\mathbf{P}_x\big[|\mathrm{e}^{bt}x(t)|^2\big]\le \mathrm{e}^{4|b|t}\mathbf{P}_x[x(t)^2].\end{aligned}$$

由引理 2.1 即得结论. □

**引理 2.3** 假设 $\phi''(0)<\infty$. 则存在 $[0,\infty)$ 上的非负递增函数 $t\mapsto C(t)$ 使对任意 $t\ge 0$ 有

$$\mathbf{P}_x\big[|x(t)-x(0)|^2\big]\le tC(t)(x+x^2). \tag{2.2}$$

**证明** 不妨假定 $\{X_t:t\ge 0\}$ 是 (1.5) 的以 $X_0=x$ 为初值的解. 于是

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_x\big[|x(t)-x(0)|^2\big] &\le 3b^2\mathbf{P}_x\bigg[\bigg(\int_0^t x(s)\mathrm{d}s\bigg)^2\bigg]+3c\mathbf{P}_x\bigg[\bigg(\int_0^t x(s)\mathrm{d}B_s\bigg)^2\bigg]\\ &\quad+3\mathbf{P}_x\bigg[\bigg(\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{x(s-)}z\tilde{M}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u)\bigg)^2\bigg]\\ &\le 3b^2t\int_0^t\mathbf{P}_x[x(s)^2]\mathrm{d}s+3c\int_0^t\mathbf{P}_x[x(s)]\mathrm{d}s\\ &\quad+3\int_0^t\mathbf{P}_x[x(s)]\mathrm{d}s\int_0^\infty z^2m(\mathrm{d}z).\end{aligned}$$

再利用引理 2.1 即得予证结果. □

**引理 2.4** (i) 对于 $t\ge 0$ 有

$$\int_{D_0[0,\infty)}w(t)\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)=\mathrm{e}^{-bt}. \tag{2.3}$$

(ii) 若 $\phi''(0)<\infty$, 则对 $t\ge 0$ 有

$$\int_{D_0[0,\infty)}w(t)^2\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)=\phi''(0)\mathrm{e}^{-bt}\beta(t), \tag{2.4}$$

其中 $\beta(t)$ 由 (2.1) 定义.

**证明** (i) 由 (1.3), (1.11) 和 (1.12) 我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_x[\mathrm{e}^{-\lambda x(t)}] &= \exp\bigg\{-x\int_0^\infty(1-\mathrm{e}^{-\lambda y})l_t(\mathrm{d}y)\bigg\}\\ &= \exp\bigg\{-x\int_{D_0[0,\infty)}(1-\mathrm{e}^{-\lambda w(t)})\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\bigg\}.\end{aligned}$$

对上式的两端关于 $\lambda\geq 0$ 微分得

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_x[x(t)\mathrm{e}^{-\lambda x(t)}] &= x\exp\bigg\{-x\int_{D_0[0,\infty)}(1-\mathrm{e}^{-\lambda w(t)})\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\bigg\}\\ &\quad\cdot\int_{D_0[0,\infty)}\mathrm{e}^{-\lambda w(t)}w(t)\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w).\end{aligned}\tag{2.5}$$

再令 $\lambda\to 0$ 得到

$$\mathbf{P}_x[x(t)] = x\int_{D_0[0,\infty)}w(t)\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w).$$

又因 $\mathbf{P}_x[x(t)]=x\mathrm{e}^{-bt}$, 故有 (2.3). (ii) 对 (2.5) 的两端关于 $\lambda\geq 0$ 求导, 令 $\lambda\to 0$ 并应用 (2.3) 得到

$$\mathbf{P}_x[x(t)^2] = x^2\mathrm{e}^{-2bt}+x\int_{D_0[0,\infty)}w^2(t)\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w).$$

由引理 2.1 即得 (2.4). □

## §3 定理的证明

在本节中我们给出主要定理的证明. 首先证明 (1.13) 的解具有轨道惟一性, 然后证明 (1.13) 存在一个弱解. 有关标准的随机方程的理论, 可参见 Ikeda 和 Watanabe [10, pp.163–166] 或 Situ [19, p.76, p.104]. 假设 $X=(W,\mathscr{F},\mathscr{F}_t,x(t),\mathbf{P}_x)$ 是以 $\phi$ 为分枝机制的连续状态分枝过程的 Hunt 过程实现. 本节中我们仍然会用到马氏过程理论中的若干常用的表示. 在下面的证明中, 我们用 $t\mapsto C(t)$ 表示 $[0,\infty)$ 上的非负递增函数, 其具体定义可以逐行调整.

**命题 3.1** 假设线性增长条件 (1.8) 成立. 则对于 (1.13) 的任何解 $\{Y_t:t\geq 0\}$ 有

$$\mathbf{E}(1+Y_t)\leq[1+\mathbf{E}(X_0)\mathrm{e}^{|b|t}]\exp\{tK\mathrm{e}^{|b|t}\},\qquad t\geq 0,$$

其中 $K\geq 0$ 为 (1.8) 中的常数.

**证明** 对于 $n\geq 1$ 令 $T_n=\inf\{t\geq 0:Y_t\geq n\}$. 则几乎必然有 $\lim_{n\to\infty}T_n=\infty$. 由 (1.8) 有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(1+Y_{t\wedge T_n}) &= 1+\mathbf{E}(X_{t\wedge T_n})+\mathbf{E}\bigg[\int_0^{t\wedge T_n}\int_0^{h(Y_{s-})}\int_{D_0[0,\infty)}w(t-s)N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\bigg]\\ &\quad+\mathbf{E}\bigg[\int_0^{t\wedge T_n}\int_0^\infty\int_0^{q(Y_{s-},z)}\int_{D_0[0,\infty)}w(t-s)N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\bigg]\\ &\leq 1+\mathbf{E}(X_{t\wedge T_n}\mathrm{e}^{b(t\wedge T_n)})\mathrm{e}^{|b|t}+\mathbf{E}\bigg[\int_0^{t\wedge T_n}\mathrm{e}^{-b(t-s)}h(Y_{s-})\mathrm{d}s\bigg]\\ &\quad+\mathbf{E}\bigg[\int_0^{t\wedge T_n}\mathrm{e}^{-b(t-s)}\mathrm{d}s\int_0^\infty q(Y_{s-},z)z\nu(\mathrm{d}z)\bigg]\\ &\leq 1+\mathbf{E}(X_0)\mathrm{e}^{|b|t}+K\mathrm{e}^{|b|t}\mathbf{E}\bigg[\int_0^{t\wedge T_n}\mathbf{E}(1+Y_{s-})\mathrm{d}s\bigg]\\ &\leq 1+\mathbf{E}(X_0)\mathrm{e}^{|b|t}+K\mathrm{e}^{|b|t}\int_0^t\mathbf{E}(1+Y_{s\wedge T_n})\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

根据 Gronwall 不等式, 我们有

$$\mathbf{E}(1+Y_{t\wedge T_n}) \le [1+\mathbf{E}(X_0)\mathrm{e}^{|b|t}]\exp\{tK\mathrm{e}^{|b|t}\}.$$

在上式中令 $n\to\infty$ 并利用 Fatou 引理即得予证结论. □

**引理 3.1** 假设线性增长条件 (1.8) 和 Yamada–Watanabe 型条件 (1.9) 成立. 则 (1.13) 的解满足轨道惟一性.

**证明** 假设 $\{Y_1(t): t\ge 0\}$ 和 $\{Y_2(t): t\ge 0\}$ 是方程 (1.13) 的两个解. 对 $t\ge 0$ 令

$$\begin{aligned} Y^*(t) &= X(t) + \int_0^t\int_0^{h(Y_1(s-))\vee h(Y_2(s-))}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w) \\ &\quad + \int_0^t\int_0^\infty\int_0^{q(Y_1(s-),z)\vee q(Y_2(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w), \\ Y_*(t) &= X(t) + \int_0^t\int_0^{h(Y_1(s-))\wedge h(Y_2(s-))}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w) \\ &\quad + \int_0^t\int_0^\infty\int_0^{q(Y_1(s-),z)\wedge q(Y_2(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w), \end{aligned}$$

注意 $|Y_1(t)-Y_2(t)|\le Y^*(t)-Y_*(t)\le Y^*(t)\le Y_1(t)+Y_2(t)$. 由命题 3.1, 函数 $t\mapsto f(t):=\mathbf{E}[Y^*(t)-Y_*(t)]$ 在任何有界区间上有界. 根据 Kallenberg [11] 中的 Theorem 25.22 以及本文引理 2.1 和引理 2.4, 我们有

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbf{E}\Big[\int_0^t\int_{h(Y_1(s-))\wedge h(Y_2(s-))}^{h(Y_1(s-))\vee h(Y_2(s-))}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w) \\ &\quad + \int_0^t\int_0^\infty\int_{q(Y_1(s-),z)\wedge q(Y_2(s-),z)}^{q(Y_1(s-),z)\vee q(Y_2(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\Big] \\ &= \mathbf{E}\Big[\int_0^t |h(Y_1(s))-h(Y_2(s))|\mathrm{d}s\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w) \\ &\quad + \int_0^t \mathrm{d}s\int_0^\infty |q(Y_1(s),z)-q(Y_2(s),z)|\nu(\mathrm{d}z)\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\Big] \\ &= \mathbf{E}\Big\{\int_0^t \mathrm{e}^{-b(t-s)}\Big[|h(Y_1(s))-h(Y_2(s))| + \int_0^\infty |q(Y_1(s),z)-q(Y_2(s),z)|z\nu(\mathrm{d}z)\Big]\mathrm{d}s\Big\}. \end{aligned}$$

再由 Yamada–Watanabe 型条件 (1.9) 和 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned} f(t) &\le \mathbf{E}\Big[\int_0^t \mathrm{e}^{-b(t-s)} r(|Y_1(s)-Y_2(s)|)\mathrm{d}s\Big] \\ &\le \mathrm{e}^{|b|t}\int_0^t \mathbf{E}[r(|Y_1(s)-Y_2(s)|)]\mathrm{d}s \le \mathrm{e}^{|b|t}\int_0^t r(f(s))\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

于是, 对于任意给定的 $T\ge 0$, 存在常数 $M_T\ge 0$ 使得

$$f(t)\le M_T\int_0^t r(f(s))\mathrm{d}s, \qquad 0\le t\le T.$$

由此容易推得 $f(t)=0$, $0\le t\le T$; 可参见 Ikeda 和 Watanabe [10, p.184]. 故对任意的 $t\ge 0$ 有 $\mathbf{E}[|Y_1(t)-Y_2(t)|]=0$. 因此左极右连过程 $\{Y_1(t): t\ge 0\}$ 和 $\{Y_2(t): t\ge 0\}$ 不可区分. □

下面讨论方程 (1.13) 的解存在性. 我们的基本思路是首先定义一个逼近序列, 并证明序列的胎紧性, 然后证明此胎紧序列的弱极限即为 (1.13) 的弱解. 令 $Y_0(t)=X_t$. 对于 $n\ge 1$ 定义

$$Y_n(t) = X_t + \int_0^t\int_0^{h(Y_{n-1}(s-))}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)$$

$$+\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{q(Y_{n-1}(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w). \tag{3.1}$$

由 [16] 中的 Theorem 10.18, 我们可以取 $\{Y_n(t):t\geq 0\}$ 的左极右连的版本.

**引理 3.2** 假设函数组 $(h,\rho_1)$ 有界且 Yamada–Watanabe 型条件 (1.9) 成立. 则对任何 $t\geq 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\big[|Y_n(t)-Y_{n-1}(t)|\big]=0. \tag{3.2}$$

**证明** 由 (3.1) 我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Y_n(t)] &= \mathbf{E}[X_t]+\mathbf{E}\bigg[\int_0^t h(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\bigg]\\ &\quad+\mathbf{E}\bigg[\int_0^t \mathrm{d}s\int_0^\infty q(Y_{n-1}(s),z)\nu(\mathrm{d}z)\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\bigg]\\ &\leq \mathbf{E}[X_t]+\mathbf{E}\bigg[\int_0^t \mathrm{e}^{-b(t-s)}\rho_1(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s\bigg].\end{aligned} \tag{3.3}$$

显然, 上式右端关于 $t\geq 0$ 局部有界. 注意

$$\begin{aligned}Y_n(t)-Y_{n-1}(t) &= \int_0^t\int_{h(Y_{n-2}(s-))}^{h(Y_{n-1}(s-))}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\\ &\quad+\int_0^t\int_0^\infty\int_{q(Y_{n-2}(s-),z)}^{q(Y_{n-1}(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w).\end{aligned}$$

于是, 由引理 2.1 得

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[|Y_n(t)-Y_{n-1}(t)|\big] &\leq \mathbf{E}\bigg[\int_0^t\int_{h(Y_{n-2}(s-))\wedge h(Y_{n-1}(s-))}^{h(Y_{n-2}(s-))\vee h(Y_{n-1}(s-))}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\\ &\quad+\int_0^t\int_0^\infty\int_{q(Y_{n-2}(s-),z)\wedge q(Y_{n-1}(s-),z)}^{q(Y_{n-2}(s-),z)\vee q(Y_{n-1}(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\bigg]\\ &\leq \mathbf{E}\bigg[\int_0^t |h(Y_{n-1}(s))-h(Y_{n-2}(s))|\mathrm{d}s\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\\ &\quad+\int_0^t\mathrm{d}s\int_0^\infty |q(Y_{n-1}(s),z)-q(Y_{n-2}(s),z)|\nu(\mathrm{d}z)\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\bigg]\\ &= \mathbf{E}\bigg[\int_0^t \mathrm{e}^{-b(t-s)}\Big(|h(Y_{n-1}(s))-h(Y_{n-2}(s))|\\ &\quad+\int_0^\infty |q(Y_{n-1}(s),z)-q(Y_{n-2}(s),z)|z\nu(\mathrm{d}z)\Big)\mathrm{d}s\bigg]\\ &\leq \mathrm{e}^{|b|t}\int_0^t \mathbf{E}\big[r(|Y_{n-1}(s)-Y_{n-2}(s)|)\big]\mathrm{d}s\\ &\leq \mathrm{e}^{|b|t}\int_0^t r\big(\mathbf{E}[|Y_{n-1}(s)-Y_{n-2}(s)|]\big)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

令 $L_n(t)=\mathbf{E}[|Y_n(t)-Y_{n-1}(t)|]$. 根据 Fatou 引理,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} L_n(t) &\leq \psi'(0)\mathrm{e}^{|b|t}\int_0^t r\Big(\limsup_{n\to\infty} L_{n-1}(s)\Big)\mathrm{d}s\\ &\leq \psi'(0)\mathrm{e}^{|b|t}\int_0^t r\Big(\limsup_{n\to\infty} L_n(s)\Big)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

故有 $\limsup_{n\to\infty} L_n(t)=0$. □

**引理 3.3** 假设函数组 $(h,\rho_1,\rho_2)$ 有界. 若 $\{\tau_n:n\geq 1\}$ 为一致有界的停时序列, 则当 $t\to 0$ 有

$$\sup_{n\geq 1}\mathbf{E}\big[|Y_n(\tau_n+t)-Y_n(\tau_n)|^2\big]\to 0. \tag{3.4}$$

**证明** 取常数 $T\geq 0$ 使 $0\leq\tau_n\leq T$ 对所有 $n\geq 1$ 成立. 由 (3.1) 我们有

$$
\begin{aligned}
&Y_n(\tau_n+t)-Y_n(\tau_n)\\
&\quad=X_{\tau_n+t}-X_{\tau_n}+\int_0^{\tau_n+t}\int_0^{h(Y_{n-1}(s-))}\int_{D_0[0,\infty)}w(\tau_n+t-s)N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\\
&\qquad-\int_0^{\tau_n}\int_0^{h(Y_{n-1}(s-))}\int_{D_0[0,\infty)}w(\tau_n-s)N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\\
&\qquad+\int_0^{\tau_n+t}\int_0^{\infty}\int_0^{q(Y_{n-1}(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)}w(\tau_n+t-s)N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\\
&\qquad-\int_0^{\tau_n}\int_0^{\infty}\int_0^{q(Y_{n-1}(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)}w(\tau_n-s)N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w).
\end{aligned}\tag{3.5}
$$

由引理 2.2 得

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[|X_{\tau_n+t}-X_{\tau_n}|^2\big] &= \mathbf{E}\big\{\mathbf{P}_{X_{\tau_n}}\big[|x(t)-x(0)|^2\big]\big\}\\
&\leq tC(t)\mathbf{E}\big(X_{\tau_n}+X_{\tau_n}^2\big)\leq tC(T+t)\mathbf{E}\big(1+X_0^2\big).
\end{aligned}
$$

当 $t\to 0$ 时, 上式右边关于 $n\geq 1$ 一致地趋于零. 利用测度 $\mathbf{N}_0$ 的马氏性, 引理 2.1 和引理 2.3, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\bigg\{\bigg|\int_0^{\tau_n+t}\int_0^{h(Y_{n-1}(s-))}\int_{D_0[0,\infty)}w(\tau_n+t-s)N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\\
&\qquad-\int_0^{\tau_n}\int_0^{h(Y_{n-1}(s-))}\int_{D_0[0,\infty)}w(\tau_n-s)N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\bigg|^2\bigg\}\\
&\leq 2\mathbf{E}\bigg\{\bigg[\int_0^{\tau_n}\int_0^{h(Y_{n-1}(s-))}\int_{D_0[0,\infty)}(w(\tau_n+t-s)-w(\tau_n-s))N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\bigg]^2\bigg\}\\
&\qquad+2\mathbf{E}\bigg\{\bigg[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}\int_0^{h(Y_{n-1}(s-))}\int_{D_0[0,\infty)}w(\tau_n+t-s)N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\bigg]^2\bigg\}\\
&=2\mathbf{E}\bigg\{\int_0^{\tau_n}h(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s\int_{D_0[0,\infty)}(w(\tau_n+t-s)-w(\tau_n-s))^2\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\bigg\}\\
&\qquad+2\mathbf{E}\bigg\{\bigg[\int_0^{\tau_n}h(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s\int_{D_0[0,\infty)}(w(\tau_n+t-s)-w(\tau_n-s))\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\bigg]^2\bigg\}\\
&\qquad+2\mathbf{E}\bigg\{\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}h(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s\int_{D_0[0,\infty)}w(\tau_n+t-s)^2\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\bigg\}\\
&\qquad+2\mathbf{E}\bigg\{\bigg[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}h(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s\int_{D_0[0,\infty)}w(\tau_n+t-s)\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\bigg]^2\bigg\}\\
&\leq 2\mathbf{E}\bigg\{\int_0^{\tau_n}h(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s\int_{D_0[0,\infty)}\mathbf{P}_{w(\tau_n-s)}[(x(t)-x(0))^2]\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\bigg\}\\
&\qquad+2\mathbf{E}\bigg\{\bigg[\int_0^{\tau_n}h(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s\int_{D_0[0,\infty)}\mathbf{P}_{w(\tau_n-s)}[x(t)-x(0)]\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\bigg]^2\bigg\}\\
&\qquad+C(t)\mathbf{E}\bigg\{\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}h(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s+\bigg[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}h(Y_{n-1}(s-))\mathrm{d}s\bigg]^2\bigg\}\\
&\leq tC(t)\mathbf{E}\bigg\{\int_0^{\tau_n}h(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s\int_{D_0[0,\infty)}[w(\tau_n-s)+w(\tau_n-s)^2]\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\bigg\}\\
&\qquad+2(1-\mathrm{e}^{-bt})^2\mathbf{E}\bigg\{\bigg[\int_0^{\tau_n}h(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s\int_{D_0[0,\infty)}w(\tau_n-s)\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\bigg]^2\bigg\}\\
&\qquad+C(t)\mathbf{E}\bigg\{\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}h(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s+\bigg[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}h(Y_{n-1}(s-))\mathrm{d}s\bigg]^2\bigg\}\\
&\leq tC(t)\mathbf{E}\bigg\{\int_0^{\tau_n}h(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s+\bigg[\int_0^{\tau_n}h(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s\bigg]^2\bigg\}\\
&\qquad+C(t)\mathbf{E}\bigg\{\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}h(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s+\bigg[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}h(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s\bigg]^2\bigg\}.
\end{aligned}
$$

因为 $h$ 有界, 由引理 2.4, 上式右边当 $t\to 0$ 时关于 $n\geq 1$ 一致地趋于零. 类似地,

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\bigg\{\bigg[\int_0^{\tau_n+t}\int_0^\infty\int_0^{q(Y_{n-1}(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n+t-s)N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\\
&\qquad -\int_0^{\tau_n}\int_0^\infty\int_0^{q(Y_{n-1}(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n-s)N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\bigg]^2\bigg\}\\
&\quad\leq 2\mathbf{E}\bigg\{\bigg[\int_0^{\tau_n}\int_0^\infty\int_0^{q(Y_{n-1}(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)}(w(\tau_n+t-s)-w(\tau_n-s))N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\bigg]^2\bigg\}\\
&\qquad +2\mathbf{E}\bigg\{\bigg[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}\int_0^\infty\int_0^{q(Y_{n-1}(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n+t-s)N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\bigg]^2\bigg\}\\
&\quad= 2\mathbf{E}\bigg\{\int_0^{\tau_n}\mathrm{d}s\int_0^\infty q(Y_{n-1}(s),z)\nu(\mathrm{d}z)\int_{D_0[0,\infty)}(w(\tau_n+t-s)-w(\tau_n-s))^2\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\bigg\}\\
&\qquad +2\mathbf{E}\bigg\{\bigg[\int_0^{\tau_n}\mathrm{d}s\int_0^\infty q(Y_{n-1}(s),z)\nu(\mathrm{d}z)\int_{D_0[0,\infty)}(w(\tau_n+t-s)-w(\tau_n-s))\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\bigg]^2\bigg\}\\
&\qquad +2\mathbf{E}\bigg\{\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}\mathrm{d}s\int_0^\infty q(Y_{n-1}(s),z)\nu(\mathrm{d}z)\int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n+t-s)^2\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\bigg\}\\
&\qquad +2\mathbf{E}\bigg\{\bigg[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}\mathrm{d}s\int_0^\infty q(Y_{n-1}(s),z)\nu(\mathrm{d}z)\int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n+t-s)\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\bigg]^2\bigg\}\\
&\quad\leq 2\mathbf{E}\bigg\{\int_0^{\tau_n}\mathrm{d}s\int_0^\infty q(Y_{n-1}(s),z)\nu(\mathrm{d}z)\int_{D_0[0,\infty)}\mathbf{P}_{w(\tau_n-s)}[(x(t)-x(0))^2]\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\bigg\}\\
&\qquad +2\mathbf{E}\bigg\{\bigg[\int_0^{\tau_n}\mathrm{d}s\int_0^\infty q(Y_{n-1}(s),z)\nu(\mathrm{d}z)\int_{D_0[0,\infty)}\mathbf{P}_{w(\tau_n-s)}[x(t)-x(0)]\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\bigg]^2\bigg\}\\
&\qquad +C(t)\mathbf{E}\bigg\{\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}[\rho_1(Y_{n-1}(s))+\rho_2(Y_{n-1}(s))]\mathrm{d}s+\bigg[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}\rho_1(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s\bigg]^2\bigg\}\\
&\quad\leq tC(t)\mathbf{E}\bigg\{\int_0^{\tau_n}\mathrm{d}s\int_0^\infty q(Y_{n-1}(s),z)\nu(\mathrm{d}z)\int_{D_0[0,\infty)}[w(\tau_n-s)+w(\tau_n-s)^2]\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\bigg\}\\
&\qquad +2(\mathrm{e}^{-bt}-1)^2\mathbf{E}\bigg\{\bigg[\int_0^{\tau_n}\mathrm{d}s\int_0^\infty q(Y_{n-1}(s),z)\nu(\mathrm{d}z)\int_{D_0[0,\infty)} w(\tau_n-s)\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\bigg]^2\bigg\}\\
&\qquad +C(t)\mathbf{E}\bigg\{\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}[\rho_1(Y_{n-1}(s))+\rho_2(Y_{n-1}(s))]\mathrm{d}s+\bigg[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}\rho_1(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s\bigg]^2\bigg\}\\
&\quad\leq tC(t)\mathbf{E}\bigg\{\int_0^{\tau_n}[\rho_1(Y_{n-1}(s))+\rho_2(Y_{n-1}(s))]\mathrm{d}s+\bigg[\int_0^{\tau_n}\rho_1(Y_{n-1}(s-))\mathrm{d}s\bigg]^2\bigg\}\\
&\qquad +C(t)\mathbf{E}\bigg\{\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}[\rho_1(Y_{n-1}(s))+\rho_2(Y_{n-1}(s))]\mathrm{d}s+\bigg[\int_{\tau_n}^{\tau_n+t}\rho_1(Y_{n-1}(s))\mathrm{d}s\bigg]^2\bigg\}.
\end{aligned}
$$

当 $t\to 0$ 时, 上式右边关于 $n\geq 1$ 一致地趋于零. 再由 (3.5) 知 (3.4) 成立. □

为了方便叙述, 下面限定在有界时间区间上讨论. 取定常数 $T\geq 0$, 用 $D[0,T]$ 表示 $[0,T]$ 到 $[0,\infty)$ 的所有左极右连的轨道构成的空间, 并赋予 Skorokhod 拓扑. 对 $w\in D[0,T]$ 我们作如下延拓: 当 $t<0$ 令 $w(t)=0$; 当 $t>T$ 令 $w(t)=w(T)$. 对于整数 $i\geq 1$ 定义 $\mathbb{R}$ 上的非负连续函数

$$
\gamma_i(x)=\begin{cases}4i^2x & \text{if } 0<x\leq 1/2i,\\ 2i-4i^2(x-1/2i) & \text{if } 1/2i<x\leq 1/i,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}
$$

再定义 $[0,\infty)^2$ 上的连续函数

$$
f_i(u,x)=\begin{cases}1 & \text{if } u<x(1-1/i),\\ i(x-u)/x & \text{if } x(1-1/i)\leq u<x,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}
$$

对于 $t\in[0,T]$ 和 $w\in D[0,T]$ 我们令

$$l_i(w,t)=\int_0^{1/i} w(t+s)\gamma_i(s)\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{\infty} w(s)\gamma_i(s-t)\mathrm{d}s. \tag{3.6}$$

显然 $(t,w)\mapsto l_i(w,t)$ 是 $(0,T]\times D[0,T]$ 上的连续函数.

令 $\{t_j:j\geq 1\}$ 是 $[0,T]$ 中的有理数的一个排列. 对于 $(s,u,w)\in(0,T]\times(0,\infty)\times D[0,T]$ 定义

$$F(s,u,w)=\mathrm{e}^{-u}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}2^{-i-j}l_i(w,t_j-s).$$

则 $F$ 是 $(0,T]\times(0,\infty)\times D[0,T]$ 上正的连续函数. 令 $\mathbf{M}_0$ 表示乘积空间 $(0,T]\times(0,\infty)\times D[0,T]$ 上满足

$$\int_0^T\int_0^{\infty}\int_{D[0,T]} F(s,u,w)\eta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)<\infty$$

的 Borel 测度 $\eta$ 构成的空间, 并如下定义此空间上的拓扑: 对于 $\eta_k,\eta\in\mathbf{M}_0$ 规定 $\eta_k\to\eta$ 当且仅当在 $(0,T]\times(0,\infty)\times D[0,T]$ 上的有限测度的弱收敛下

$$F(s,u,w)\eta_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\to F(s,u,w)\eta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w),$$

即对 $(0,T]\times(0,\infty)\times D[0,T]$ 上的任何有界连续函数 $f$ 有

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^{\infty}\int_{D[0,T]} & f(s,u,w)F(s,u,w)\eta_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\\ &\to\int_0^T\int_0^{\infty}\int_{D[0,T]} f(s,u,w)F(s,u,w)\eta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w).\end{aligned}$$

类似地, 令 $\mathbf{M}_1$ 表示乘积空间 $(0,T]\times(0,\infty)^2\times D[0,T]$ 上满足

$$\int_0^T\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{D[0,T]} zF(s,u,w)\eta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)<\infty$$

的 Borel 测度 $\eta$ 构成的空间, 并如下定义此空间上的拓扑: 对于 $\eta_k,\eta\in\mathbf{M}_1$, 规定 $\eta_k\to\eta$ 当且仅当在 $(0,T]\times(0,\infty)^2\times D[0,T]$ 上的有限测度的弱收敛意义下有

$$zF(s,u,w)\eta_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\to zF(s,u,w)\eta(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w).$$

记 $X=\{X_t:t\in[0,T]\}$ 和 $Y_n=\{Y_n(t):t\in[0,T]\}$. 我们可以视 $\{(X,Y_n,Y_{n-1},N_0,N_1):n\geq 1\}$ 为取值于 $D[0,T]^3\times\mathbf{M}_0\times\mathbf{M}_1$ 的随机变量列. 事实上, 根据引理 2.4 有

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\Big[\int_0^T\int_0^{\infty}\int_{D_0[0,T]} F(s,u,w)N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\Big]\\
&\quad=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}2^{-i-j}\mathbf{E}\Big[\int_0^T\int_0^{\infty}\int_{D_0[0,T]}\mathrm{e}^{-u}l_i(w,t_j-s)N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\Big]\\
&\quad=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}2^{-i-j}\int_0^T\mathrm{d}s\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\int_{D_0[0,T]} l_i(w,t_j-s)\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\\
&\quad=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}2^{-i-j}\int_{D_0[0,T]}\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\int_0^T\mathrm{d}s\int_0^1 w(t_j-s+r)\gamma_i(r)\mathrm{d}r\\
&\quad=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}2^{-i-j}\int_{D_0[0,T]}\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\int_0^1\gamma_i(r)\mathrm{d}r\int_{t_j+r-T}^{t_j+r} w(s)\mathrm{d}s\\
&\quad\leq\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}2^{-i-j}\int_{D_0[0,T]}\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\int_0^{T+1} w(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-i-j}\int_0^{T+1} \mathrm{e}^{-bs}\mathrm{d}s < \infty.$$

因此 $\mathbf{P}(N_0 \in \mathbf{M}_0) = 1$. 类似地可以证明 $\mathbf{P}(N_1 \in \mathbf{M}_1) = 1$.

**引理 3.4** 假设定理 1.1 的条件成立, 且函数组 $(h, \rho_1, \rho_2)$ 有界. 则序列 $\{(X, Y_n, Y_{n-1}, N_0, N_1) : n \geq 1\}$ 在 $D[0,T]^3 \times \mathbf{M}_0 \times \mathbf{M}_1$ 中胎紧.

**证明** 由于 $(X, N_0, N_1)$ 的分布不依赖于 $n \geq 1$, 我们只需证明序列 $\{(Y_n, Y_{n-1}) : n \geq 1\}$ 在 $D[0,T]^2$ 中胎紧. 由 (3.3) 式不难推出, 对于任何 $t \in [0,T]$, 随机变量列 $\{(Y_n(t), Y_{n-1}(t)) : n \geq 1\}$ 胎紧. 再由引理 3.3, 对任何一致有界的停时序列 $\{\tau_n : n \geq 1\}$, 当 $n \to \infty$ 有

$$\sup_{n\geq 1}\mathbf{E}\big\{|Y_n(\tau_n + t) - Y_n(\tau_n)|^2 + |Y_{n-1}(\tau_n + t) - Y_{n-1}(\tau_n)|^2\big\} \to 0.$$

根据 Aldous [1] 的判别准则, 序列 $\{(Y_n, Y_{n-1}) : n \geq 1\}$ 在 $D[0,T]^2$ 中胎紧; 另可参看 Ethier 和 Kurtz [7, p.137-138]. □

**引理 3.5** 假设定理 1.1 的条件成立, 且函数组 $(h, \rho_1, \rho_2)$ 有界. 则存在子列 $\{n_k\} \subset \{n\}$, 以及定义在某个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ 上且取值于 $D[0,T]^2 \times \mathbf{M}_0 \times \mathbf{M}_1$ 的随机变量 $(X', Y', N', N'')$ 和取值于 $D[0,T]^3 \times \mathbf{M}_0 \times \mathbf{M}_1$ 的随机变量列 $\{(X'_k, Y'_k, Z'_k, N'_k, N''_k) : k \geq 1\}$ 使得 $(X'_k, Y'_k, Z'_k, N'_k, N''_k)$ 和 $(X, Y_{n_k}, Y_{n_k-1}, N_0, N_1)$ 同分布, 且当 $k \to \infty$ 几乎必然 $(X'_k, Y'_k, Z'_k, N'_k, N''_k) \to (X', Y', Y', N', N'')$.

**证明** 由引理 3.4, 有子列 $\{n_k\} \subset \{n\}$ 使当 $k \to \infty$ 时 $(X, Y_{n_k}, Y_{n_k-1}, N_0, N_1)$ 依分布收敛. 根据 Skorokhod 表示定理, 存在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ 以及定义在此空间上, 取值于 $D[0,T]^3 \times \mathbf{M}_0 \times \mathbf{M}_1$ 的随机变量 $(X', Y', Z', N', N'')$ 和 $(X'_k, Y'_k, Z'_k, N'_k, N''_k)$, $k \geq 1$ 使得 $(X'_k, Y'_k, Z'_k, N'_k, N''_k)$ 与 $(X, Y_{n_k}, Y_{n_k-1}, N_0, N_1)$ 同分布, 且当 $k \to \infty$ 时 $(X'_k, Y'_k, Z'_k, N'_k, N''_k)$ 几乎必然收敛于 $(X', Y', Z', N', N'')$. 由引理 3.2 和控制收敛定理, 对任意的 $t \in [0,T]$ 有

$$\mathbf{E}[|Y'(t) - Z'(t)|] = \lim_{k\to\infty}\mathbf{E}[|Y'_k(t) - Z'_k(t)|] = \lim_{k\to\infty}\mathbf{E}[|Y_{n_k}(t) - Y_{n_k-1}(t)|] = 0.$$

所以 $\{Y'(t) : t \in [0,T]\}$ 和 $\{Z'(t) : t \in [0,T]\}$ 不可区分. □

我们下面的主要任务是证明 $(X', Y', N', N'')$ 是方程 (1.13) 的弱解. 因为 $(X'_k, Y'_k, Z'_k, N'_k, N''_k)$ 与 $(X, Y_{n_k}, Y_{n_k-1}, N_0, N_1)$ 同分布, 我们有

$$\begin{aligned}
Y'_k(t) &= X'_k(t) + \int_0^t\int_0^{h(Z'_k(s-))}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N'_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w) \\
&\quad + \int_0^t\int_0^{\infty}\int_0^{q(Z'_k(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N''_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w) \\
&= X'_k(t) + \int_0^t\int_0^{h(Y'(s-))}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N'_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w) \\
&\quad + \int_0^t\int_0^{\infty}\int_0^{q(Y'(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N''_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w) + \epsilon_k(t),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中

$$\begin{aligned}
\epsilon_k(t) &= \int_0^t\int_{h(Y'(s-))}^{h(Z'_k(s-))}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N'_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w) \\
&\quad + \int_0^t\int_0^{\infty}\int_{q(Y'(s-),z)}^{q(Z'_k(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N''_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w).
\end{aligned}$$

为了简化后面的表述, 我们令

$$\begin{aligned} U(t) &= \int_0^t \int_0^{h(Y'(s-))} \int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N'(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w), \\ U_k(t) &= \int_0^t \int_0^{h(Y'(s-))} \int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N'_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w). \end{aligned}$$

类似地, 定义

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{q(Y'(s-),z)} \int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N''(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w), \\ V_k(t) &= \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{q(Y'(s-),z)} \int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N''_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w). \end{aligned}$$

**引理 3.6** 假设定理 1.1 的条件成立, 且函数组 $(h,\rho_1,\rho_2)$ 有界. 则有 $\lim_{k\to\infty}\mathbf{E}[|\epsilon_k(t)|]=0$.

**证明** 由 $\epsilon_k(t)$ 的定义不难看出

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[|\epsilon_k(t)|] &\le \mathbf{E}\bigg\{\int_0^t \int_{h(Y'(s-))\wedge h(Z'_k(s-))}^{h(Y'(s-))\vee h(Z'_k(s-))} \int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N'_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\bigg\} \\ &\quad + \mathbf{E}\bigg\{\int_0^t \int_0^\infty \int_{q(Y'(s-),z)\wedge q(Z'_k(s-),z)}^{q(Y'(s-),z)\vee q(Z'_k(s-),z)} \int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N''_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\bigg\} \\ &\le \mathbf{E}\bigg\{\int_0^t |h(Y'(s))-h(Z'_k(s))|\mathrm{d}s \int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)\mathbf{N}_0(\mathrm{d}w)\bigg\} \\ &\quad + \mathbf{E}\bigg\{\int_0^t \mathrm{d}s \int_0^\infty |q(Y'(s),z)-q(Z'_k(s),z)|\nu(\mathrm{d}z) \int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\bigg\} \\ &\le \mathbf{E}\bigg\{\int_0^t \bigg[|h(Y'(s))-h(Z'_k(s))| + \int_0^\infty |q(Y'(s),z)-q(Z'_k(s),z)|z\nu(\mathrm{d}z)\bigg]\mathrm{e}^{-b(t-s)}\mathrm{d}s\bigg\} \\ &\le \mathbf{E}\bigg\{\int_0^t [r(|Y'(s)-Z'_k(s)|)\wedge(2\|h+\rho_1\|)]\mathrm{e}^{-b(t-s)}\mathrm{d}s\bigg\}. \end{aligned}$$

根据控制收敛定理, 上式右端当 $k\to\infty$ 时趋近于零. □

**引理 3.7** 假设定理 1.1 的条件成立, 且函数组 $(h,\rho_1,\rho_2)$ 有界. 则对任意有理数 $t\in[0,T]$ 我们有 $\lim_{k\to\infty}\mathbf{E}[|U_k(t)-U(t)|\wedge 1]=0$ 和 $\lim_{k\to\infty}\mathbf{E}[|V_k(t)-V(t)|\wedge 1]=0$.

**证明** 由于方法和计算类似, 这里只证明第二个结论. 记 $\eta_k=N''_k+N''$ 和 $\zeta_k=N''_k-N''$. 我们有

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\Big[|V_k(t)-V(t)|\wedge 1\Big] \\ &\quad = \mathbf{E}\bigg[\bigg|\int_0^T \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{D_0[0,\infty)} 1_{\{s\le t\}}1_{\{u\le q(Y'(s-),z)\}}w(t-s)\zeta_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\bigg|\wedge 1\bigg] \\ &\quad \le \zeta_{k,i}(t) + \mathbf{E}\bigg[\bigg|\int_0^T \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{D_0[0,\infty)} [1_{\{s\le t\}}1_{\{u\le q(Y'(s-),z)\}}w(t-s) \\ &\qquad\qquad - f_i(s,t)f_i(u,q(l_i(Y',s),z)\wedge i)l_i(w,t-s)]\zeta_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\bigg|\bigg]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中

$$\zeta_{k,i}(t) = \mathbf{E}\bigg[\bigg|\int_0^T \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{D_0[0,\infty)} f_i(s,t)f_i(u,q(l_i(Y',s),z)\wedge i)l_i(w,t-s)\zeta_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\bigg|\wedge 1\bigg].$$

注意当 $k\to\infty$, 在 $\mathbf{M}_1$ 中几乎必然地 $N''_k\to N''$. 由控制收敛定理, 对任意有理数 $t\in[0,T]$ 有 $\lim_{k\to\infty}\zeta_{k,i}(t)=0$, 而 (3.8) 式右边第二项被下面的值所控制,

$$\eta_i(t) := \mathbf{E}\bigg[\int_0^T \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{D_0[0,\infty)} |1_{\{s\le t\}}1_{\{u\le q(Y'(s-),z)\}}w(t-s)$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad - f_i(s,t)f_i(u,q(l_i(Y',s),z)\wedge i)l_i(w,t-s)|\eta_k(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w)\Big] \\
&= 2\mathbf{E}\Big[\int_0^T \mathrm{d}s\int_0^\infty \nu(\mathrm{d}z)\int_0^\infty \mathrm{d}u\int_{D_0[0,\infty)} |1_{\{s\le t\}}1_{\{u\le q(Y'(s),z)\}}w(t-s) \\
&\qquad - f_i(s,t)f_i(u,q(l_i(Y',s),z)\wedge i)l_i(w,t-s)|\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\Big].
\end{aligned}
$$

注意上面的值并不依赖于 $k\ge 1$. 对有理数 $t\in[0,T]$, 在 (3.8) 两端取极限得

$$
\limsup_{k\to\infty}\mathbf{E}[|V_k(t)-V(t)|\wedge 1]\le \eta_i(t). \tag{3.9}
$$

另一方面, 不难发现

$$
\begin{aligned}
\eta_i(t) &\le 2\mathbf{E}\Big[\int_0^T \mathrm{d}s\int_0^\infty \nu(\mathrm{d}z)\int_0^\infty \mathrm{d}u\int_{D_0[0,\infty)} |1_{\{s\le t\}}1_{\{u\le q(Y'(s),z)\}}w(t-s) \\
&\qquad - 1_{\{s\le t\}}1_{\{u\le q(Y'(s),z)\}}l_i(w,t-s)|\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\Big] \\
&\quad + 2\mathbf{E}\Big[\int_0^T \mathrm{d}s\int_0^\infty \nu(\mathrm{d}z)\int_0^\infty \mathrm{d}u\int_{D_0[0,\infty)} |1_{\{s\le t\}}1_{\{u\le q(Y'(s),z)\}}l_i(w,t-s) \\
&\qquad - 1_{\{s\le t\}}1_{\{u\le q(Y'(s),z)\wedge i\}}l_i(w,t-s)|\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\Big] \\
&\quad + 2\mathbf{E}\Big[\int_0^T \mathrm{d}s\int_0^\infty \nu(\mathrm{d}z)\int_0^\infty \mathrm{d}u\int_{D_0[0,\infty)} |1_{\{s\le t\}}1_{\{u\le q(Y'(s),z)\wedge i\}}l_i(w,t-s) \\
&\qquad - 1_{\{s\le t\}}f_i(u,q(l_i(Y',s))\wedge i)l_i(w,t-s)|\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\Big] \\
&\quad + 2\mathbf{E}\Big[\int_0^T \mathrm{d}s\int_0^\infty \nu(\mathrm{d}z)\int_0^\infty \mathrm{d}u\int_{D_0[0,\infty)} |1_{\{s\le t\}}f_i(u,q(l_i(Y',s))\wedge i)l_i(w,t-s) \\
&\qquad - f_i(s,t)f_i(u,q(l_i(Y',s),z)\wedge i)l_i(w,t-s)|\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\Big] \\
&\le 2\mathbf{E}\Big[\int_0^t \mathrm{d}s\int_0^\infty q(Y'(s),z)\nu(\mathrm{d}z)\int_{D_0[0,\infty)} |w(t-s)-l_i(w,t-s)|\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\Big] \\
&\quad + 2\mathbf{E}\Big[\int_0^t \mathrm{d}s\int_0^\infty |q(Y'(s),z)-q(Y'(s),z)\wedge i|\nu(\mathrm{d}z)\int_{D_0[0,\infty)} l_i(w,t-s)\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\Big] \\
&\quad + 2i^{-1}\mathbf{E}\Big[\int_0^t \mathrm{d}s\int_0^\infty (q(Y'(s),z)\wedge i)\nu(\mathrm{d}z)\int_{D_0[0,\infty)} l_i(w,t-s)\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\Big] \\
&\quad + 2\mathbf{E}\Big[\int_{t(1-1/i)}^t \mathrm{d}s\int_0^\infty (q(l_i(Y',s),z)\wedge i)\nu(\mathrm{d}z)\int_{D_0[0,\infty)} l_i(w,t-s)\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w)\Big].
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

由 (3.6) 有

$$
\begin{aligned}
\int_{D_0[0,\infty)} l_i(w,t-s)\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w) &= \int_0^1 \gamma_i(r)\mathrm{d}r\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s+r)\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w) \\
&= z\int_0^1 \gamma_i(r)\mathrm{e}^{-b(t-s+r)}\mathrm{d}r \le z\mathrm{e}^{|b|(t+1)},
\end{aligned}
$$

并进而有

$$
\begin{aligned}
&\int_{D_0[0,\infty)} |w(t-s)-l_i(w,t-s)|\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w) \\
&\qquad \le \int_{D_0[0,\infty)} [w(t-s)+l_i(w,t-s)]\mathbf{Q}_z(\mathrm{d}w) \le 2z\mathrm{e}^{|b|(t+1)}.
\end{aligned}
$$

上式左端当 $i\to\infty$ 时趋于零. 这样, 对 (3.10) 右端应用控制收敛定理得 $\lim_{i\to\infty}\eta_i(t)=0$. 再由 (3.9) 知 $\limsup_{k\to\infty}\mathbf{E}[|V_k(t)-V(t)|\wedge 1]=0$ 对有理数 $t\in[0,T]$ 成立. □

**引理 3.8** 假设定理 1.1 的条件成立, 且函数组 $(h,\rho_1,\rho_2)$ 有界. 再设 $(X',Y',N',N'')$ 由引理 3.5 给出. 则对于任何 $t\geq 0$ 几乎必然有

$$\begin{aligned} Y'(t) &= X'(t)+\int_0^t\int_0^{h(Y'(s-))}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N'(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w) \\ &\quad +\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{q(Y'(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N''(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w). \end{aligned} \tag{3.11}$$

**证明** 在等式 (3.7) 两端取极限 $k\to\infty$, 并利用引理 3.6 和引理 3.7 知 (3.11) 对有理数 $t\in[0,T]$ 几乎必然成立. 利用各项的右连续性知该方程对于任何 $t\in[0,T]$ 几乎必然成立. 再由 $T\geq 0$ 的任意性即得予证结论. □

**定理 1.1 的证明** 方程 (1.13) 的解的轨道惟一性由引理 3.1 给出. 如果函数组 $(h,\rho_1,\rho_2)$ 有界, 方程 (1.13) 的弱解的存在性由引理 3.8 得到. 下面考虑 $(h,\rho_1,\rho_2)$ 无界的情况. 对于任何 $n\geq 1$ 考虑方程

$$\begin{aligned} Y(t) &= X_t+\int_0^t\int_0^{h(n\wedge Y(s-))}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N_0(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w) \\ &\quad +\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{q(n\wedge Y(s-),z)}\int_{D_0[0,\infty)} w(t-s)N_1(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z,\mathrm{d}u,\mathrm{d}w). \end{aligned} \tag{3.12}$$

因为 $(h,\rho_1,\rho_2)$ 在 $[0,\infty)$ 上局部有界, 由引理 3.1 和引理 3.8, 上面方程有轨道惟一的解 $\{Y_n(t):t\geq 0\}$. 对于 $n\geq 1$ 令 $T_n=\inf\{t\geq 0: Y_n(t)\geq n\}$. 由 (3.12) 的轨道惟一性, 停时列 $\{T_n\}$ 递增, 且对 $0\leq t\leq T_{n-1}$ 有 $Y_n(t)=Y_{n-1}(t)$. 再由命题 3.1 易知 $\lim_{n\to\infty}T_n=\infty$. 因此极限 $Y_t=\lim_{n\to\infty}Y_n(t)$ 存在, 显然 $\{Y_t:t\geq 0\}$ 为 (1.13) 的解. □

**定理 1.2 的证明** 假设 $\{Y_t:t\geq 0\}$ 是 (1.13) 的解. 令 $f$ 是 $[0,\infty)$ 上得二次连续可微函数, 且自身及其前两阶导函数均有界且连续. 对 $x\geq 0$ 令

$$\begin{aligned} Lf(x) &= cxf''(x)+x\int_0^\infty\big[f(x+z)-f(x)-zf'(x)\big]m(\mathrm{d}z) \\ &\quad +[h(x)-bx]f'(x)+\int_0^\infty\big[f(x+z)-f(x)\big]q(x,z)\nu(\mathrm{d}z). \end{aligned}$$

利用 (1.13) 和伊藤公式不难发现

$$M_t:=f(Y_t)-f(Y_0)-\int_0^t Lf(Y_s)\mathrm{d}s,\qquad t\geq 0$$

为平方可积鞅. 局部地应用 [9] 中的 Proposition 4.2 可知 $\{Y_t:t\geq 0\}$ 是 (1.10) 的弱解. □

## 参考文献


[1] Aldous, D. (1978): Stopping times and tightness. *Ann. Probab.* **6**, 335-340.

[2] Bertoin, J.; Le Gall, J.-F. (2006): Stochastic flows associated to coalescent processes III: Limit theorems. *Illinois J. Math.* **50**, 147-181.

[3] Cox, J.; Ingersoll, J.; Ross, S. (1985): A theory of the term structure of interest rate. *Econometrica* **53**, 385-408.

[4] Dawson, D.A.; Li, Z. (2003): Construction of immigration superprocesses with dependent spatial motion from one-dimensional excursions. *Probab. Theory Related Fields* **127**, 37-61.

[5] Dawson, D.A.; Li, Z. (2006): Skew convolution semigroups and affine markov processes. *Ann. Probab.* **34**, 1103-1142.

[6] Dawson, D.A.; Li, Z. (2012): Stochastic equations, flows and measure-valued processes. *Ann. Probab.* **40**, 813-857.

[7] Ethier, S.N.; Kurtz, T.G. (1986): *Markov Processes: Characterization and Convergence.* Wiley, New York.

[8] Fu, Z.; Li, Z. (2004): Measure-valued diffusions and stochastic equations with Poisson process. *Osaka J. Math.* **41**, 724-744.

[9] Fu, Z.; Li, Z. (2010): Stochastic equations of non-negative processes with jumps. *Stochastic Process. Appl.* **120**, 306-330.

[10] Ikeda, N.; Watanabe, S. (1989): *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes.* 2nd Ed. North-Holland, Amsterdam; Kodansha, Tokyo.

[11] Kallenberg, O. (2002): *Foundations of Modern Probability.* 2nd Ed. Springer, New York.

[12] Kawazu, K.; Watanabe, S. (1971): Branching processes with immigration and related limit theorems. *Theory Probab. Appl.* **16**, 36-54.

[13] Lamberton, D.; Lapeyre, B. (1996): *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance.* Chapman and Hall, London.

[14] Lamperti, J. (1967): The limit of a sequence of branching processes. *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **7**, 271-288.

[15] Li, Z. (1996): Immigration structures associated with Dawson-Watanabe superprocesses. *Stochastic Process. Appl.* **62**, 73-86.

[16] Li, Z. (2011): *Measure-Valued Branching Markov Processes.* Springer, Heidelberg.

[17] Li, Z. (2018+): *Continuous-State Branching Processes with Immigration.* In: From Probability to Finance – Lecture note of BICMR Summer School on Financial Mathematics, Series of Mathematical Lectures from Peking University. Springer.

[18] Sharpe, M. (1988): *General Theory of Markov Processes.* Academic Press, New York.

[19] Situ, R. (2005): *Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications.* Springer, Berlin.

# Continuous-state branching processes with dependent immigration

Zenghu LI, Wei ZHANG

School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, China

Email: lizh@bnu.edu.cn

**Abstract:** By solving a stochastic integral equation driven by Poisson random measures on a path space, we construct a continuous-state branching process with dependent immigration under a Yamada–Watanabe type condition for the immigration rate functions. This construction improves the results under Lipschitz conditions obtained by Dawson and Li (2003), Fu and Li (2004), Li (2011) and others.

**Key words:** continuous-state branching process; dependent immigration; immigration rate function; stochastic integral equation; Poisson random measure; Yamada–Watanabe type condition.

**MSC (2010) Subject Classification:** 60J80, 60H10, 60H20