

马尔可夫过程研究方向

马尔可夫过程是研究得相当深入，而且还在蓬勃发展的随机过程。随着现代科学技术的发展，很多在应用中出现的马氏过程模型的研究受到越来越多的重视。马氏过程研究组目前从事的研究领域包括测度值过程、分枝过程、仿射过程、随机微分方程、迷向随机流、随机环境模型、随机金融模型等。这些模型来源于物理、生物、金融等学科，既有丰富优美的数学结构，又有广泛深刻的应用背景。马氏过程方向研究的目的是从理论上理解这些模型所描述的自然现象。马氏过程研究方向的学术带头人是王梓坤院士，他的研究组是国内该方向最早的研究集体之一。王梓坤 1958 年毕业于莫斯科 (Moscow) 大学数学力学系，获副博士学位。他的导师是著名数学家 A. N. Kolmogorov 教授和 R. L. Dobrushin 教授。王梓坤的毕业论文的研究课题是生灭过程的分类，他的工作后来对国内在该领域的研究产生了重要影响。1958 年，王梓坤回国后在继续自己研究的同时，积极培育概率论和随机过程的研究队伍，并于 1959 年开始带研究生。他早期的学生包括施仁杰、杨向群、吴让泉、吴荣、刘文、李志阡等。

50 至 60 年代，王梓坤在生灭过程研究中提出了极限过渡构造方法，以此解决了生灭过程的构造问题。他还将差分和递推方法应用于生灭过程的泛函和首达时分布的研究，得到了一系列结果。苏联数学家 A. A. Ushkevich [Transaction 4th Prague Conference on Information Theory, Statistical



Decision Function, Random Process. 1965]

写道：“Feller 构造了生灭过程在轨道达到无穷以后的不同延拓…，而王梓坤用极限过渡法找出了生灭过程的所有延拓”。英国皇家学会会员 D. G. Kendall 在美国《数学评论》上对王梓坤的一篇论文评论道：“我认为，这篇文章除作者所提到的应用外，还有许多重要的应用。例如，在传染病研究中…，该问题是困难的，本文所提出的技巧值得认真研究”。在马氏过程方面，王梓坤证明某些

马氏过程的常返性等价于其有限调和函数为常数，而 0-1 律等价于其有限过份函数为常数。

1962 年，王梓坤翻译的前苏联数学家、后成为美国科学院院士的 E. B. Dynkin 的著作《马尔可夫过程论基础》由科学出版社出版。该书总结了当时苏联概率学派在马氏过程研究方面的最新成就，推

动了我国在该领域的研究。1965年，科学出版社出版了王梓坤的著作《随机过程论》。该书是国内最早系统叙述随机过程理论的著作之一，多年来是我国学者在该领域重要的教学和研究参考书，几次印刷发行总计近3万册，对概率论与随机过程理论在我国的传播与发展起了重要的作用。

70年代，王梓坤和他的同事转向概率论应用的研究，主要从事随机过程的计算机模拟和统计预报方面的研究。1976年科学出版社出版了他的《概率论基础及其应用》。该书在严格地讲述概率论基础知识的同时，介绍了概率论在数理统计、计算方法和可靠性理论中的应用，被很多高等院校和研究单位用作教材或参考书。1978年，王梓坤与钱尚纬合著的《概率统计预报》由科学出版社出版。

80年代初，王梓坤和他的小组研究布朗运动与位势理论和多参数马氏过程。1980年他与 R. K. Gettoor 几乎同时独立地解决了布朗运动的首出时与末离时的联合分布问题。1984年他利用多重随机积分给出了多指标 Ornstein-Uhlenbeck 过程的定义，并取得了一系列的成果。国外 J. B. Walsh 于1986年也提出了基本上一致的定义。后来王梓坤又将两种定义作了统一的处理。1980年，王梓坤的研究专著《生灭过程与马尔可夫链》作为“纯粹数学与应用数学专著”丛书的第5号由科学出版社出版。该书对他在生灭过程方面的研究成果进行了较为系统地概括和总结。此后王梓坤与杨向群合作对该书进行了扩充，1992年由德国 Springer 公司出版了英文版。美国《数学评论》介绍说：“本书后三章的许多结果来源于作者个人的研究，这是一部雅致而明晰的著作 (an elegant and lucid book)”，又对英文版评论道：“这本专著带给英文读者中国概率论学派70年代所获得的许多结果”。实际上，该书的大部分结果是在50年代末至60年代取得的！1983年，科学出版社出版了王梓坤著的《布朗运动与位势》。

1984年，王梓坤调入北京师范大学后与李占柄共同主持马氏过程讨论班，继续在马氏过程与位势理论、多参数马氏过程等方面的研究工作。李占柄1961年7月毕业于前苏联莫斯科大学数学力学系概率论与数理统计专业。1961年8月开始任教于北京师范大学数学系。他曾于1980年10月至1982年1月访问美国麻省州立大学，1991年11月至1992年6月访问乌克兰基辅大学。李占柄长期从事随机过程，非线性方程和数学物理方面的研究。八十年代，他在对一类满足某种非线性 Fokker-Planck 方程的马氏过程的研究中所采用的扩散逼近方法受到 M. Crandall 和 R. Gardner 的好评，在高维 Burger 方程的研究中曾解决了著名学者 Ya. G. Sinai 提出的一个问题，在非平衡系统的 Master 方程的建立及稳定性、基本粒子的方程机制、辐射源交叉定位的精度分析几方面也有多项研究成果。1990年，王梓坤和李占柄培养的博士陈雄毕业留数学系任教。陈雄的研究工作主要集中在多参数马氏过程方向，在多参数 OU 过程和多参数 Poisson 型随机微分方程的研究中取得了很好的研究成果。陈雄1993年出国工作，此后若干年中仍继续有关方向的研究。

1988年，王梓坤由于在概率论、科学教育和研究方法论等方面的成就获澳大利亚麦克里(Macquarie)大学荣誉科学博士学位。1988年底至1989年初，美国国家科学院院士 E. B. Dynkin 应邀访华，在南开大学和北京师大做了 Dawson-Watanabe 超过程方面的系列讲座。此后，王梓坤和李占柄带领他们的研究组开始该方向的研究。DW 超过程是一种测度值马氏过程，描述的是大规模微观粒子群体的随机演化情况，在生物、物理等学科中有很强的应用背景。1990年，王梓坤给出了 DW 超过程 Laplace 泛函的幂级数展开。同年李增沪证明了分枝机制的积分表示，这个表示是超过程定义中几个基本的公式之一。Dynkin [Ann. Probab. 1993] 利用他的结果解释 DW 超过程模型的普适性：如果超过程是由某个分枝粒子系统取极限得到的，则其分枝机制一定具有特定的积分表示形式。

1991年11月，王梓坤当选中国科学院院士。同年，他发表了关于 DW 超过程的综述文章，向国内学术界系统地介绍了国际上在测度值马氏过程方面的研究进展情况。李增沪在1992年发表的论文中引入了一类带移民的测度值分枝过程，并研究了相应的粒子系统的收敛。他同年的另一篇论文利用非局部分枝 DW 超过程构造了一般的多物种模型。基于上述思想，李增沪后来与 D. A. Dawson 等合作系统研究了非局部分枝 DW 超过程的构造，并作为应用导出了多物种型、年龄结构型、质量结构型、随机控制型等超过程。对于上述模型的统一化处理和存在性的简洁证明被美国《数学评论》认为是他们构造的“真正好的特色(the really nice feature)”。1992年10月李增沪作为联合培养博士生赴日本东京工业大学留学。1993年，王梓坤利用多参数随机积分定义了一类多参数无穷维 OU 过程，并给出了其分布相互绝对连续的充要条件。1994年10月李增沪从日本回国后留在数学系作博士后，1996年10月开始任教于数学系。

1996年，北京师大出版社再版了王梓坤的《概率论基础及其应用》，并以《随机过程通论》为题重编再版了他的《随机过程论》、《生灭过程与马尔可夫链》和《布朗运动与位势》。1999年，王梓坤研究了多参数无穷维 OU 过程分布的绝对连续性和渐进行为，他的新著《马尔可夫过程与今日数学》由湖南科技出版社出版。1998年12月至1999年12月李增沪获日本学术振兴会(JSPS)研究基金资助作为客员研究员访问东京工业大学，其间还获日本文部省的追加研究经费，并于1999年3月应邀访问加拿大 Fields 数学所。

通常的 Dawson-Watanabe 超过程是封闭的微观粒子系统随机演化的数学模型。比这种模型更有理论和实际意义的是开放系统模型，或称为移民超过程。1995年，李增沪和 Shiga 研究了测度值分枝扩散过程的游戈(excursions)和相应的移民过程的构造。在同年的另一篇论文中，李增沪指出以 $\{Q(t): t \geq 0\}$ 为转移半群的 DW 超过程的伴随移民过程的分布概率族 $\{N(t): t \geq 0\}$ 满足斜卷积方程 $N(r+t) = [N(r)Q(t)] * N(t)$ ，其中 $r, t \geq 0$ 。他最早把该方程的解称为“斜卷积半群”。李增沪证明斜卷积半群

与无穷可分概率进入律之间的 1-1 对应关系，并在此后的论文中发展了相应的移民超过程理论。斜卷积半群作为开放系统的研究工具也适用于若干其它模型。例如，李增沪与 Dawson 等后来将斜卷积半群应用于广义 Mehler 半群的研究，给出了 Hilbert 空间值 OU 过程的完整刻画。李增沪和 Dawson 还将斜卷积半群工具应用于数理金融的研究，回答了 Duffie 等 [Ann. Appl. Probab. 2003] 提出的仿射马氏过程的正则性问题，并建立了该模型与随机介质移民分枝过程的联系。Bojdecki 和 Gorostiza [Math. Nachr. 2002] 写道：“李通过引入和使用斜卷积半群的概念发展了移民系统的一套理论 (a theory of immigration systems)”。Gorostiza 在德国《数学文摘》上称斜卷积半群“对移民分枝过程起着关键的作用 (play a key role in immigration branching processes)”。Dawson 和 Perkins [Math. Surv. Monogr. AMS 1999 / Lect. Notes Math. 2002] 两次收录了李增沪和 Shiga 关于测度值游戈的定理，用来研究 DW 超过程的“丛束 (cluster)”分解。Dawson 等 [Electron. J. Probab., 2004] 利用李增沪和 Shiga 给出的移民过程的理论框架深入研究了多层群体过程。作者们在论文中称“由进入律决定的移民过程的存在性最初是由李和 Shiga 建立的”，而他们的移民模型“可纳入李和 Shiga 研究的由边界进入的移民过程的框架 (the framework of immigration processes from the boundary)”。

1999 年，李增沪与 Shiga 等合作给出了 Fleming-Viot 超过程可逆性的充要条件，从而解决了美国艺术与科学学院院士 T. Kurtz 等人的猜想。FV 超过程是在基因遗传研究中出现的测度值马氏过程，其可逆性的充要条件曾是该领域长期的遗留问题。李增沪等的结果表明：具有可逆平稳分布的遗传系统的变异算子必然具有某种简单形式，有明确的遗传学含义。他们的结果引发了国内外学者对有关问题的后续研究。例如，Handa [Probab. Theory Related Fields 2002] 在紧性条件下给出了李增沪等的部分结果的另外一个证明，并推广到有重组的模型。Schmuland 和 Sun [Comptes Rendus Mathematical Reports, Royal Society of Canada 2002] 再次重新证明了上述的部分结果。这些作者们在论文中多次提到可逆性问题已被李增沪等解决，而充要条件被反复重证也说明了国际上对该问题的关注程度。

1999 年，洪文明和李增沪研究了随机环境下的移民超过程，他们发现和证明的波动极限性质被美国《数学评论》认为是“令人惊讶的”现象。2000 年，洪文明和王梓坤研究了广义介质分枝移民超过程的大数定律和中心极限定理。李增沪 2000 年 6 月至 2001 年 5 月访问加拿大 Fields 数学所和 Carleton 大学。2001 年，李增沪与 Dawson 等合作利用对偶方法构造了一类具有相依空间运动的超过程。后来在美国艺术与科学学院院士 T. Kurtz 指导的一篇博士论文中，作者十几次提到他们的模型。2001 年 6 月在复旦大学完成博士后研究工作的洪文明回到数学系任教，并于 2001 年 11 月至 2002 年 11 月访问加拿大 Carleton 大学，于 2005 年 7 月至 2006 年 6 月访问美国 Minnesota 大学。

2002 年，王梓坤荣获何梁何利科技进步奖。2002 年以来，洪文明在随机环境下移民超过程的大偏差和中偏差的研究方面取得了系统的结果。他还研究了若干相关模型的轨道水平的泛函中心极限定理。他的结果表明，上述极限定理导出的 Gauss 过程可能具有独立增量性，也可能具有长程相关性。这种现象引发了国内外同行的研究兴趣。如在洪文明结果的启发下，Bojdecki 和 Gorostiza 等研究了相应的粒子系统模型，并得到了类似的结果。2004 年，张梅获得博士学位后留校任教。张梅的研究工作涉及测度值过程的极限定理、大中偏差、自交局部时等课题，她研究结果已受到 Gorostiza 和 Navarro 等国外学者的引用。

2005 年李增沪获“国家杰出青年科学基金”资助，同年洪文明入选“新世纪优秀人才支持计划”。李增沪 2006 年 7 月在国际贝努利统计与概率学会主办的“随机过程及其应用”国际会议(第 31 届，法国巴黎)上作 1 小时大会邀请报告，2008 年被聘为“教育部长江学者特聘教授”。2008 年，何辉获得博士学位并留校，并于 2009 年 9 月至 2010 年 8 月访问法国 Orleans 大学做博士后研究，期间开始了他在随机树和树值马氏过程的研究工作。

2010 年以来，李增沪与合作者系统地研究了带跳随机微分方程及其在分枝过程研究中的应用。连续时空分枝过程是大规模复杂系统随机演化的模型，是概率论学科近年来的热点方向，也是连续随机树及相关研究的基础。李增沪等建立了此类过程的多个随机微分方程，为相关领域的研究提供了新工具和方法。这些成果引发了国内外学者的系列后续研究。著名学者 E. Pardoux 在专著(Springer, 2016)中指出上述随机方程方法是“Dawson 和 Li (2012)发明的(invented by)”，“聪明的方法(clever way)”，“美妙的方法(nice way)”，并将其中的一个方程命名为“Dawson-Li 随机微分方程(Dawson-Li stochastic differential equation)”。Döring 和 Barczy [Electr. J. Probab. 2012] 和 Fittipaldi 和 Fontbona [Electron. Comm. Probab. 2012] 分别称此类方程为该领域研究的“强有力工具(powerful tool, strong tool)”。

2011 年，李增沪的专著《Measure-Valued Branching Markov Processes》由 Springer 出版。瑞典学者 Kaj 在美国《数学评论》上评论道：“本书是第一部以教科书形式给出广泛的一类测度值过程一般理论的严格处理的专著。这是一部流畅、精炼和专注的书，将作为一个平台和参考文献极好地服务于超过程和测度值分枝过程在下一阶段的发展(Yet the present book appears to be the first monograph in textbook format that provides a rigorous treatment of general theory for a wide class of measure-valued processes... This is a well-written, concise and dedicated book. It will serve excellently as a platform and reference for the next phase of development of superprocesses and measure-valued branching processes)”。

四十多年来，北京师范大学概率论研究群体发展了无穷粒子系统、马尔可夫过程和随机分析等具有特色的研究方向，形成了严谨、勤奋、团结、互助的科学传统。他们同多个国外研究群体建立了科研合作关系，在国际同行中享有良好的学术声誉。2001年，概率论研究群体获得了国家自然科学基金创新研究群体基金，同年概率论与数理统计学科再次被评为国家级重点学科。马氏过程研究组目前的研究领域包括测度值过程、分枝过程、随机偏微分方程、随机环境模型、随机树和树值马氏过程、随机金融模型等。该研究组近年来的科研成果受到包括英国和加拿大皇家学会会员 D. A. Dawson、美国国家科学院院士 E. B. Dynkin、墨西哥国家科学院院士 L. G. Gorostiza、英国皇家学会会员 R. C. Griffiths、美国艺术与科学学院院士 T. G. Kurtz、加拿大皇家学会会员 E. A. Perkins 等在内的许多国际一流学者的引用。他们的毕业生现分布在中国科学院、北京大学、清华大学、复旦大学、南开大学、中国人民大学、中央财经大学、对外经济贸易大学、华东师范大学、中国工商银行等，也有不少到了国外发展，其中多人已成为教学与科研的骨干。马氏过程研究组目前的主要成员有王梓坤、李增沪、洪文明、张梅和何辉；研究生招生方向为“马尔可夫过程”和“随机过程统计”；研究内容为“物理、生物和金融中的随机模型”。

[摘自：《总结过去 面向未来——北京师范大学数学学科的发展与展望》，北京师范大学学报（自然科学版），2002年第38卷，百年校庆专刊，第1-28页；2016年7月更新]