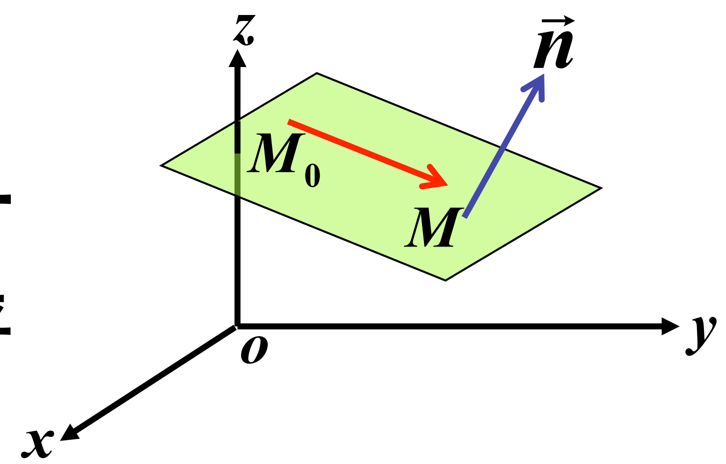
第八章 向量代数与空间解析几何

第三节：平面与直线方程 (1)

1 平面及其方程

平面的点法式方程：



如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的法线向量.

法线向量的特征： 垂直于平面内的任一向量.

已知 $\vec{n}=\{A,B,C\}$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$,

设平面上的任一点为 $M(x,y,z)$

必有 $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$

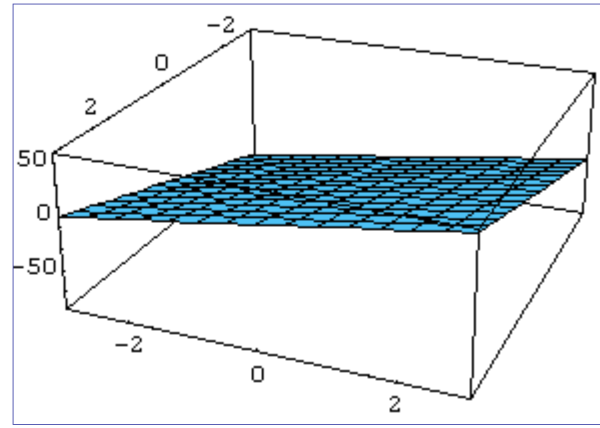
$\because \quad \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$

$$\therefore \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

其中法向量 $\vec{n} = \{A, B, C\}$, 已知点 (x_0, y_0, z_0).

平面上的点都满足以上方程，不在平面上的点都不满足以上方程，以上方程称为平面方程，该平面称为方程的图形.

例 1 求过点$A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$和$C(0,2,3)$的平面方程.



解 $\overrightarrow{AB} = \{-3, 4, -6\}$

$\overrightarrow{AC} = \{-2, 3, -1\}$

取 $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \{14, 9, -1\}$,

所求平面方程为 $14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0$,

化简得 $14x + 9y - z - 15 = 0$.

例２求过点$(1,1,1)$，且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

解　$\vec{n}_1=\{1,-1,1\}$，　$\vec{n}_2=\{3,2,-12\}$

取法向量　$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=5\{2,3,1\}$,

所求平面方程为

$$2(x-1)+3(y-1)+(z-1)=0,$$

化简得　$2x+3y+z-6=0.$

平面的一般方程：

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz\underbrace{\boxed{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}}_{=D}=0$$

$$Ax+By+Cz+D=0$$

法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$.

几种特殊情况:

(1) $D=0$, 平面通过坐标原点;

(2) $A=0$, $\begin{cases} D=0, & \text{平面通过}x\text{轴}; \\ D\neq 0, & \text{平面平行于}x\text{轴}; \end{cases}$

类似地可讨论 $B=0$, $C=0$ 情形.

(3) $A=B=0$, 平面平行于xoy 坐标面;

类似地可讨论 $A=C=0$, $B=C=0$ 情形.

例 3 设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

解 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0$,

由平面过原点知 $D=0$,

由平面过点$(6,-3,2)$知 $\boxed{6A-3B+2C=0}$

$\because \vec{n}\perp\{4,-1,2\}$, $\therefore \boxed{4A-B+2C=0}$

$$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C,$$

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0.$

例 4　设平面与x, y, z三轴分别交于$P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$（其中$a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$），求此平面方程.

解　设平面为$Ax + By + Cz + D = 0$,

将三点坐标代入得
$$\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

将 $A=-\dfrac{D}{a},\ B=-\dfrac{D}{b},\ C=-\dfrac{D}{c},$

代入所设方程得

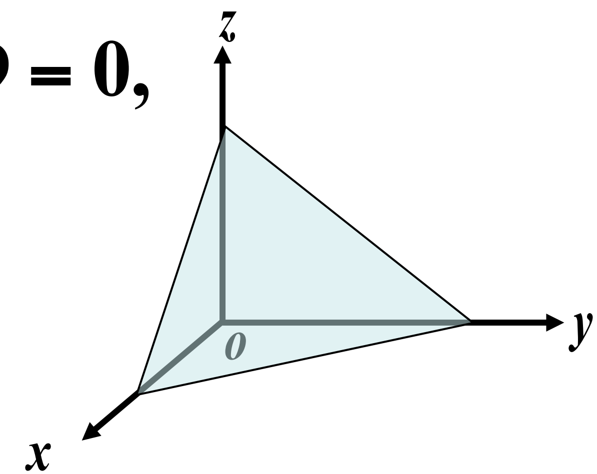
$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

平面的截距式方程.

x 轴上截距　y 轴上截距　z 轴上截距

例 5 求平行于平面 $6x + y + 6z + 5 = 0$ 而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解 设平面为 $6x + y + 6z + D = 0$,



即截距分别为

$$a = -\frac{D}{6}, b = -D, c = -\frac{D}{6},$$

$\because V = 1$, $\therefore \frac{1}{6}|abc| = 1$, $\therefore D = \pm 6.$

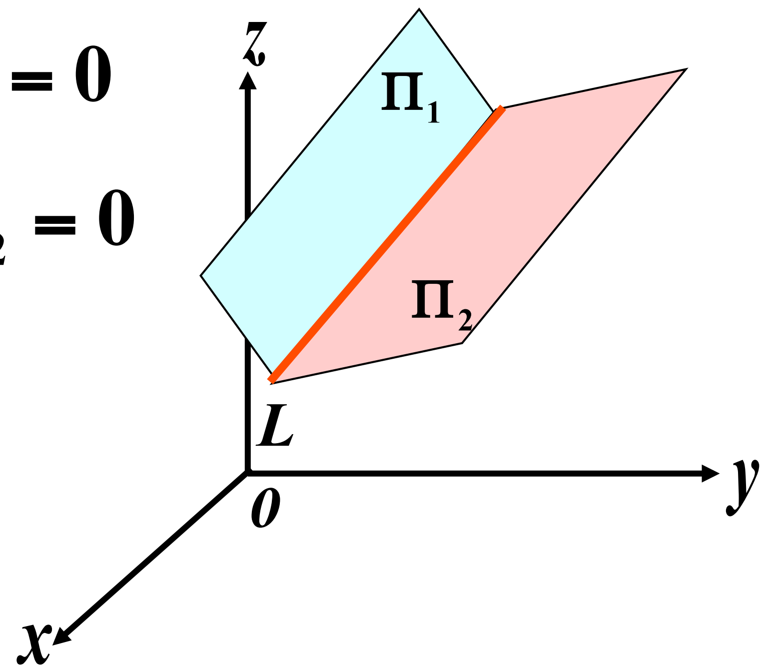
所求平面方程为 $6x + y + 6z = \pm 6.$

2 空间直线及其方程

空间直线的一般方程：

$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

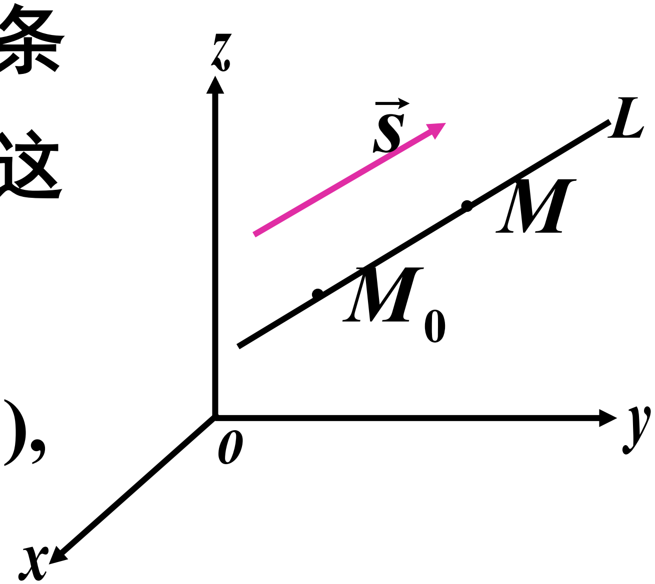


$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

空间直线可看成两平面的交线.

空间直线的对称式方程：

如果一非零向量平行于一条已知直线，这个向量称为这条直线的**方向向量**.



$M_0(x_0, y_0, z_0)$,　　$M(x, y, z)$,

$\forall\, M \in L$,　　$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$

$\vec{s} = \{m, n, p\}$,　　$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

令 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

直线的一组**方向数**

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

方向向量的余弦称为直线的**方向余弦.**

空间直线的参数方程。

例6 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}.$$

解 在直线上任取一点 (x_0, y_0, z_0)

取 $x_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y_0+z_0+2=0 \\ y_0-3z_0-6=0 \end{cases},$

解得 $y_0 = 0, \quad z_0 = -2$

点坐标$(1,0,-2)$,

因所求直线与两平面的法向量都垂直

取 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \{4, -1, -3\}$,

对称式方程 $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-0}{-1} = \dfrac{z+2}{-3}$,

参数方程: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$.

例 7 一直线过点$A(2,-3,4)$，且和y轴垂直相交，求其方程.

解 因为直线和y轴垂直相交，

所以交点为 $B(0,-3,0)$，

取 $\vec{s}=\overrightarrow{BA}=\{2,0,4\}=2\{1,0,2\}$，

所求直线方程 $$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-4}{2}.$$

即 $$\begin{cases}2x-z=0\\ y+3=0\end{cases}.$$

思考题

在直线方程$\dfrac{x-4}{2m}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z-2}{6+p}$中，$m$、$n$、$p$各怎样取值时，直线与坐标面$xoy$、$yoz$都平行.

解 $\vec{s}=\{2m,n,6+p\}$, 且有 $\vec{s}\neq\vec{0}.$

$\because \vec{s}\cdot\vec{k}=0,\qquad \vec{s}\cdot\vec{i}=0,$

$$\Rightarrow\begin{cases}6+p=0\\2m=0\end{cases}\qquad\therefore p=-6,\quad m=0,$$

$\because \vec{s}=\{0,n,0\}\neq\vec{0},\qquad\therefore n\neq 0,$

故当 $m=0,\ n\neq 0,\ p=-6$
时结论成立.

小结与思考题

平面方程：

- 点法式方程，
- 一般方程，
- 截距式方程.

（熟记平面的几种特殊位置的方程）

直线方程：

- 点向式方程，
- 一般方程，
- 参数式方程.

课堂练习题

一、 填空题：

1. 平面 $Ax+By+Cz=0$ 必通过________，（其中 A，B，C，不全为零）；

2. 平面 $By+Cz+D=0$ __________ x轴；

3. 平面 $By+Cz=0$ ________ x轴；

4. 通过点 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程为 __________；

5. 过三点 $(3,0,0),(0,-5,0),(0,0,2)$ 的平面方程__________；

6. 通过点$(0,-1,2)$且平行于直线$x-2=y=2(z-1)$的直线方程为__________

二、 求与已知平面$2x+y+2z+5=0$平行且与三坐标面所构成的四面体体积为 9 的平面方程 .

三、用对称式方程及参数方程表示直线L：

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}.$$

课堂练习题答案

一、1. (0, 0, 0)；　2. 平行于；　3. 通过；

4. $3x-7y+5z-4=0$；　5. $\frac{x}{3}-\frac{y}{5}+\frac{z}{2}=1$；

6. $x=y+1=2(z-2)$

二、$2x+y+2z=\pm 6$.

三、$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}$, $\begin{cases} x=1-2t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}$.