第七章 常微分方程

复习

一、主要内容

基本概念

一阶方程

类 型

1.直接积分法
2.可分离变量
3.齐次方程
4.可化为齐次方程
5.全微分方程
6.线性方程

7.伯努利方程

二阶常系数线性方程解的结构

特征方程法

特征方程的根及其对应项

待定系数法

f(x)的形式及其特解形式

高阶方程

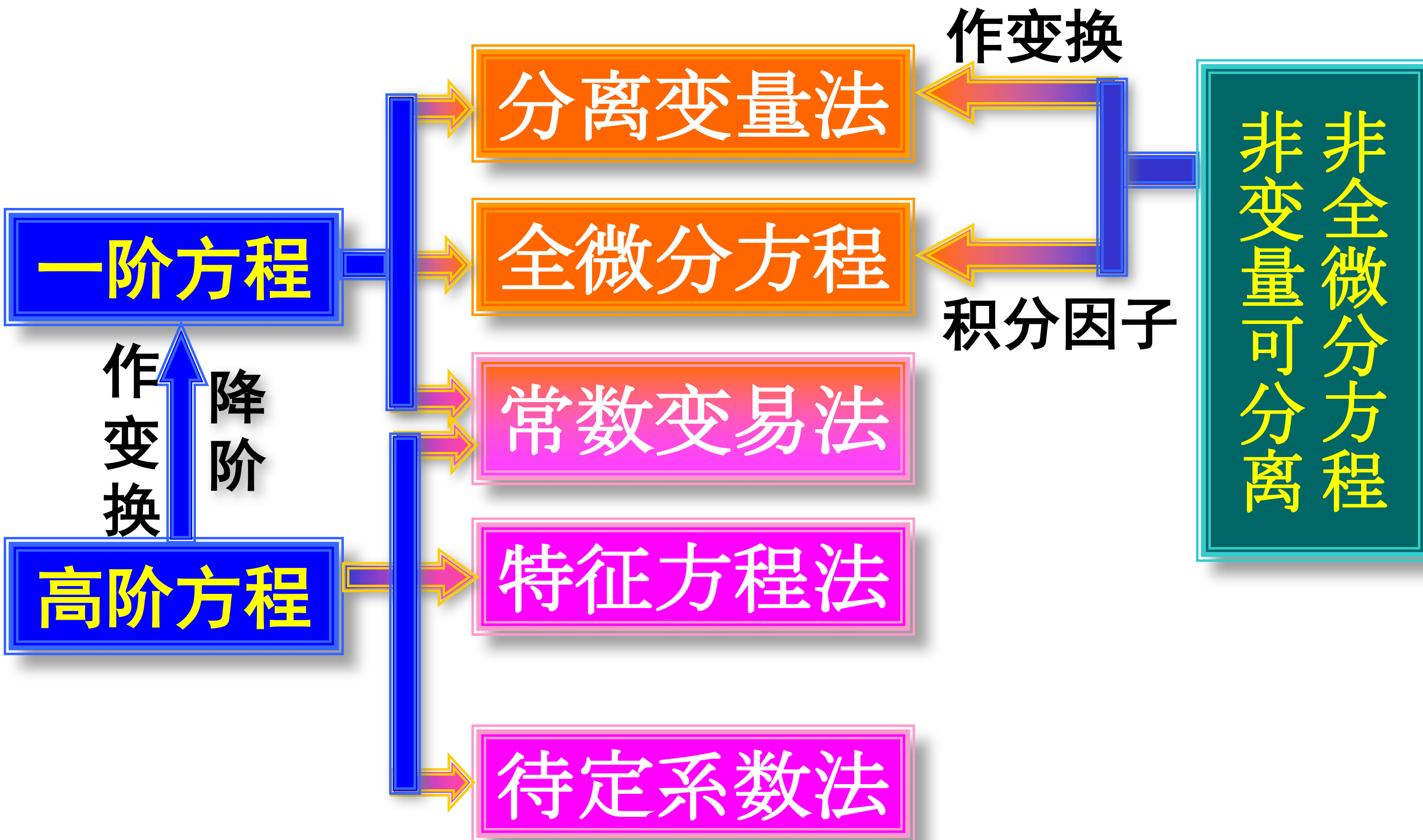
可降阶方程

线性方程解的结构

定理1；定理2
定理3；定理4

欧拉方程

微分方程解题思路



作变换
分离变量法
全微分方程
积分因子
非全微分方程
非变量可分离
一阶方程
作变换
降阶
高阶方程
常数变易法
特征方程法
待定系数法

1、基本概念

微分方程　凡含有未知函数的导数或微分的方程叫微分方程.

微分方程的阶　微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.

微分方程的解　代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称为微分方程的解.

通解　**如果**微分方程的解中含有任意常数，并且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解.

特解　确定了通解中的任意常数以后得到的解，叫做微分方程的特解.

初始条件　用来确定任意常数的条件.

初值问题　求微分方程满足初始条件的解的问题，叫初值问题.

2、一阶微分方程的解法

(1) 可分离变量的微分方程

形如 $g(y)dy = f(x)dx$

解法 $\int g(y)dy = \int f(x)dx$ 分离变量法

(2) 齐次方程　形如 $\dfrac{dy}{dx} = f(\dfrac{y}{x})$

解法　作变量代换 $u = \dfrac{y}{x}$

(3) 可化为齐次的方程

形如 $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$

当 $c = c_1 = 0$时，齐次方程．否则为非齐次方程．

解法 令 $x = X + h,$

$y = Y + k,$ 化为齐次方程.

（其中h和k是待定的常数）

(4) 一阶线性微分方程

形如 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

当$Q(x)\equiv 0$, 上方程称为齐次的.

当$Q(x)\not\equiv 0$, 上方程称为非齐次的.

解法 齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$.

（使用分离变量法）

非齐次微分方程的通解为

$$y=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]e^{-\int P(x)dx}$$

（常数变易法）

(5) 伯努利(Bernoulli)方程

形如 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n}\quad(n\neq 0,1)$

当$n=0,1$时， 方程为线性微分方程.

当$n\neq 0,1$时， 方程为非线性微分方程.

解法 需经过变量代换化为线性微分方程.

令 $z = y^{1-n}$,

$$y^{1-n} = z$$

$$= e^{-\int (1-n)P(x)dx}\left(\int Q(x)(1-n)e^{\int (1-n)P(x)dx}dx + c\right).$$

3、可降阶的高阶微分方程的解法

(1) $y^{(n)} = f(x)$ 型

解法 接连积分n次，得通解.

(2) $y'' = f(x, y')$ 型

特点 不显含未知函数 y.

解法 令 $y' = P(x)$, $y'' = P'$,

代入原方程, 得 $P' = f(x, P(x))$.

(3)　$y'' = f(y, y')$ 型

特点　　不显含自变量x.

解法　　令 $y' = P(x)$, $\quad y'' = P\dfrac{dp}{dy}$,

代入原方程, 得 $P\dfrac{dp}{dy} = f(y, P)$.

4、线性微分方程解的结构

（1）　二阶齐次方程解的结构:

形如　$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$　　　**(1)**

定理 1 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1)的两个解, 那末 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 也是(1)的解. (C_1, C_2 是常数)

定理 2：如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1)的两个线性无关的特解, 那么 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 就是方程(1)的通解.

（2）二阶非齐次线性方程的解的结构:

形如 $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (2)$$

定理 3　设y^*是(2)的一个特解，Y是与(2)对应的齐次方程(1)的通解，那么$y = Y + y^*$是二阶非齐次线性微分方程(2)的通解.

定理 4　设非齐次方程(2)的右端$f(x)$是几个函数之和，如$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$

而y_1^*与y_2^*分别是方程,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，那么$y_1^* + y_2^*$就是原方程的特解.

5、二阶常系数齐次线性方程解法

形如 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x)$

n阶常系数线性微分方程

$y''+py'+qy=0$　　二阶常系数齐次线性方程

$y''+py'+qy=f(x)$ 二阶常系数非齐次线性方程

解法　由常系数齐次线性方程的特征方程的根确定其通解的方法称为特征方程法.

$$y'' + py' + qy = 0$$

特征方程为 $r^2 + pr + q = 0$

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

推广：n阶常系数齐次线性方程解法

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

特征方程为 $r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0$

特征方程的根	通解中的对应项
若是k重根r	$(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1} x^{k-1}) e^{rx}$
若是k重共轭复根$\alpha \pm j\beta$	$[(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1} x^{k-1}) \cos\beta x$ $+ (D_0 + D_1 x + \cdots + D_{k-1} x^{k-1}) \sin\beta x] e^{\alpha x}$

6、二阶常系数非齐次线性微分方程解法

$y'' + py' + qy = f(x)$　二阶常系数非齐次线性方程

解法　待定系数法.

(1)　$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

设 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$，$k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根} \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$，

$$(2)\quad f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$$ 型

设 $y^*=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$,

其中 $R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$是$m$次多项式,

$$m=\max\{l,n\}$$

$$k=\begin{cases}0 & \lambda\pm j\omega\text{不是特征方程的根时;}\\ 1 & \lambda\pm j\omega\text{是特征方程的单根时.}\end{cases}$$

7、欧拉方程

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

的方程(其中 $p_1, p_2 \cdots p_n$ 为常数)，叫欧拉方程.

欧拉方程是特殊的变系数方程，通过变量代换

$x = e^t$ 或 $t = \ln x$　可化为常系数微分方程.

二、典型例题

例1 求通解

$$y\left(x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x=x\left(y\sin\frac{y}{x}-x\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y.$$

解 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\left(\frac{\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{y}{x}}\right),$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$, $y=ux$, $y'=u+xu'$. 代入原方程得

$$u+xu'=u\left(\frac{\cos u+u\sin u}{u\sin u-\cos u}\right),$$ 分离变量

$$\frac{u\sin u-\cos u}{2u\cos u}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$ 两边积分

$$\ln(u\cos u)=\ln x^{-2}+\ln C,\quad \therefore u\cos u=\frac{C}{x^2},$$

$$\therefore \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}=\frac{C}{x^2},$$ 所求通解为 $xy\cos\dfrac{y}{x}=C$.

例2 求通解 $xy' + 2y = 3x^3 y^{\frac{4}{3}}.$

解 原式可化为 $y' + \frac{2}{x} y = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}$, 伯努利方程

即 $y^{-\frac{4}{3}} y' + \frac{2}{x} y^{-\frac{1}{3}} = 3x^2,$

令 $z = y^{-\frac{1}{3}},$ 原式变为 $-3z' + \frac{2}{x} z = 3x^2,$

即 $z' - \frac{2}{3x} z = -x^2,$ 一阶线性非齐方程

对应齐方通解为 $z = Cx^{\frac{2}{3}},$

利用常数变易法

设 $z=C(x)x^{\frac{2}{3}}$，　代入非齐方程得

$C'(x)x^{\frac{2}{3}}=-x^2$，　$\therefore C(x)=-\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C.$

原方程的通解为

$$y^{-\frac{1}{3}}=-\frac{3}{7}x^3+Cx^{\frac{2}{3}},\ y=\left(Cx^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{7}x^3\right)^{-3}.$$

例3 求通解 $y'' = \dfrac{1+y'^2}{2y}$.

解 方程不显含 x. 令 $y' = p(y)$, $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,

代入方程，得 $$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{1+p^2}{2y},$$

解得, $1+p^2 = C_1 y, (C_1 > 0)$, $\therefore$ $p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$,

即 $y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$, 故方程的通解为:

$$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + 2C_2',$$ 或 $$y = C_1^{-1} + C_1(\frac{1}{2}x + C_2)^2.$$

例4 求解 $y'' - 2y' + y = xe^x - e^x, y(1) = y'(1) = 1.$

解 特征方程 $r^2 - 2r + 1 = 0$, 特征根 $r_1 = r_2 = 1$,

对应的齐次方程的通解为: $Y = (C_1 + C_2 x)e^x.$

设原方程的特解为:

$$y^* = e^x \iint (x-1)dxdx = \frac{1}{6}(x-3)x^2 e^x.$$

故原方程的通解为: $y = \frac{1}{6}(C_1 + C_2 x - 3x^2 + x^3)e^x.$

$\because y(1) = 1, \qquad \therefore C_1 + C_2 = 2 + \frac{6}{e},$

$$y' = \frac{1}{6}[C_1 + C_2 + (C_2 - 6)x + x^3]e^x,$$

$$\because\ y'(1) = 1, \qquad \therefore (C_1 + 2C_2 - \frac{5}{6})e = 1,$$

$$C_1 + 2C_2 = 5 + \frac{6}{e}.$$ 求解得:

$$C_1 = \frac{6}{e} - 1, \quad C_2 = 3.$$

所以, 原方程满足初始条件的特解为

$$y = \frac{1}{6}[6e^{-1} - 1 + 3x - 3x^2 + x^3]e^x.$$

例5 求解方程 $y'' + 4y = \frac{1}{2}(x + \cos 2x)$.

解 特征方程 $r^2 + 4 = 0$,

特征根 $r_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}$,

齐次方程通解: $Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

原方程的特解:

$$y^* = \sin 2x \int \frac{\int \frac{1}{2}(x + \cos 2x)\sin 2x \mathrm{d}x}{\sin^2 2x} \mathrm{d}x.$$

$$\int \frac{1}{2}(x+\cos 2x)\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x$$

$$= \frac{1}{8}\sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{16},$$

$$y^* = \frac{1}{16}\sin 2x \int (2+\frac{2\sin 2x - 4x\cos 2x - 1}{\sin^2 2x})\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{16}\sin 2x(2x + \frac{2x}{\sin 2x} - \frac{1}{2}\cot 2x)$$

$$= \frac{1}{8}x\sin 2x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\cos 2x.$$

故原方程的通解为

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}x\sin 2x.$$

例6　设 $y'' + p(x)y' = f(x)$ 有一特解为 $\dfrac{1}{x}$，对应的齐次方程有一特解为 x^2，试求：

（1） $p(x), f(x)$ 的表达式；

（2） 此方程的通解.

解　（1）　由题设可得：

$$\begin{cases} 2 + 2xp(x) = 0, \\ \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}p(x) = f(x), \end{cases}$$

解此方程组，得

$$p(x)=-\frac{1}{x}, \quad f(x)=\frac{3}{x^3}.$$

（2） 原方程为 $y''-\frac{1}{x}y'=\frac{3}{x^3}.$

显见 $y_1=1, y_2=x^2$ 是原方程对应的齐次方 程的两个线性无关的特解,

又 $y^*=\frac{1}{x}$ 是原方程的一个特解,

由结构定理得方程的通解为

$$y=C_1+C_2x^2+\frac{1}{x}.$$

测 验 题

一、 选择题:

1、一阶线性微分方程$y'=P(x)y+Q(x)$的通解是(　　).

(A)　$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$;

(B)　$y=e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$;

(C)　$y=e^{\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+C]$;

(D)　$y=Ce^{-\int P(x)dx}$.

2、方程$xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y$是(　　) 方程.

(A)齐次;(B)一阶线性;(C)伯努利;(D)可分离变量.

3、$\frac{dy}{x^2}+\frac{dx}{y^2}=0, y(1)=2$ 的特解是（　　）.

（A）$x^3+y^3=2$；　（B）$x^3+y^3=9$；

（C）$x^3+y^3=1$；　（D）$x^3+y^3=3$.

4、方程$y'''=\sin x$的通解是（　　）.

（A）$y=\cos x+C_1x^2+C_2x+C_3$；

（B）$y=\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$；

（C）$y=\cos x+C_1$；　（D）$y=2\sin 2x$.

5、方程$y'''+y'=0$的通解是（　　）.

（A）$y=\sin x-\cos x+C_1$；　（C）$y=\sin x+\cos x+C_1$；

（C）$y=C_1\sin x-C_2\cos x+C_3$；　（D）$y=\sin x-C_1$.

6、若y_1和y_2是二阶齐次线性方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$的两个特解, 则$y=C_1y_1+C_2y_2$是该方程的（　　）.

(A) 通解；(B) 解；(C) 特解；(D) 非解.

7、求方程$yy'-(y')^2=0$的通解时, 可令(　　).

(A) $y'=p, y''=p'$；　　(B) $y'=p, y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$；

(C) $y'=p, y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$；　　(D) $y'=p, y''=p'\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$.

8、已知方程$x^2y''+xy'-y=0$的一个特解为$y=x$, 于是方程的通解为(　　).

(A) $y=C_1x+C_2x^2$；　　(B) $y=C_1x+C_2\dfrac{1}{x}$；

(C) $y=C_1x+C_2e^x$；　　(D) $y=C_1x+C_2e^{-x}$.

9、已知方程$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$的一个特解为y_1，则另一个与它线性无关的特解为（　　）.

(A) $y_2=y_1\int y_1^{-2}e^{-\int P(x)dx}dx$；(B) $y_2=y_1\int y_1^{-2}e^{\int P(x)dx}dx$；

(C) $y_2=y_1\int y_1^{-1}e^{-\int P(x)dx}dx$；(D) $y_2=y_1\int y_1^{-1}e^{\int P(x)dx}dx$.

10、方程$y''-3y'+2y=e^x\cos 2x$的一个特解形式是（　　）.

(A) $y=A_1e^x\cos 2x$；

(B) $y=A_1xe^x\cos 2x+B_1xe^x\sin 2x$；

(C) $y=A_1e^x\cos 2x+B_1e^x\sin 2x$；

(D) $y=A_1x^2e^x\cos 2x+B_1x^2e^x\sin 2x$.

二、 求下列一阶微分方程的通解：

1、$xy'\ln x + y = ax(\ln x + 1)$；　　2、$\dfrac{dy}{dx} + xy - x^3y^3 = 0$；

3、$xdx + ydy + \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$.

三、 求下列高阶微分方程的通解：

1、$yy'' - y'^2 - 1 = 0$；　　2、$y''' + y'' - 2y' = x(e^x + 4)$.

四、 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

1、$y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$, $x = 1$时，$y = 1$；

2、$y'' + 2y' + y = \cos x$, $x = 0$时，$y = 0$, $y' = \dfrac{3}{2}$.

五、已知某曲线经过点$(1,1)$, 它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标, 求它的方程 .

六、 设可导函数$\varphi(x)$满足

$$\varphi(x)\cos x+2\int_0^x \varphi(t)\sin t\,\mathrm{d}t=x+1，\text{求 } \varphi(x).$$

七、 我舰向正东 1 海里处的敌舰发射制导鱼雷, 鱼雷在航行中始终对准敌舰. 设敌舰以常数 v_0 沿正北方向直线行驶, 已知鱼雷速度是敌舰速度的两倍, 求鱼雷的航行曲线方程, 并问敌舰航行多远时, 将被鱼雷击中?

测验题答案

一、1、C；　2、A；　3、B；　4、A；　5、C；

6、B；　7、B；　8、B；　9、A；　10、C.

二、1、$y = ax + \dfrac{c}{\ln x}$；

2、$y^{-2} = C_1 e^{x^2} + x^2 + 1$；

3、$x^2 + y^2 - 2\arctan\dfrac{y}{x} = C$.

三、1、$y = \dfrac{1}{C_1}\cosh(C_1 x + C_2)$；

2、$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x} + (\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{4}{9}x)e^x - x^2 - x$.

四、1、$x(1+2\ln y)-y^2=0$；

2、$y=xe^{-x}+\frac{1}{2}\sin x$.

五、$y=x-x\ln x$.

六、$\varphi(x)=\cos x+\sin x$.

七、$y=-(1-x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3} \quad (0\le x\le 1)$.