第七章 常微分方程

第五讲：高阶常微分方程

1 可降阶的高阶微方

1、形如 $y^{(n)}=f(x)$ 的微分方程

解法：连续积分 n 次即可

$$y^{(n-1)}=\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$y^{(n-2)}=\int\int f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$y=\underbrace{\int\int\ldots\int\int}_{n} f(x)\underbrace{\mathrm{d}x\mathrm{d}x\cdots\mathrm{d}x\mathrm{d}x}_{n}$$

2、形如 $y^{(n)}=f(x,y^{(k)},\cdots,y^{(n-1)})$ 的微分方程

特点： 不显含未知函数 y 及 $y',\cdots,y^{(k-1)}$.

解法： 令 $y^{(k)}=p(x)$,

则 $y^{(k+1)}=p'$, $y^{(n)}=p^{(n-k)}$.

代入原方程, 得

$p(x)$的$(n\text{-}k)$阶方程

$$p^{(n-k)}=f\left(x,p(x),\cdots,p^{(n-k-1)}(x)\right).$$

求得 $p(x)$, 将 $y^{(k)}=p(x)$ 连续积分k次即可.

例 1 求方程 $xy^{(5)}-y^{(4)}=0$ 的通解.

解 设 $y^{(4)}=p(x), \qquad y^{(5)}=p'(x)$

代入原方程 $xp'-p=0, \quad (p\neq 0)$

解线性方程, 得 $p=C_1x$ 即 $y^{(4)}=C_1x,$

两端积分,得 $y'''=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2, \cdots \cdots,$

$$y=\frac{C_1}{120}x^5+\frac{C_2}{6}x^3+\frac{C_3}{2}x^2+C_4x+C_5\ ,$$

原方程通解 $y=D_1x^5+D_2x^3+D_3x^2+D_4x+D_5.$

3、形如 $y^{(n)}=f(y,y^{(k)},\cdots,y^{(n-1)})$ 的微分方程

特点: 右端不显含自变量 x.

解法: 令 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(y)$, $\quad y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=pp'$,

$$y'''=pp'^2+p^2p'',\ \cdots\quad\cdots\quad,\ y^{(n)}=\Phi(p,p',\cdots,p^{(n-1)}).$$

代入原方程得新函数 $p(y)$的 $(n-1)$阶方程,

求得其解为 $\quad y'=p(y)=\varphi(y,\ C_1,\ \cdots,\ C_{n-1}).$

再积分即可.

例 2 求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 设 $y' = p(y)$, $\quad y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,

代入，得 $y \cdot p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$, 即 $p\left(y \cdot \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p\right) = 0$,

由 $y \cdot \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p = 0$, 可得 $p = C_1 y$, $\therefore \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 y$,

原方程通解为 $\quad y = C_2 \mathrm{e}^{C_1 x}$.

(注: $p = 0$,即 $y' = 0$ 的解 $y = C$ 含于其中).

4、齐次方程： $F\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0$

n 阶 k 次齐次函数

特点： $F\left(x,ty,ty',\cdots,ty^{(n)}\right)=t^k F\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)$

解法： 可通过变换 $y=\mathrm{e}^{\int z\mathrm{d}x}$ 将其降阶，得新未知函数 $z(x)$.

$$\because\ y'=z\mathrm{e}^{\int z\mathrm{d}x},\ y''=(z'+z^2)\mathrm{e}^{\int z\mathrm{d}x},$$

$\cdots\cdots,$

$$y^{(n)}=\Phi(z,z',\cdots,z^{(n-1)})\mathrm{e}^{\int z\mathrm{d}x},$$

代入原方程并消去 $y=\mathrm{e}^{\int z\mathrm{d}x}$，得新函数 $z(x)$

的 $n-1$ 阶方程：

$$f\left(x,z,z',\cdots,z^{(n-1)}\right)=0.$$

例3 求方程 $x^2yy''=(y-xy')^2$ 的通解.

解 设 $y=e^{\int z\mathrm{d}x}$，代入原方程,得 $z'+\dfrac{2}{x}z=\dfrac{1}{x^2}$,

解其通解为 $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{C_1}{x^2}$,

原方程通解为

$$y=e^{\int\left(\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2}\right)\mathrm{d}x}=C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}.$$

2　高阶线性微分方程

一般 n 阶线性齐次微分方程标准形

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_n(x)y=0; \qquad （1）$$

一般 n 阶线性非齐次微分方程标准形

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_n(x)y=f(x). \qquad （2）$$

一般 n 阶常系数线性齐次微分方程标准形

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0; \qquad （3）$$

一般 n 阶常系数线性非齐次微分方程标准形

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x).\quad(4)$$

特征方程为：

$$r^n+p_1r^{n-1}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0.\quad(5)$$

特征根	通解中的对应项
若是k重根r	$(C_0+C_1x+\cdots+C_{k-1}x^{k-1})\mathrm{e}^{rx}$
若是 k 重共轭复根 $\alpha\pm\mathrm{i}\beta$	$[(C_0+C_1x+\cdots+C_{k-1}x^{k-1})\cos\beta x$ $+(D_0+D_1x+\cdots+D_{k-1}x^{k-1})\sin\beta x]\mathrm{e}^{\alpha x}$

注意:

代数学基本定理： 在复数域中，n 次代数方程有 n个根,且复数根成对出现。

特征方程的每一个根都对应着齐次方程通解中的一项, 且每一项各有一个任意常数.

定理 1 如果 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 阶齐次方程(1)的 n 个线性无关的特解，那么

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

就是方程(1)的通解.

定理 2 设 y^* 是 n 阶非齐次线性方程（2）的一个特解，Y 是与方程(2)对应的齐次方程(1)的通解，那么 $y = Y + y^*$ 是 n 阶非齐次线性微分方程(2)的通解.

定理 3 设非齐次方程(2)的右端 $f(x)$ 是几个函数之和，比如 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，而 y_1^* 与 y_2^* 分别是方程

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_n(x)y=f_1(x)$$

和

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_n(x)y=f_2(x)$$

的特解，那么 $y_1^*+y_2^*$ 就是原方程的特解.

解的叠加原理

例4 求微分方程

$$y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''+y'+y=0$$ 的通解.

解 特征方程为 $r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0,$

$$(r+1)(r^2+1)^2=0,$$

特征根为 $r_1=-1,\ \ r_2=r_3=\mathrm{i},\ \ r_4=r_5=-\mathrm{i},$

故所求通解为：

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x.$$

例5 求微分方程

$$y^{(4)}+2y'''-3y''-4y'+4y=0$$

的通解.

解 **特征方程：** $r^4+2r^3-3r^2-4r+4=0,$

特征根： $r_1=r_2=1,\quad r_3=r_4=-2.$

因此，齐次方程的通解为：

$$y=(C_1+C_2x)\ e^x+(C_3+C_4x)e^{-2x}.$$

例6 求微分方程 $y''' - 3y' - 2y = -8x^3$ 的通解.

解 **特征方程：** $r^3 - 3r - 2 = (r+1)^2(r-2) = 0,$

特征根： $r_1 = r_2 = -1,\quad r_3 = 2.$

因此，对应的齐次方程的通解为：

$$Y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + C_3 e^{2x}.$$

选择齐次方程的一个特解： $y_1 = e^{-x}$，**待定原方程的特解：**

$$y^* = ue^{-x}.$$

求其各阶导数，代入原方程并整理得：

$$u''' - 3u'' = -8x^3\mathrm{e}^x.$$

作变换：$u'' = p = p(x)$，则方程变为：

$$p' - 3p = -8x^3\mathrm{e}^x.$$

这是一个一阶线性非齐次微分方程，依公式

$$u'' = p = -8\mathrm{e}^{\int 3\mathrm{d}x}\int x^3\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\int 3\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$= -8\mathrm{e}^{3x}\int x^3\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$$

$$= (4x^3 + 6x^2 + 6x + 3)\mathrm{e}^x.$$

即 $$u'' = (4x^3 + 6x^2 + 6x + 3)\mathrm{e}^x.$$

积分得： $$u' = (4x^3 - 6x^2 + 18x - 15)\mathrm{e}^x;$$

再积分得： $$u = (4x^3 - 18x^2 + 54x - 69)\mathrm{e}^x.$$

因此， $$y^* = 4x^3 - 18x^2 + 54x - 69.$$

于是，原方程的通解为：

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x} + C_3\mathrm{e}^{2x} + 4x^3 - 18x^2 + 54x - 69.$$

3 欧拉方程

形如:

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

的方程(其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为常数) 叫欧拉方程.

特点: 各项未知函数导数的阶数与乘积因子自变量的幂次数相同.

解法: 欧拉方程是特殊的变系数方程，通过变量代换可化为常系数微分方程.

作变量变换 $x=\mathrm{e}^t$ 或 $t=\ln x$,

将自变量换为 t,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),\quad \cdots\cdots,$$

用 D 表示对自变量 t 求导的运算 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，

上述结果可以写为

$$xy' = Dy,$$

$$x^2y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (D^2 - D)y = D(D-1)y,$$

$$x^3y''' = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$= (D^3 - 3D^2 + 2D)y = D(D-1)(D-2)y,$$

$\cdots\cdots,$

一般地，

$$x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y.$$

将上式代入欧拉方程，则化为以 t为自变量的常系数线性微分方程. 求出这个方程的解后，把 t 换为 $\ln x$，即得到原方程的解.

例8 求欧拉方程

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 4xy' = 3x^2$$ 的通解.

解 作变量变换 $x = \mathrm{e}^t$ 或 $t = \ln x$,

原方程化为

$$D(D-1)(D-2)y+D(D-1)y-4Dy=3\mathrm{e}^{2t},$$

即 $$D^3y-2D^2y-3Dy=3\mathrm{e}^{2t},$$

或 $$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3\mathrm{e}^{2t}.$$

此方程所对应的齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0,$$

其特征方程 $r^3-2r^2-3r=0,$

特征方程的根为 $r_1=0, r_2=-1, r_3=3.$

所以齐次方程的通解为

$$Y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\mathrm{e}^{3t}=C_1+\frac{C_2}{x}+C_3x^3.$$

设特解为 $y^*=b\mathrm{e}^{2t}=bx^2,$

代入原方程，得 $b=-\dfrac{1}{2}.$ 即 $y^*=-\dfrac{x^2}{2},$

所给欧拉方程的通解为

$$y=C_1+\frac{C_2}{x}+C_3x^3-\frac{1}{2}x^2.$$

4　小结与思考题

欧拉方程解法思路

变系数的线性微分方程 $\xrightarrow[x=e^t \text{ 或 } t=\ln x]{\text{变量代换}}$ 常系数的线性微分方程

注意： 欧拉方程的形式.

课堂练习题

求下列欧拉方程的通解：

1. $x^2y''+xy'-y=0$;

2. $x^2y''-2xy'+2y=\ln^2 x-2\ln x$;

3. $x^2y''-3xy'+4y=x+x^2\ln x$.

课堂练习题答案

1. $y=C_1+\frac{C_2}{x}$.　2. $y=C_1x+C_2x^2+\frac{1}{2}(\ln^2 x+\ln x)+\frac{1}{4}$.

3. $y=C_1x^2+C_2x^2\ln x+x+\frac{1}{6}x^2\ln^3 x$.