

第七章 常微分方程

第三讲： 特殊二阶常微分方程的 解法

1 可降阶的微分方程

1、形如 $y'' = f(x)$ 的二阶微分方程

例 1 求解自由落体运动微分方程

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g, \quad s|_{t=0} = s_0, \quad s'|_{t=0} = v_0,$$

其中 g 为重力加速度.

解 对原方程作一次不定积分, 得

$$\frac{ds}{dt} = \int g dt = gt + C_1,$$

当 $t = 0$ 时, $s' |_{t=0} = v_0$ 得 $C_1 = v_0$, 即

$$\frac{ds}{dt} = \int g dt = gt + v_0.$$

再对上式作不定积分, 得

$$s = \int (gt + v_0) dt = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + C_2$$

当 $t = 0$ 时, $s |_{t=0} = s_0$ 得 $C_2 = s_0$.

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

为所求特解.

2、形如 $y'' = f(y)$ 的二阶微分方程

因
$$2y''dy = 2 \frac{dy'}{dx} dy = 2y' dy' = d(y'^2)$$

即
$$d(y'^2) = 2f(y)dy$$

故
$$y'^2 = 2 \int f(y)dy + C_1.$$

注：相当于代换 $y' = p = p(y)$.

分离变量并积分, 得 $dy = \sqrt{2\int f(y)dy + C_1} dx,$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}} = \pm x + C_2.$$

例 2 求单摆运动微分方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

的通解.

解 $f(\theta) = -\frac{g}{l} \sin \theta$ 代入上面的公式, 得

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{C_1 - 2\frac{g}{l} \int \sin\theta d\theta}} = \pm t + C_2,$$

积分得

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{C_1 + 2\frac{g}{l} \cos\theta}} = \pm t + C_2$$

注：等价于椭圆积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A + \cos^2 x}} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} t + B$$

为所求通解.

注：通常取 $\sin\theta \approx \theta$, 且 $\theta|_{t=0} = 0, \theta'|_{t=0} = a\sqrt{\frac{g}{l}}$,

通解： $\theta = C_1 \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2)$ 特解： $\theta = a \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t$.

3、形如 $y'' = f(y')$ 的二阶微分方程

令 $y' = p = p(x)$, 则方程变为 $\frac{dp}{dx} = f(p)$

当 $f(p) \neq 0$ 时, 积分得 $\int \frac{dp}{f(p)} = x + C_1$.

令 $\varphi(p) = \int \frac{dp}{f(p)}$, 即 $\varphi(p) = x + C_1$.

若可求其反函数: $p = y' = g(x, C_1)$

则积分可得: $y = \int g(x, C_1) dx + C_2$.

若 $\varphi(p) = x + C_1$ 的反函数不易求出, 则两边

对 y 求导, 得
$$\varphi'(p) \frac{dp}{dy} = \frac{1}{p},$$

分离变量并求积分, 得

$$y = \int p \varphi'(p) dp = p \varphi(p) - \int \varphi(p) dp + C_2.$$

从而得通解:

$$\begin{cases} x = \varphi(p) - C_1, \\ y = p \varphi(p) - \int \varphi(p) dp + C_2. \end{cases}$$

当 $f(a) = 0$ 时,

$$y' = a, \quad \text{即, 奇解} \quad y = ax + C.$$

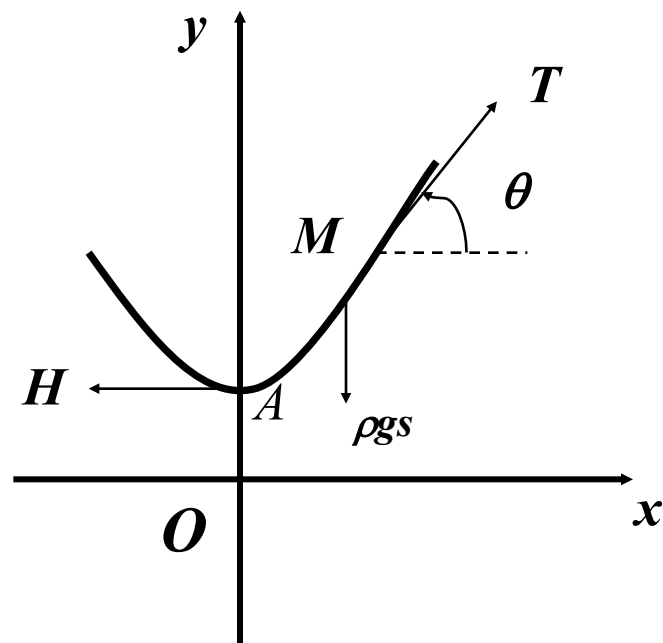
例 3 求解悬链线微分方程

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2}, \\ y|_{x=0} = a, \quad y'|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

解 令 $y' = p$, 则

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + p^2},$$

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{x}{a} + C_1,$$



积分,可得:

$$y' = p = \sinh\left(\frac{x}{a} + C_1\right);$$

再积分,得:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2.$$

代入初始条件:

$$y|_{x=0} = a, \quad y'|_{x=0} = 0,$$

得到特解 (悬链线) $y = a \cosh \frac{x}{a}.$

2 二阶线性微分方程

二阶线性齐次微分方程的标准形式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

二阶线性非齐次微分方程的标准形式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x) \quad (2)$$

即，二阶线性微分方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x)$$

当 $f(x) = 0$ 时，二阶线性齐次微分方程；

当 $f(x) \neq 0$ 时，二阶线性非齐次微分方程。

二阶线性微分方程的解的结构

1、二阶齐次方程解的结构：

定理 1 若函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 (1) 的两个解，则 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 也是 (1) 的解（ C_1, C_2 是常数）。

问题： $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 一定是通解吗？

函数的线性相关性:

设 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 为定义在区间 I 内的 n 个函数.
若存在 n 个不全为零的常数使在该区间内有式

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n = 0$$

恒成立, 则称这 n 个函数在区间 I 内线性相关.

否则, 线性无关.

如, 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, e^x, e^{-x}, e^{2x} 线性无关;

$1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 线性相关.

特别地, 若在 I 上有 $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{常数}$, 则函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在 I 上**线性无关**.

定理 1' 若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1)的两个**线性无关**的特解, 则 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 就是方程(1)的通解.

如: $y'' + y = 0$, $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$,

且 $\frac{y_2}{y_1} = \tan x \neq \text{常数}$, $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

2、二阶非齐次线性方程的解的结构：

定理 2 设 y^* 是二阶非齐次线性方程 (2) 的一个特解, Y 是与方程 (2) 对应的齐次方程 (1) 的通解, 那么 $y = Y + y^*$ 是二阶非齐次线性微分方程 (2) 的通解.

证明 将 $y = Y + y^*$ 代入非齐次方程 (2) 直接检验. 可知 $y = Y + y^*$ 是方程 (2) 的解. 又因为 $y = Y$ 对 应的齐次方程的通解, 所以必含两个任意常数.

定理 2' 设非齐次方程(2)的右端 $f(x)$ 是几个函数之和, 如, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$,
而 y_1^* 与 y_2^* 分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

和

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解, 那么 $y_1^* + y_2^*$ 就是原方程的特解.

解的叠加原理

求解的降阶法与常数变易法

1、齐次线性方程求线性无关特解——降阶法

设 y_1 是方程(1)的一个非零特解,

令 $y_2 = u(x)y_1$, 代入(1)式, 得

$$y_1 u'' + (2y_1' + P(x)y_1)u' + \underline{(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1)u} = 0,$$

即
$$y_1 u'' + (2y_1' + P(x)y_1)u' = 0.$$

再令 $u' = p = p(x)$, 则有 p 的一阶方程:

降阶方程

$$y_1 p' + (2y_1' + P(x)y_1)p = 0.$$

解得

$$p = u' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x) dx},$$
$$\therefore u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x) dx} dx$$

$$y_2 = y_1 \int y_1^{-2} e^{-\int P(x) dx} dx, \quad (3)$$

刘维尔公式

定理 3 设 y_1 为二次齐次方程 (1) 的一个非零特解, 则齐次方程 (1) 的通解为:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int y_1^{-2} e^{-\int P(x) dx} dx. \quad (4)$$

例6 已知 $y_1 = e^x$ 为微分方程

$$y'' - 2y' + y = 0$$

的一个特解, 求其通解.

解 由刘维尔公式, 方程的另一个特解为

$$y_2 = e^x \int e^{-2x} e^{\int 2dx} dx = e^x \int dx = xe^x,$$

所以, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = (C_1 + C_2 x) e^x$ 为其通解.

例 7 验证 $y_1 = x^2$ 为方程 $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ 的解,
求一个与该解线性无关的特解。

解 方程的标准形为 $y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{4}{x^2} y = 0$,

由刘维尔公式, 方程的另一个特解为

$$\begin{aligned} y_2 &= x^2 \int x^{-4} e^{\int \frac{3}{x} dx} dx = x^2 \int x^{-4} e^{3 \ln x} dx \\ &= x^2 \int x^{-1} dx = x^2 \ln x. \\ &\quad (x > 0) \end{aligned}$$

2、求解非齐次线性方程通解——常数变易法

设对应齐次方程通解为：

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

非齐次方程通解为： $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$

$$y' = c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'$$

令

$$c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0$$

$$y'' = c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2''$$

将 y, y', y'' 代入方程(2), 得

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + c_1(x)(\underline{y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1}) \\ + c_2(x)(\underline{y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2}) = f(x)$$

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x)$$

联立方程组:

$$\begin{cases} y_1 c_1'(x) + y_2 c_2'(x) = 0, \\ y_1' c_1'(x) + y_2' c_2'(x) = f(x). \end{cases} \quad (5)$$

$$\therefore \text{系数行列式 } w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\therefore c_1'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{w(x)}, \quad c_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{w(x)},$$

积分可得:

$$c_1(x) = C_1 - \int y_2 \frac{f(x)}{w(x)} dx,$$

$$c_2(x) = C_2 + \int y_1 \frac{f(x)}{w(x)} dx,$$

(6)

非齐次方程通解为:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int y_2 \frac{f(x)}{w(x)} dx + y_2 \int y_1 \frac{f(x)}{w(x)} dx.$$

例 8 求方程 $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = x-1$ 的通解.

解 $\because 1 + \frac{x}{1-x} - \frac{1}{1-x} = 0$, 齐次方程特解为

$y_1 = e^x$. 由刘维尔公式(3)

$$y_2 = e^x \int e^{-2x} e^{-\int \frac{x}{1-x} dx} dx = -x.$$

对应齐次方程的通解为:

$$Y = C_1 e^x + C_2 x.$$

设原方程的通解为 $y = c_1(x)e^x + c_2(x)x$,

$c_1'(x)$, $c_2'(x)$ 应满足方程组 (5)

$$\begin{cases} e^x c_1'(x) + x c_2'(x) = 0, \\ e^x c_1'(x) + c_2'(x) = x - 1. \end{cases}$$

解得 $c_1'(x) = xe^{-x}$, $c_2'(x) = -1$.

即 $c_1(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1$ $c_2(x) = -x + C_2$,

原方程的通解: $y = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - x - 1$.

若用公式 (6) 求解, 先要计算

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = e^x(1-x),$$

于是

$$c_1(x) = C_1 - \int x e^{-x} dx = C_1 - (x+1)e^{-x},$$

$$c_2(x) = C_2 - \int dx = C_1 - x,$$

即, 原方程的通解为

$$y = c_1(x)e^x + c_2(x)x = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - x - 1.$$

定理 3' 设 y_1 为二次齐次方程(1)的一个非零特解, 则非齐次方程(2)的一个特解为:

$$y^* = y_2 \int y_1 \frac{f(x)}{w(x)} dx - y_1 \int y_2 \frac{f(x)}{w(x)} dx, \quad (7)$$

其中 y_2 由公式(3)确定.

定理 4 设 y_1 为二次齐次方程(1)的一个非零特解, 则非齐次方程(2)的一个特解为:

$$y^* = y_1 \int [y_1^{-2} e^{-\int P(x) dx} \int y_1 f(x) e^{\int P(x) dx} dx] dx. \quad (8)$$

证 设 y_1 为齐次方程(1)的一个非零特解, 设非齐次方程(2)的一个非零特解为 $y^* = y_1 u(x)$, 则

$$y^{*'} = y_1' u + y_1 u', \quad y^{*''} = y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u'',$$

将以上各式代入非齐次方程(2)并整理, 得

$$y_1 u'' + (P y_1 + 2 y_1') u' = f(x),$$

即

$$u'' + (P + 2 \frac{y_1'}{y_1}) u' = \frac{f(x)}{y_1},$$

这是关于 u' 的一阶线性微分方程, 代入公式得

$$\begin{aligned}
 u' &= e^{-\int (P+2\frac{y_1'}{y_1})dx} \int \frac{f(x)}{y_1} e^{\int (P+2\frac{y_1'}{y_1})dx} dx \\
 &= y_1^{-2} e^{-\int P(x)dx} \int y_1 f(x) e^{\int P(x)dx} dx.
 \end{aligned}$$

于是

$$u(x) = \int [y_1^{-2} e^{-\int P(x)dx} \int y_1 f(x) e^{\int P(x)dx} dx] dx,$$

从而, $y^* = y_1 u(x)$ 为所求.

例 9 求微分方程 $y'' - 2y' + y = x^4 e^x$ 的通解.

解 观察得 $y_1 = e^x$ 为对应的齐次方程的解.

由公式 (3)
$$y_2 = e^x \int e^{-2x} e^{\int 2dx} dx = x e^x.$$

所以齐次方程的通解为:

$$Y = (C_1 + C_2 x) e^x.$$

因为

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0,$$

根据定理 3' 非齐次方程的一个特解为:

$$\begin{aligned} y^* &= y_2 \int y_1 \frac{f(x)}{w(x)} dx - y_1 \int y_2 \frac{f(x)}{w(x)} dx \\ &= xe^x \int e^x \frac{x^4 e^x}{e^{2x}} dx - e^x \int xe^x \frac{x^4 e^x}{e^{2x}} dx \\ &= xe^x \int x^4 dx - e^x \int x^5 dx = \frac{1}{30} x^6 e^x \end{aligned}$$

方程的通解为:

$$y = (C_1 + C_2 x + \frac{1}{30} x^6) e^x.$$

又根据定理 4 非齐次方程的一个特解为:

$$\begin{aligned} y^* &= y_1 \int [y_1^{-2} e^{-\int P dx} \int y_1 f(x) e^{\int P dx} dx] dx \\ &= e^x \int [e^{-2x} e^{\int 2 dx} \int e^x x^4 e^x e^{-\int 2 dx} dx] dx \\ &= e^x \int [\int x^4 dx] dx = e^x \int \frac{1}{5} x^5 dx = \frac{1}{30} x^6 e^x. \end{aligned}$$

于是, 方程的通解为:

$$y = (C_1 + C_2 x + \frac{1}{30} x^6) e^x.$$



注意:

$$\begin{aligned}w(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \\&= y_1 [y_1 \int y_1^{-2} e^{-\int P(x) dx} dx]' - y_1' y_2 \\&= y_1 [y_1' \int y_1^{-2} e^{-\int P(x) dx} dx + y_1^{-1} e^{-\int P(x) dx}] - y_1' y_2 \\&= y_1' y_2 + e^{-\int P(x) dx} - y_1' y_2 \\&= e^{-\int P(x) dx}.\end{aligned}$$

实际上, 定理 4 也可由 (7) 式直接获得:

$$y^* = y_2 \int y_1 \frac{f(x)}{w(x)} dx - y_1 \int y_2 \frac{f(x)}{w(x)} dx$$

$$= y_2 \int y_1 \frac{f(x)}{w(x)} dx - y_1 \int \frac{y_2}{y_1} y_1 \frac{f(x)}{w(x)} dx$$

$$= y_1 \int \left[\left(\frac{y_2}{y_1} \right)' \int y_1 \frac{f(x)}{w(x)} dx \right] dx$$

$$= y_1 \int \left[y_1^{-2} e^{-\int P(x) dx} \int y_1 f(x) e^{\int P(x) dx} dx \right] dx.$$

3 小结与思考题

一般二阶微分方程解法:

通过代换将其化成较低阶方程求解.

主要有下面三个特殊类型:

$$y'' = f(x), \quad y'' = f(y), \quad y'' = f(y').$$

还可用于下面两个类型:

$$y'' = f(x, y'), \quad y'' = f(y, y').$$

二阶线性方程求解主要内容：

线性方程解的结构； 函数的线性相关性；
降阶法与常数变易法.

补充内容 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ （观察特解！）

(1) 若 $P(x) + xQ(x) = 0$, 特解 $y = x$;

(2) 若 $1 + P(x) + Q(x) = 0$, 特解 $y = e^x$;

(3) 若 $1 - P(x) + Q(x) = 0$, 特解 $y = e^{-x}$.

思考题

已知 $y_1 = 3$, $y_2 = 3 + x^2$, $y_3 = 3 + x^2 + e^x$

都是微分方程

$$(x^2 - 2x)y'' - (x^2 - 2)y' + (2x - 2)y = 6(x - 1)$$

的解, 求此方程的通解.

思考题解答

$\because y_1, y_2, y_3$ 都是微分方程的解,

$$\therefore y_3 - y_2 = e^x, \quad y_2 - y_1 = x^2,$$

是对应齐次方程的解,

$$\therefore \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{e^x}{x^2} \neq \text{常数}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{所求通解为 } y &= C_1(y_3 - y_2) + C_2(y_2 - y_1) + y_1 \\ &= C_1 e^x + C_2 x^2 + 3. \end{aligned}$$

课堂练习题

一、求下列各微分方程的通解：

$$1. \quad y'' = xe^{-2x};$$

$$2. \quad y'' = \frac{1}{x} y' + xe^x;$$

$$3. \quad y'' = (y')^3 + y';$$

$$4. \quad y'' + \frac{2}{1-y} y'^2 = 0.$$

二、求下列各微分方程满足所给初始条件的特解：

$$1. \quad xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}, \quad y|_{x=1} = -2, \quad y'|_{x=1} = 1;$$

$$2. \quad yy'' = 2(y'^2 - y'), \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 2.$$

三、验证 $y_1 = e^{x^2}$ 是方程 $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ 的解, 并写出该方程的通解.

四、验证 $y_1 = e^{2x}$ 是方程 $(2x-1)y'' - 2(2x+1)y' + 8y = 0$ 的一个解, 求此方程的通解.

五、已知 $y_1 = x^{-1}e^x$ 为方程 $xy'' + 2y' - xy = 0$ 的解, 求非齐次方程 $xy'' + 2y' - xy = e^x$ 的通解.

六、已知齐次线性方程 $x^2 y'' - xy' + y = 0$ 的通解为 $Y(x) = C_1 x + C_2 x \ln|x|$, 求非齐次线性方程 $x^2 y'' - xy' + y = -x$ 的通解.

课堂练习题答案

一、 1. $y = \frac{1}{4}(x+1)e^{-2x} + C_1x + C_2;$

2. $y = (x+1)e^x + C_1x^2 + C_2;$

3. $y = \arcsin(C_2e^x) + C_1;$ 4. $y = 1 - (C_1x + C_2)^{-1}.$

二、 1. $y = -(x+1)e^{1-x};$ 2. $y = \tan(x + \frac{\pi}{4}).$

三、 $y = (C_1 + C_2x)e^{x^2};$ 四、 $y = C_1e^{2x} + C_2(4x^2 + 1);$

五、 $y = \frac{1}{x}(C_1e^x + C_2e^{-x}) + \frac{e^x}{2};$ 六、 $y = C_1x + C_2x \ln|x| - \frac{1}{2}x \ln^2|x|.$