第七章 常微分方程

第二讲: 特殊一阶微分方程的解法

1　变量可分离的微分方程

形如 $\boxed{y' = f(x)g(y)}$ 的微分方程成为**变量可分离**的微分方程.

例如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y^{-\frac{4}{5}}\mathrm{d}y = 2x^2\mathrm{d}x,$

解法 设函数 $1/g(y)$ 和 $f(x)$ 是连续的,

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x}$$

分离变量法

设$G(y)$和$F(x)$是依次为$1/g(y)$和$f(x)$的原函数,则$G(y)=F(x)+C$为微分方程的通解.

例1 求解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解.

解 当 $y\neq 0$ 时，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$,

两端积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\mathrm{d}x$, $\ln|y|=x^2+C_1$

$\therefore y=Ce^{x^2}$. 显然，包含 $y=0$ 情形.

例2　求方程 $f(xy)y\mathrm{d}x+g(xy)x\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解　令 $u=xy$，$\mathrm{d}u=x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}u-y\mathrm{d}x}{x}$，

$$f(u)y\mathrm{d}x+g(u)x\cdot\frac{\mathrm{d}u-y\mathrm{d}x}{x}=0,$$

$$[f(u)-g(u)]\frac{u}{x}\mathrm{d}x+g(u)\mathrm{d}u=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{g(u)\mathrm{d}u}{u[f(u)-g(u)]}$$

通解为　$$\ln|x|=-\int\frac{g(u)\mathrm{d}u}{u[f(u)-g(u)]}.$$

例 3 求解微分方程：

$$\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}(200\sqrt{h}-\sqrt{h^3})\mathrm{d}h, \qquad h|_{t=0}=100.$$

解 两端作不定积分，得

$$t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{400}{3}\sqrt{h^3}-\frac{2}{5}\sqrt{h^5}\right)+C,$$

$$\because h|_{t=0}=100, \qquad \therefore C=\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\times\frac{14}{15}\times 10^5,$$

所求解为：$t=\dfrac{\pi}{4.65\sqrt{2g}}(7\times 10^5-10^3\sqrt{h^3}+3\sqrt{h^5}).$

例 4 衰变问题：铀含量的衰变速度与未衰变原子含量M成正比,已知$M\big|_{t=0}=M_0$,求衰变过程中铀含量$M(t)$随时间t变化的规律.

解 衰变速度 $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$, 由题设条件

$\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-\lambda M,\quad (\lambda>0)$（衰变系数） $\dfrac{\mathrm{d}M}{M}=-\lambda \mathrm{d}t$

$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}M}{M}=\int(-\lambda)\mathrm{d}t,\ \ \ln M=-\lambda t+\ln|C|,$ 即$M=C\mathrm{e}^{-\lambda t}$,

代入$M\big|_{t=0}=M_0$ 得 $M_0=C\mathrm{e}^0=C$,

$\therefore M=M_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$

衰变规律

2 齐次微分方程

形如 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)}$ 的方程称为一阶**齐次微分方程.**

解法 作变量代换 $u = \dfrac{y}{x}$, 即 $y = xu$,

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

代入原式，得 $u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u)$,

即 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{f(u) - u}{x}$. 变量可分离方程

当 $f(u)-u\neq 0$时，得 $\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\ln|C_1x|$,

即 $x=Ce^{\varphi(u)}$, $\left(\varphi(u)=\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}\right)$

将 $u=\frac{y}{x}$代入，得通解 $x=Ce^{\varphi(\frac{y}{x})}$,

若 $\exists u_0$, 使 $f(u_0)-u_0=0$, 则 $u=u_0$是方程的解，

代回原方程，得齐次方程的解 $y=u_0x$.

方程的奇解

例6 求解微分方程：

$$(x-y\cos\frac{y}{x})\mathrm{d}x+x\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}y=0.$$

解　令 $u=\dfrac{y}{x}$,　　$\mathrm{d}y=x\mathrm{d}u+u\mathrm{d}x$,

$$(x-ux\cos u)\mathrm{d}x+x\cos u(u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u)=0,$$

$$\cos u\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x},\quad \sin u=-\ln|x|+C,$$

微分方程的解为 $\sin\dfrac{y}{x}=-\ln|x|+C.$

例7　求解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{2y^2-xy}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2y^2-xy}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$,

令 $u=\dfrac{y}{x}$,　$\mathrm{d}y=(xu'+u)\mathrm{d}x=x\mathrm{d}u+u\mathrm{d}x$,

$u+xu'=\dfrac{2u^2-u}{1-u+u^2}$.　　分离变量整理得:

$$[\frac{1}{2}(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u})-\frac{2}{u-2}+\frac{1}{u-1}]\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\ln|u-1|-\frac{3}{2}\ln|u-2|-\frac{1}{2}\ln|u|=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|C|,$$

$$\frac{u-1}{\sqrt{u(u-2)^3}}=\sqrt{C}x.$$

回代 $u=\frac{y}{x}$,得

$$\frac{y-x}{\sqrt{y(y-2x)^3}}=\sqrt{C}.$$

方程的通解为:

$$(y-x)^2=Cy(y-2x)^3.$$

例8 抛物线的光学性质

实例：车灯的反射镜面——————旋转抛物面

解 (如图) 设旋转轴为x轴

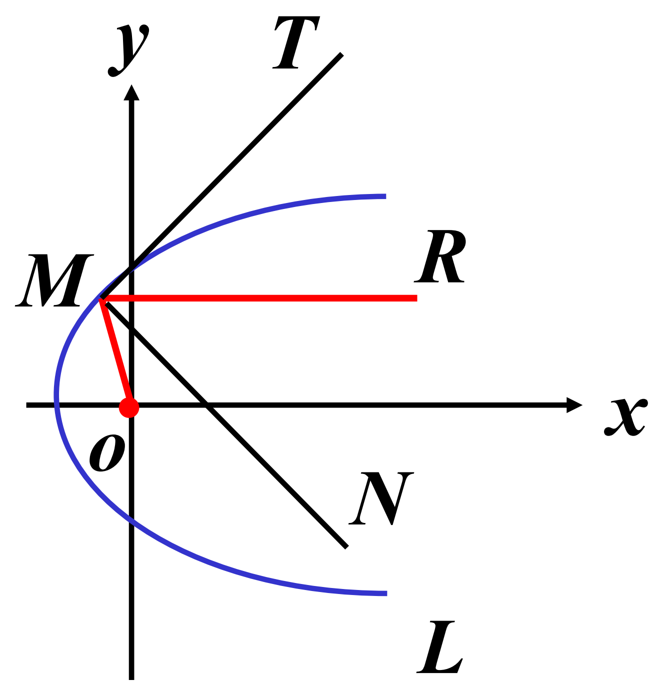
光源在$(0,0)$，$L: y = y(x)$

设$M(x,y)$为L上任一点，

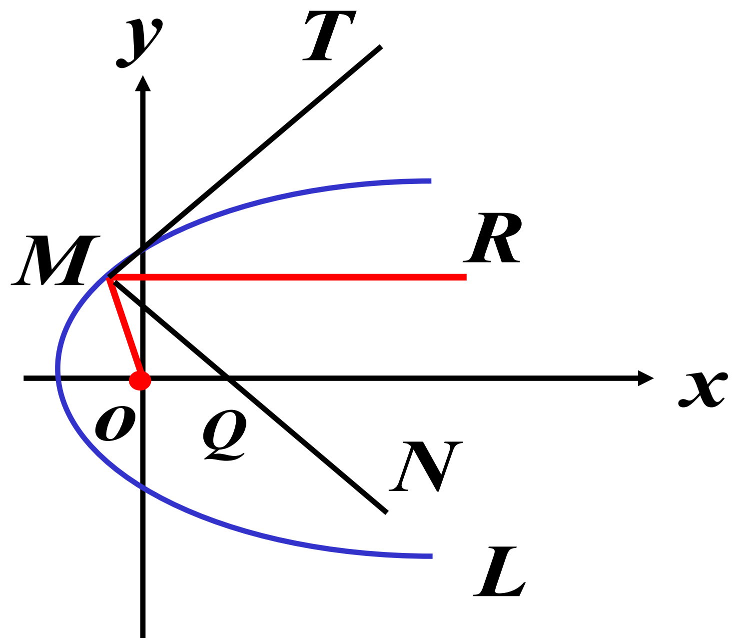
MT为切线，斜率为y'，

MN为法线，斜率为$-\dfrac{1}{y'}$，

$\because \angle OMN = \angle NMR$,



$$\therefore \tan\angle OMN = \tan\angle NMR,$$



因为$\angle OMN = \angle xQM - \angle xOM$，所以由夹角正切公式得：

$$\tan\angle OMN = \frac{-\frac{1}{y'} - \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{xy'}}, \quad \tan\angle NMR = \frac{1}{y'}.$$

从而得微分方程： $yy'^2 + 2xy' - y = 0,$

即 $y' = -\frac{x}{y} \pm \sqrt{(\frac{x}{y})^2 + 1}.$

令$u=\dfrac{y}{x}$, 得 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+u^2}}{u}$,

分离变量 $$\frac{u\mathrm{d}u}{(1+u^2)\pm\sqrt{1+u^2}}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

令 $1+u^2=t^2$, $$\frac{t\mathrm{d}t}{t(t\pm1)}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分得 $\ln|t\pm1|=\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$, 即 $\sqrt{u^2+1}=\dfrac{C}{x}\pm1$,

平方化简得 $u^2 = \frac{C^2}{x^2} \pm \frac{2C}{x}$,

代回 $u = \frac{y}{x}$, 得 $y^2 = 2C(x \pm \frac{C}{2})$

抛物线

所求旋转轴为 ox 轴的旋转抛物面方程为

$$y^2 + z^2 = 2C(x \pm \frac{C}{2}).$$

注：在 xOy 平面上的曲线 $f(x, y) = 0$ 绕 x 轴旋转曲面方程为 $f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0.$

3. 可化为齐次的微分方程:

形如 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)}$ 的微分方程

称为可化为齐次方程的微分方程.

解法 令 $x=X+h$, （其中h和k是待定的常数）

$$y=Y+k,\qquad \mathrm{d}x=\mathrm{d}X,\quad \mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=f\left(\frac{aX+bY+\underline{ah+bk+c}}{a_1X+b_1Y+\underline{a_1h+b_1k+c_1}}\right)$$

$$\begin{cases} ah+bk+c=0, \\ a_1h+b_1k+c_1=0, \end{cases}$$

(1) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0,$ 有唯一一组解.

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = f\left(\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}\right)$$ 得通解代回 $$\begin{cases} X = x-h, \\ Y = y-k, \end{cases}$$

(2) $\Delta = 0,$ 即 $ab_1 = a_1b,$ 上述方法不能用.

当 $b_1 = 0$ 时，a_1 与 b 中必至少有一个为零 .

若 $b=0$, 可分离变量的微分方程. 否则

有 $a_1=0$, 令 $z=ax+by$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{b}(\dfrac{dz}{dx}-a)$,

$$\frac{1}{b}(\frac{dz}{dx}-a)=f(\frac{z+c}{c_1})$$ 可分离变量的微分方程.

当 $b_1\neq 0$时, 令 $\dfrac{a_1}{a}=\dfrac{b_1}{b}=\lambda$,

方程可化为 $\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1})$, 令 $z=ax+by$,

$$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{1}{b}(\frac{dz}{dx}-a)=f(\frac{z+c}{\lambda z+c_1}).$$

例9　求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$ 的通解.

解　$\because \Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0,$

方程组 $\begin{cases}h-k+1=0\\ h+k-3=0,\end{cases}\Rightarrow h=1,k=2,$

令 $x=X+1,y=Y+2.$　　代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{X-Y}{X+Y},\qquad 令u=\frac{Y}{X},$$

方程变为 $u + X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X} = \dfrac{1-u}{1+u}$, 分离变量法得

$X^2(u^2+2u-1)=C$, 即 $Y^2+2XY-X^2=C$,

将 $X=x-1, Y=y-2$ 代回,

得原方程的通解

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=C,$$

或 $x^2+2xy-y^2+2x+6y=C_1$.

例10 求 $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$ 的通解.

解 令 $x+y=u$, $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$ 代入原方程

$\frac{du}{dx}=1+u^2$ 解得 $\arctan u=x+C$,

代回 $u=x+y$, 得 $\arctan(x+y)=x+C$,

原方程的通解为 $y=\tan(x+C)-x$.

4 小结与思考题

分离变量法步骤:

1. 分离变量;　　2. 两端积分---隐式通解.

3. 齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\dfrac{y}{x})$. 解法: 令 $u=\dfrac{y}{x}$.

4. 可化为齐次方程的方程,令 $\begin{cases} x = X + h, \\ y = Y + k. \end{cases}$

思考题

求解微分方程 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{x+y}{2}.$$

思考题解答

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}=0,\quad \int\frac{\mathrm{d}y}{2\sin\frac{y}{2}}=-\int\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x,$$

$$\ln\left|\csc\frac{y}{2}-\cot\frac{y}{2}\right|=2\cos\frac{x}{2}+C,$$ 为所求解.

思考题

方程 $\int_0^x \left(2y(t)+\sqrt{t^2+y^2(t)}\right)\mathrm{d}t = xy(x)$

是否为齐次方程?

思考题解答

方程两边同时对 x 求导:

$$2y+\sqrt{x^2+y^2}=y+xy',$$

$$xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y,\quad y'=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x},$$

原方程是齐次方程.

课堂练习题

一、求下列微分方程的通解:

1、$x\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x + y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y = 0$;

2、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1+y^2}{xy+x^3y}$.

二、 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

1、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1+x+y^2+xy^2$, $y|_{x=0} = 0$;

2、$\cos y\,\mathrm{d}x + (1+\mathrm{e}^{-x})\sin y\,\mathrm{d}y = 0$, $y|_{x=0} = \dfrac{\pi}{4}$.

三、求方程$(1+2e^{\frac{x}{y}})dx+2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$的通解.

四、求齐次方程$(y^2-3x^2)dy+2xydx=0$满足所给初始条件$y(0)=1$的特解.

五、化下列方程为齐次方程, 并求出通解:

1、$y'=\dfrac{x+y+1}{x-y-3}$;

2、$(2x-5y+3)dx-(2x+4y-6)dy=0$.

课堂练习题答案

一、1、$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C$; ; $x=\pm 1, |y|<1$; $y=\pm 1, |x|<1$.

2、$(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$.

二、1、$y=\tan(\frac{1}{2}x^2+x)$; 2、$e^x+1=2\sqrt{2}\cos y$.

三、$x+2ye^{\frac{x}{y}}=C$. 四、$y^2-x^2=y^3$.

五、1、$\arctan\frac{y+2}{x-1}=\frac{1}{2}\ln[(x-1)^2+(y+2)^2]+C$;

2、$(4y-x-3)(y+2x-3)^2=C$.

5　一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的标准形式:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)}$$

当$Q(x)\equiv 0$,　上方程称为**齐次方程**;

当$Q(x)\not\equiv 0$,　上方程称为**非齐次方程**.

如:　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+x^2$,　$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\sin t+t^2$,　线性方程;

$yy'-2xy=3$,　$y'-\cos y=1$,　非线性方程.

一阶线性微分方程的解法：

齐次线性方程： $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0.$$

分离变量并积分，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x, \qquad \int\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\int P(x)\mathrm{d}x,$$

$$\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln|C|,$$

齐次方程的通解为： $$\boxed{y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.}$$

非齐次线性方程: $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x).$$

讨论: $$\because \frac{\mathrm{d}y}{y}=\left[\frac{Q(x)}{y}-P(x)\right]\mathrm{d}x,$$

两边积分 $$\ln|y|=\int\frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x-\int P(x)\mathrm{d}x,$$

令 $$\int\frac{Q(x)}{y}\mathrm{d}x=\ln|u(x)|,$$

$$\therefore \quad \ln|y|=\ln|u(x)|-\int P(x)\mathrm{d}x,$$

即 $$y=u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

非齐次方程通解形式与齐次方程通解相比:

$\boxed{C \Rightarrow u(x),}$ 即，常数变易法:

把齐次方程通解中的常数易为函数的方法.

实质: 未知函数的变量代换.

新未知函数 $u(x) \Rightarrow$ 原未知函数 $y(x)$,

作变换 $$y = \underline{u(x)}e^{-\int P(x)dx}$$

$$y' = u'(x)e^{-\int P(x)dx} + u(x)[-P(x)]e^{-\int P(x)dx},$$

将y和y'代入原方程得 $u'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$,

积分得 $$\boxed{u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C,}$$

一阶线性非齐次微分方程的通解为:

$$\boxed{y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]}$$

$$\boxed{=\underbrace{Ce^{-\int P(x)dx}}_{\text{对应齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}_{\text{非齐次方程特解}}}$$

对应齐次方程通解　　　　非齐次方程特解

例11 求方程 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$ 的通解.

解 $P(x)=\frac{1}{x}$, $Q(x)=\frac{\sin x}{x}$,

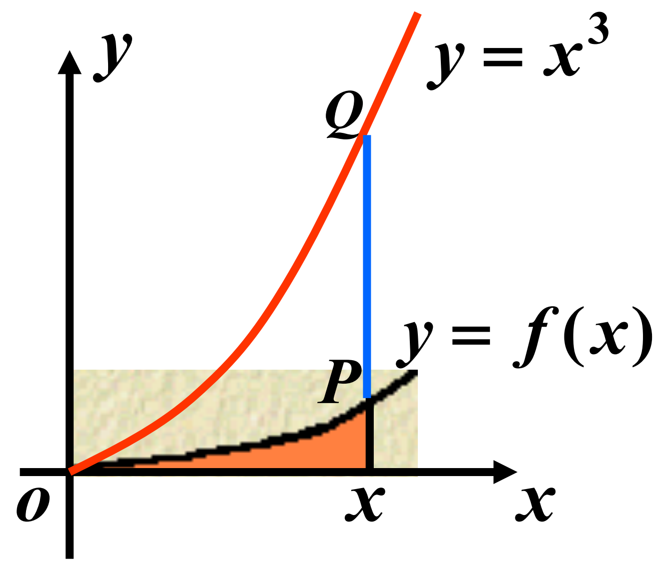
$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-\ln|x|}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\ln|x|}dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{x}\left(\int\sin x dx+C\right)=\frac{1}{x}(-\cos x+C).$$

例12 如图所示，平行于 y 轴的动直线被曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^3\ (x\geq 0)$ 截下的线段 PQ 之长数值上等于阴影部分的面积，求曲线 $f(x)$.

解 $\int_0^x y\mathrm{d}x = x^3 - y,$



两边求导得 $y' + y = 3x^2.$

解此方程：

$$y' + y = 3x^2,\quad y(0)=0.$$

$$y = e^{-\int dx}\left[C + \int 3x^2 e^{\int dx}\,dx\right]$$

$$= Ce^{-x} + 3x^2 - 6x + 6,$$

由 $y|_{x=0} = 0$, 得 $C = -6$,

所求曲线为:

$$y = 3(x^2 - 2x + 2 - 2e^{-x}).$$

6. 可化为一阶线性的微分方程：伯努利方程

伯努利(Bernoulli)方程的标准形式

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n} \quad (n\neq 0,1,\ n\in \mathrm{R})$$

当$n=0,1$时， 方程为**线性微分方程,**

当$n\neq 0,1$时， 方程为**非线性微分方程.**

解法： 需经过变量代换化为线性微分方程.

两端除以y^n，得 $y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$,

令 $z=y^{1-n}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,

代入上式 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$,

求出通解后，将 $z=y^{1-n}$ 代入即得

$$y^{1-n}=\mathrm{e}^{-\int(1-n)P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)(1-n)\mathrm{e}^{\int(1-n)P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right).$$

例 13 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{4}{x}y=x^2\sqrt{y}$ 的通解.

解 两端同除以 $\sqrt{y}$, **得** $\dfrac{1}{\sqrt{y}}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{4}{x}\sqrt{y}=x^2,$

令 $z=\sqrt{y},\quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2}{x}z=\dfrac{1}{2}x^2,$

解得 $z=\sqrt{y}=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{2}C\right),$

$=\dfrac{1}{2}x^2(x+C),\qquad$ 即 $y=\dfrac{1}{4}x^4(x+C)^2.$

例14　求解微分方程 $2yy' + 2xy^2 = xe^{-x^2}$.

解一　$y' + xy = \frac{1}{2}xe^{-x^2}y^{-1}$，令 $z = y^{1-(-1)} = y^2$，

$$\frac{dz}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}, \qquad \therefore \frac{dz}{dx} + 2xz = xe^{-x^2},$$

$$z = e^{-\int 2x dx}[\int xe^{-x^2}e^{\int 2x dx}dx + \frac{1}{2}C]$$

所求通解为:　$y^2 = \frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2 + C)$.

解二 原方程 $2yy' + 2xy^2 = xe^{-x^2}$

等价于 $(y^2)' + 2x(y^2) = xe^{-x^2}$,

$$\therefore y^2 = e^{-\int 2x\,dx}\left[\int xe^{-x^2} e^{\int 2x\,dx}\,dx + \frac{1}{2}C\right]$$

所求通解为:

$$y^2 = \frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2 + C).$$

例15 求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x+y}$.

解一 令 $x+y=u$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$,

代入原式 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1=\frac{1}{u}$,

分离变量法求解得 $u-\ln(u+1)=x-\ln|C|$,

$(C\neq 0)$. 将 $u=x+y$ 代回, 所求通解为:

$y-\ln(x+y+1)=-\ln|C|$, 或 $x=Ce^{y}-y-1$.

解二 原方程: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=y$. $(C\in\mathbb{R})$.

例16 求解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\sin^2(xy)}-\dfrac{y}{x}$.

解 令 $z=xy$, $\dfrac{dz}{dx}=y+x\dfrac{dy}{dx}$,

$$\frac{dz}{dx}=y+x\left(\frac{1}{x\sin^2(xy)}-\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{\sin^2 z},$$

即 $\sin^2 z dz=dx$. $\dfrac{1}{2}(1-\cos 2z)dz=dx$.

解得: $2z-\sin 2z=4x+C$, 回代 $z=xy$

所求通解为: $2xy-\sin(2xy)=4x+C$.

7 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式

$$F(x, y, y') = 0.$$

前面主要讨论了显式形式 $y' = f(x, y)$

的求解问题，这里介绍两类特殊情形：

$$y = f(x, y'), \quad x = f(y, y').$$

情形1： $y = f(x, y').$

引入参量 p，即令 $y' = p = p(x)$，

方程化为

$$y = f(x, p).$$

两边对 x 求导，得

$$p = f'_x(x, p) + f'_p(x, p)p',$$

对此方程求解即可.

例17 求微分方程 $y'^3+3y=3(y'+2x)$ 的通解.

解 从微分方程中解出 y, 得

$$y=y'+2x-\frac{1}{3}y'^3.$$

令 $y'=p=p(x)$，则

$$y=p+2x-\frac{1}{3}p^3.$$

两边对 x 求导, 得变量可分离方程

$$p=p'+2-p^2p', \qquad \frac{1-p^2}{p-2}\mathrm{d}p=\mathrm{d}x.$$

即 $$\mathrm{d}x=(-p-2-\frac{3}{p-2})\mathrm{d}p.$$

积分 得 $$x=-\frac{1}{2}p^2-2p-3\ln|p-2|+C.$$

于是,原方程的通解可由下面参数方程表示:

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}p^2-2p-3\ln|p-2|+C, \\ y=2x+p-\frac{1}{3}p^3. \end{cases}$$

情形2： $x = f(y, y')$

引入参量 p，即令 $y' = p = p(y)$,

方程化为

$$x = f(y, p).$$

两边对 y 求导，得

$$p^{-1} = f'_y(y, p) + f'_p(y, p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

对此方程求解即可.

例18 求微分方程 $y'^2 + x - y = 0$ 的通解.

解 从微分方程中解出 x, 得

$$x = y - y'^2.$$

令 $y' = p = p(y)$ ，则

$$x = y - p^2.$$

两边对 y 求导, 得变量可分离方程

$$p^{-1} = 1 - 2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}. \qquad \mathrm{d}y = (2p + 2 + \frac{2}{p-1})\mathrm{d}p.$$

并积分, 得

$$y=p^2+2p+2\ln|p-1|+C.$$

于是,原方程的通解可由下面参数方程表示:

$$\begin{cases} x=2p+2\ln|p-1|+C, \\ y=p^2+2p+2\ln|p-1|+C. \end{cases}$$

例19 求微分方程 $y'^2 + y' - y = 0$ 的通解.

解 从微分方程中解出 y, 得

$$y = y'^2 + y'.$$

令 $y' = p = p(x)$ ，则

$$y = p + p^2.$$

两边对 x 求导, 得变量可分离方程

$$p = p' + 2pp' = (1 + 2p)\, p'.$$

分离变量并积分, 得

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{p} + 2\right) \mathrm{d}p.$$

$$x = 2p + \ln|p| + C.$$

于是,原方程的通解可由下面参数方程表示:

$$\begin{cases} x = 2p + \ln|p| + C, \\ y = p + p^2. \end{cases}$$

例20 求微分方程 $y'^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的通解.

解 微分方程的参数表达形式为

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y'=a\sin^3 t. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ \mathrm{d}y=a\sin^3 t\,\mathrm{d}x. \end{cases}$$

微分上式第一函数, 得 $\mathrm{d}x=-3a\cos^2 t\sin t\,\mathrm{d}t,$

将此结果代入第二个函数, 得

$$\mathrm{d}y = a\sin^3 t\mathrm{d}x = -3a^2\sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t.$$

于是, 上式两边积分，得

$$y = -3a^2\int \sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{a^2}{64}(12t - 3\sin 2t - 3\sin 4t + \sin 6t) + C$$

因此, 方程的通解可表为:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = -\dfrac{a^2}{64}(12t - 3\sin 2t - 3\sin 4t + \sin 6t) + C. \end{cases}$$

例21 求微分方程 $y' + e^{y'} = x$ 的通解.

解 令 $y' = p$，则 $x = p + e^{p}$.

两边对 y 求导, 得 $\dfrac{1}{p} = (1 + e^{p})\dfrac{dp}{dy}$.

积分得 $y = \int (1 + e^{p}) p\,dp = \dfrac{1}{2} p^{2} + p e^{p} - e^{p} + C$.

通解为:
$$\begin{cases} x = p + e^{p}, \\ y = \dfrac{1}{2} p^{2} + p e^{p} - e^{p} + C. \end{cases}$$

例22 求微分方程

$$2x(1+\sqrt{x^2-y})\mathrm{d}x-\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y=0$$ 的通解.

解 $$2x\mathrm{d}x+2x\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}x-\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y=0,$$

凑微分法

$$\mathrm{d}(x^2)+\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}(x^2)-\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y=0,$$

将方程左端重新组合,有

$$\mathrm{d}(x^2)+\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}(x^2-y)=0,$$

原方程的通解为 $$3x^2+2(x^2-y)^{\frac{3}{2}}=C.$$

例23 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x^2+x^3+y}{1+x}$ 的通解.

解 **整理得** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{1+x}y=-x^2,$

一、（公式法）

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x}}\left[C-\int x^2\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x}}\mathrm{d}x\right],$$

通解 $y+xy+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{4}x^4=C.$

二、（常数变易法）

$$y=\frac{C}{1+x}.$$

齐次通解： 设 $y=\dfrac{c}{1+x}$， $c=C(x)$

$$y'=\frac{(1+x)c'-c}{(1+x)^2}=\frac{c'}{1+x}-\frac{y}{1+x}.$$ 代入得：

$$c'=-(1+x)x^2,\qquad c=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+C.$$

通解 $$y+xy+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4=C.$$

三、(凑微分法)

整理得: $(x^2+x^3+y)\mathrm{d}x+(1+x)\mathrm{d}y=0.$

$$\mathrm{d}y+(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)+x^2\mathrm{d}x+x^3\mathrm{d}x=0,$$

$$\mathrm{d}y+\mathrm{d}(xy)+\mathrm{d}(\frac{x^3}{3})+\mathrm{d}(\frac{x^4}{4})=0,$$

$$\mathrm{d}(y+xy+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4})=0.$$

$$y+xy+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}=C.$$

8　小结与思考题

一阶微分方程

- 分离变量法
- 常数变易法
- 凑微分方法法

1. 一阶线性非齐次方程　令 $y = u(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$;

2. 伯努利方程　令 $y^{1-n} = z$.

思考题

求微分方程 $y' = \dfrac{\cos y}{\cos y \sin 2y - x \sin y}$ 的通解.

思考题解答

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\cos y\sin 2y-x\sin y}{\cos y}=\sin 2y-x\tan y,$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+(\tan y)\cdot x=\sin 2y,$$

$$x=\mathrm{e}^{\ln|\cos y|}\left[\int \sin 2y\cdot \mathrm{e}^{-\ln|\cos y|}\mathrm{d}y+C\right]$$

$$=\cos y\left[\int\frac{2\sin y\cos y}{\cos y}\mathrm{d}y+C\right]=\cos y[C-2\cos y].$$

思考题

利用凑微分法求解微分方程：

$$\frac{2x}{y^3}\mathrm{d}x+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\mathrm{d}y=0\,.$$

思考题解答

$$因\ \frac{2x}{y^3}\mathrm{d}x+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\mathrm{d}y=\frac{2xy\mathrm{d}x-3x^2\mathrm{d}y}{y^4}+\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2x\mathrm{d}xy^3-x^2(3y^2)\mathrm{d}y}{y^6}+\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{y^3}\right)-\mathrm{d}\frac{1}{y}=\mathrm{d}\left(\frac{x^2-y^2}{y^3}\right)=0,$$

故方程的通解为 $x^2-y^2=Cy^3,(y\neq 0).$

课堂练习题

一、求下列微分方程的通解:

1、$y' + y\sin x = \mathrm{e}^{\cos x}$；

2、$(y^2 - 6x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0$.

二、 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

1、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\cot x = 5\mathrm{e}^{\cos x}$, $y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -4$; ;

2、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \dfrac{2-3x^2}{x^3}y = 2$, $\quad y\big|_{x=1} = 0$.

三、求伯努利方程 $y' + \frac{1}{x} y = 2x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$ 的通解.

四、用适当的变量代换求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x+y} - 1$ 的通解.

五、 已知微分方程 $y' + y = g(x)$, 其中

$g(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$, 试求一连续函数 $y = y(x)$ 满

足条件 $y(0) = 0$ 且在区间 $[0, +\infty)$ 满足上述方程.

六、求下列微分方程的通解：

1、$\tan y' + e^{y'} = x$；

2、$y = 2y'^2 - x$.

七、求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

1、$xy' = 1 + y'^2$， $y|_{x=2} = \frac{1}{2}$；

2、$x = \sin y' + \cos y'$， $y|_{x=1} = \frac{\pi}{2} - 1$.

课堂练习题答案

一、1、 $y=(x+C)\mathrm{e}^{\cos x}$； 2、 $x=Cy^2-\frac{1}{2}\ln|y|$.

二、1、 $y\sin x+5\mathrm{e}^{\cos x}=1$；2、 $y=x^3(1-\mathrm{e}^{x^{-2}-1})$.

三、$\sqrt{xy}=x+C$.

四、$(x+y)^2=2x+C$.

五、 $y(x)=\begin{cases}2(1-\mathrm{e}^{-x}), & 0\le x\le 1\\ 2(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-x}, & x>1\end{cases}$.

六、1、 $\begin{cases} x = \tan p + \mathrm{e}^p, \\ y = xp - \mathrm{e}^p + \ln|\cos p| + C \end{cases}$；

2、 $\begin{cases} x = 4p - 4\ln|p+1| + C, \\ y = 2p^2 - x. \end{cases}$.

七、1、 $\begin{cases} x = p + p^{-1}, \\ y = 0.5p^2 - \ln p \end{cases}$；

2、 $\begin{cases} x = \sin p + \cos p, \\ y = xp + \cos p - \sin p. \end{cases}$.