

第七章 常微分方程

第一讲: 微分方程基本概念

1 微分方程的定义

1、问题的提出

引例 1 一曲线通过点(1,2),且在该曲线上任一点 $M(x, y)$ 处的切线的斜率为 $2x$, 求这曲线的方程.

解 设所求曲线为 $y = y(x)$ $\frac{dy}{dx} = 2x$

其中 $x = 1$ 时, $y = 2$ $y = \int 2x dx$ 即 $y = x^2 + C$,

求得 $C = 1$, 所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

引例 2 列车在平直的线路上以 20 米/秒的速度行驶, 当制动时列车获得加速度 -0.4 米/秒², 问开始制动后多少时间列车才能停住? 以及列车在这段时间内行驶了多少路程?

解 设制动后 t 秒钟行驶 s 米, $s = s(t)$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -0.4; \text{ 当 } t = 0 \text{ 时, } s = 0, \quad v = \frac{ds}{dt} = 20,$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + C_1 \quad s = -0.2t^2 + C_1t + C_2$$

代入条件后知 $C_1 = 20, C_2 = 0$

$$v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + 20,$$

故 $s = -0.2t^2 + 20t,$

开始制动到列车完全停住共需 $t = \frac{20}{0.4} = 50(\text{秒}),$

列车在这段时间内行驶了

$$s = -0.2 \times 50^2 + 20 \times 50 = 500(\text{米}).$$

2、微分方程的定义

微分方程： 凡含有未知函数的导数或微分的方程叫**微分方程**.

如 $y' = xy$, $y'' + 2y' - 3y = e^x$,

$$(t^2 + x)dt + xdx = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = x + y,$$

实质： 联系自变量, 未知函数以及未知函数的某些导数(或微分)之间的关系式.

分类1: 常微分与偏微分方程.

微分方程的阶: 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数.

分类2: 一阶与高阶微分方程.

一阶微分方程: $F(x, y, y') = 0, y' = f(x, y).$

高阶($n \geq 2$) 微分方程:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

齐次微分方程：

若

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)}),$$

则称方程

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

为 n 阶 k 次齐次微分方程. 否则称为非齐次微分方程.

分类3: 齐次与非齐次微分方程.

分类4: 线性与非线性微分方程.

如, 线性微分方程: $y' + P(x)y = Q(x)$,

非线性微分方程: $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$.

分类5: 微分方程与微分方程组.

$$\begin{cases} y'_x = 3y - 2z, \\ z'_x = 2y - z. \end{cases}$$

3 微分方程的解

微分方程的解：使微分方程成为恒等式的函数.

设 $y = \varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶导数,

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0.$$

微分方程的解的分类：

(1) 通解：微分方程的解中含有任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同.

如, $y' = y$, 通解 $y = Ce^x$;

$y'' + y = 0$, 通解 $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$;

例 3 求函数 $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$ 所满足的微分方程.

解 求已知函数对 x 的一阶和二阶导数, 得

$$y' = C_1 e^x (\cos x - \sin x) + C_2 e^x (\cos x + \sin x)$$

$$y'' = C_1 e^x (-2 \sin x) + C_2 e^x (2 \cos x)$$

因为函数 $e^x \cos x$ 和 $e^x \sin x$ 所线性无关, 所以函数 $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$ 中的参数 C_1 和 C_2 独立, 从以上函数 y 和导函数 y' 的表达式中解出 C_1 和 C_2

得
$$C_1 = e^{-x} [y(\sin x + \cos x) - y' \sin x]$$

$$C_2 = e^{-x} [y(\sin x - \cos x) + y' \cos x]$$

将其代入函数 $y'' = C_1 e^x (-2 \sin x) + C_2 e^x (2 \cos x)$, 得微分方程 $y'' - 2y' + 2y = 0$,

而函数 $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$ 为它的通解.

(2) 特解： 确定了通解中任意常数以后的解.

解的图象： 微分方程的积分曲线.

通解的图象： 积分曲线族.

初始条件： 用来确定任意常数的条件.

初值问题： 求微分方程满足初始条件的解的问题.

$$\text{一阶: } \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases} \quad \text{过定点的积分曲线;}$$

二阶:
$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$$

过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线.

补充: 微分方程的初等解法: **初等积分法.**

求解微分方程



求积分

(通解可用初等函数或积分表示出来)

例 4 验证:函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是微分

方程 $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$ 的解, 并求满足初始条件

$x|_{t=0} = A, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$ 的特解.

解 $\because \frac{dx}{dt} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt,$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 C_1 \cos kt - k^2 C_2 \sin kt,$$

将 $\frac{d^2 x}{dt^2}$ 和 x 的表达式代入原方程, 得

$$-k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) + k^2(C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) \equiv 0.$$

故 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是原方程的解.

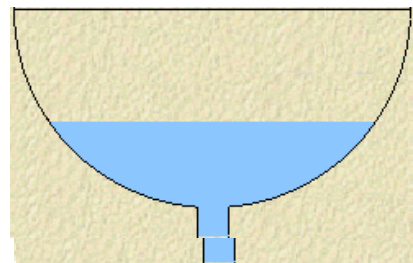
$$\because x|_{t=0} = A, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad \therefore C_1 = A, \quad C_2 = 0.$$

所求特解为 $x = A \cos kt$.

4 建立微分方程

例 5 有高为1米的半球形容器, 水从它的底部小孔流出, 小孔横截面积为1平方厘米(如图). 开始时容器内盛满了水, 水从小孔流出过程中容器里水面的高度 h (水面与孔口中心间的距离)随时间 t 变化, 试建立其微分方程.

解 由力学知识得, 水从孔口流



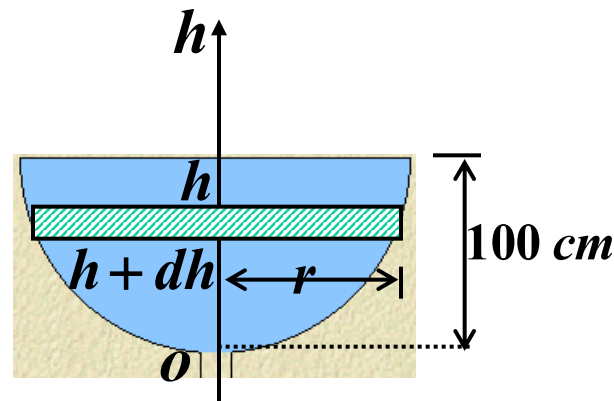
出的流量为

$$Q = \frac{dV}{dt} = 0.62 \cdot S \sqrt{2gh},$$

流量系数

孔口截面面积

重力加速度



$$\because S = 1 \text{ cm}^2, \quad \therefore dV = 0.62 \sqrt{2gh} dt, \quad (1)$$

设在微小的时间间隔 $[t, t + \Delta t]$,

水面的高度由 h 降至 $h + \Delta h$, $dV = -\pi r^2 dh$,

$$\because r = \sqrt{100^2 - (100 - h)^2} = \sqrt{200h - h^2},$$

$$\therefore dV = -\pi(200h - h^2)dh, \quad (2)$$

比较(1)和(2)得:

$$-\pi(200h - h^2)dh = 0.62\sqrt{2gh} dt,$$

即为未知函数的微分方程, 化简得

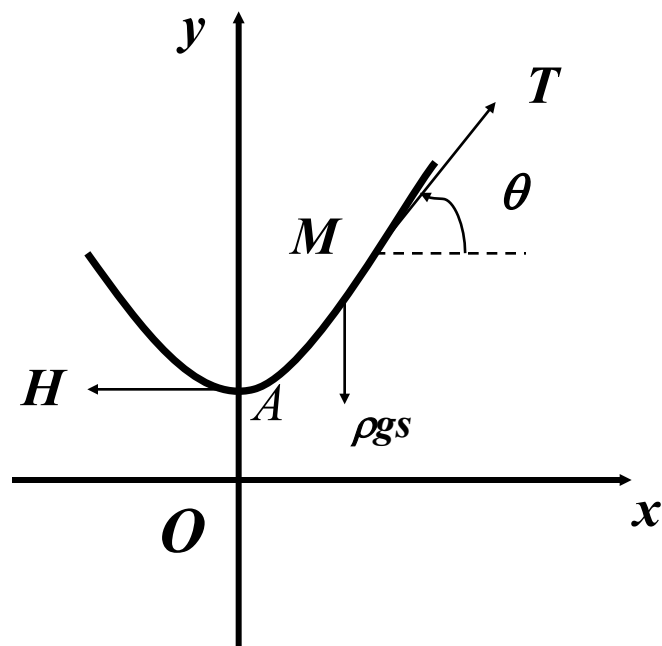
$$\begin{cases} dt = -\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}} (200\sqrt{h} - \sqrt{h^3})dh, \\ h|_{t=0} = 100. \end{cases}$$



例 6 设有一均匀、柔软的绳索，两端固定，绳索仅受重力的作用而下垂. 试建立在平衡状态下，绳索曲线的微分方程.

解 如图建立坐标系，设绳索曲线方程为 $y = y(x)$.

考虑绳索最低点 A 和其上任意点 $M(x, y)$ 之间的弧段 AM , 其长记为 s .



假设绳索的线密度为 ρ , 则弧 AM 的重量为 $\rho g s$. 由于绳索柔软, 故在每一点的张力平行于该点处的切线, 方向向外. 设弧 AM 在 A 点处的张力为 H , 在 M 点处的张力为 T , 且切线 MT 的倾角为 θ .

由于作用于弧段 AM 的外力相互平衡, 故

$$T \sin \theta = \rho g s \quad T \cos \theta = H.$$

两式相除, 并注意到 :

$$y' = \tan \theta, \quad s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

从而可得微积分方程 :

$$y' = \frac{1}{a} \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad \text{其中 } a = \frac{H}{\rho g}.$$

进一步, 两边对 x 求导, 得微分方程 :

$$y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2}.$$

设 $|OA|=a$, 则初始条件为:

$$y|_{x=0}=a, \quad y'|_{x=0}=0.$$

于是, 带初始条件的微分方程为

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2}, \\ y|_{x=0}=a, \quad y'|_{x=0}=0. \end{cases}$$

(悬链线方程)

5 小结与思考题

微分方程；微分方程的阶；微分方程的解；

通解；初始条件；特解；初值问题；积分曲线.

思考题

函数 $y = 3e^{2x}$ 是微分方程 $y'' - 4y = 0$ 的一个解吗？什么解？

思考题解答

$$\because y' = 6e^{2x}, \quad y'' = 12e^{2x},$$

$$y'' - 4y = 12e^{2x} - 4 \cdot 3e^{2x} = 0,$$

$\because y = 3e^{2x}$ 中不含任意常数,

故为微分方程的特解.

课堂练习题

一、 填空题:

1、 $2xy''' + y'' + 5x^2y = 10$ 是_____微分方程;

2、 $L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{c} = 0$ 是_____微分方程;

3、 $\frac{d\rho}{d\theta} + \rho^2 = \sin^2 \theta$ 是_____微分方程.

二、 确定函数关系式 $y = C_1 \sin(x - C_2)$ 所含的参数, 使其满足初始条件 $y|_{x=\pi} = 1, y'|_{x=\pi} = 0$.

三、设曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q , 且线段 PQ 被 y 轴平分, 试写出该曲线所满足的微分方程.

四、已知函数 $y = ae^x - be^{-x} + x - 1$, 其中 a, b 为任意常数, 试求函数所满足的微分方程 .

课堂练习题答案

- 一、1、三阶线性非齐次（单个）常；
2、二阶线性齐次（单个）常；
3、一阶非线性非齐次（单个）常。

二、 $C_1 = 1, C_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

三、 $yy' + 2x = 0$.

四、 $y'' - y = 1 - x$.