

第六章 定积分的应用

定积分在几何上的应用

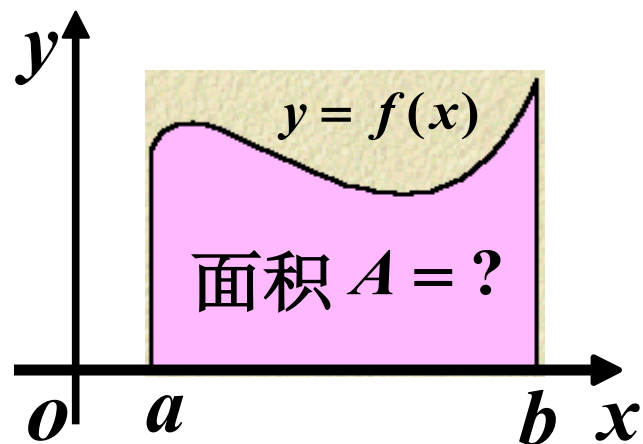
1 定积分的几何应用

1、微元法

引例 曲边梯形面积

曲边梯形由连续曲线
 $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$)、
 x 轴与两条直线 $x = a$ 、
 $x = b$ 所围成。

$$A = \int_a^b f(x) dx$$



面积表示为定积分的步骤如下

(1) 把区间 $[a, b]$ 分成 n 个长度为 Δx_i 的小区间
相应的曲边梯形被分为 n 个小窄曲边梯形, 第 i
个小窄曲边梯形的面积为 ΔA_i , 则 $A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i$.

(2) 计算 ΔA_i 的近似值

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i \quad \xi_i \in \Delta x_i$$

(3) 求和, 得 A 的近似值 $A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$.

(4) 求极限, 得 A 的精确值

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

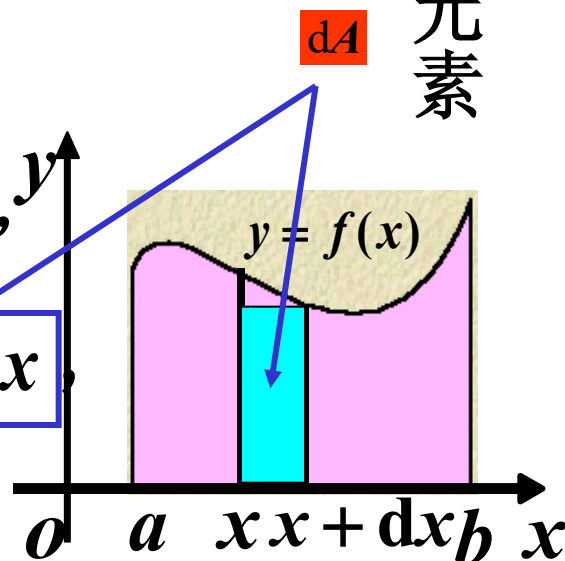
面积元素

提示 若用 ΔA 表示任一小区间

$[x, x + \Delta x]$ 上的窄曲边梯形的面积,

积, 则 $A = \sum \Delta A$, 并取 $\Delta A \approx f(x) dx$

于是 $A \approx \sum f(x) dx$



$$A = \lim \sum f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

一般地，当所求量 U 符合下列条件：

- (1) U 是与变量 x 的变化区间 $[a, b]$ 有关的量；
 - (2) U 对于区间 $[a, b]$ 具有可加性，即如果把区间 $[a, b]$ 分成许多部分区间，则 U 相应地分成许多部分量，而 U 等于所有部分量之和；
 - (3) 部分量 ΔU_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$ ；
- 就可以考虑用定积分来表达这个量 U 。

微元法的一般步骤:

- (1) 根据问题的具体情况, 选取一个变量例如 x 为积分变量, 并确定它的变化区间 $[a, b]$;
- (2) 把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间, 取其中任一小区间, 记为 $[x, x + dx]$, 求出该小区间对应的量 ΔU 的近似值. 若 ΔU 能近似地表为 $[a, b]$ 上的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 dx 的乘积, 就称 $f(x)dx$ 为所求量 U 的微元, 记作 dU , 即

$$dU = f(x)dx$$

(3) 以所求量 U 的微元 $f(x)dx$ 为被积表达式,
在区间 $[a,b]$ 上作定积分, 得

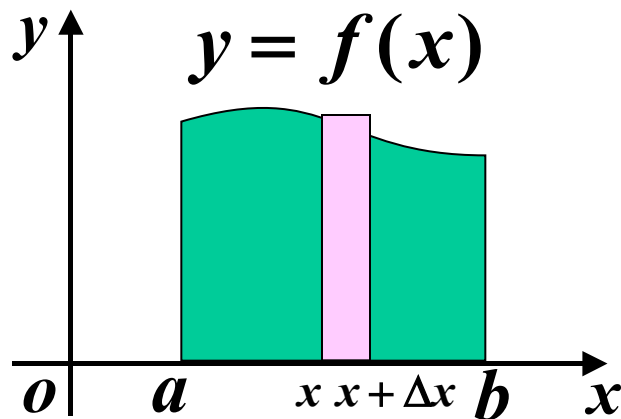
$$U = \int_a^b f(x)dx$$

此即为所求量 U 的积分表达式.

这个方法通常叫做**微元法**或**元素法**.

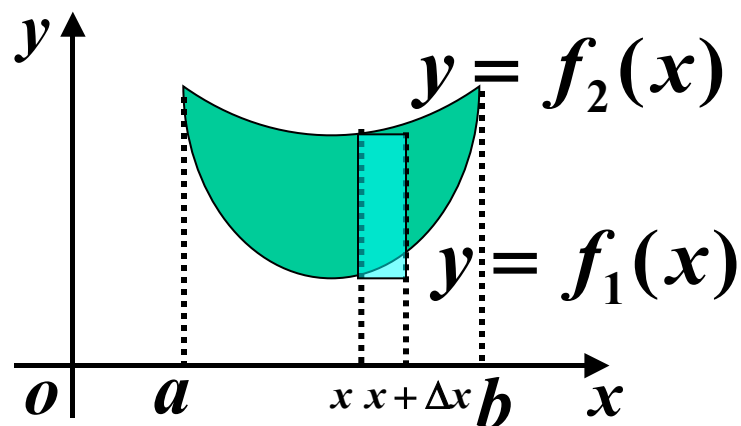
应用方向: 平面图形的面积; 体积; 平面曲线的弧长; 功; 水压力; 引力和平均值等.

2、直角坐标系情形



曲边梯形的面积

$$A = \int_a^b f(x) dx$$



曲边梯形的面积

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

例 1 计算由两条抛物线 $y^2 = x$ 和 $y = x^2$ 所围成的图形的面积.

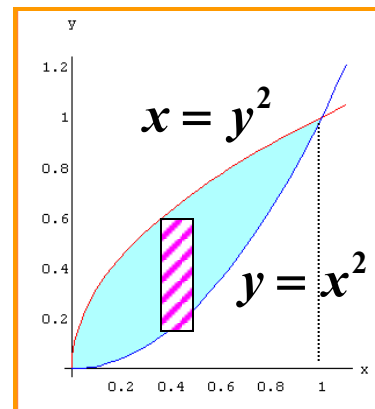
解 两曲线的交点

$(0,0)$ $(1,1)$

选 x 为积分变量 $x \in [0,1]$

面积元素 $dA = (\sqrt{x} - x^2)dx$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$



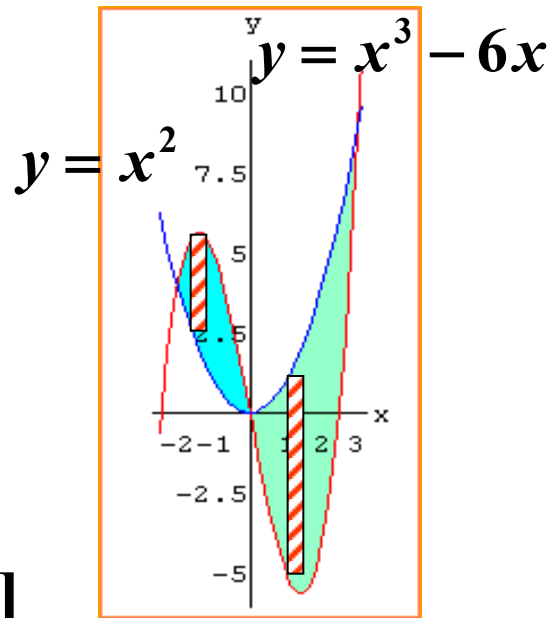
例 2 计算由曲线 $y = x^3 - 6x$ 和 $y = x^2$ 所围成的图形的面积.

解 两曲线的交点

$$\begin{cases} y = x^3 - 6x \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (0,0), (-2,4), (3,9).$$

选 x 为积分变量 $x \in [-2, 3]$



$$(1) \quad x \in [-2, 0], \quad dA_1 = (x^3 - 6x - x^2)dx$$

$$(2) \quad x \in [0, 3], \quad dA_2 = (x^2 - x^3 + 6x)dx$$

于是所求面积 $A = A_1 + A_2$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^0 (x^3 - 6x - x^2) dx + \int_0^3 (x^2 - x^3 + 6x) dx \\ &= \frac{253}{12}. \end{aligned}$$

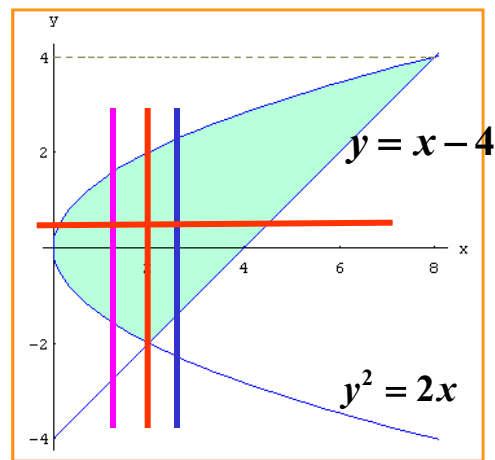
说明： 注意各积分区间上被积函数的形式.

问题： 积分变量只能选 x 吗？

例 3 计算由曲线 $y^2 = 2x$ 和直线 $y = x - 4$ 所围成的图形的面积.

解 两曲线的交点

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases} \Rightarrow (2, -2), (8, 4).$$



选 y 为积分变量 $y \in [-2, 4]$

$$dA = \left(y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) dy, \quad A = \int_{-2}^4 \left(y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) dy = 18.$$

3、参数方程情形

设曲边梯形的曲边为参数方程: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$

其中参数值 t 的变化范围在 t_1 和 t_2 之间, 且在

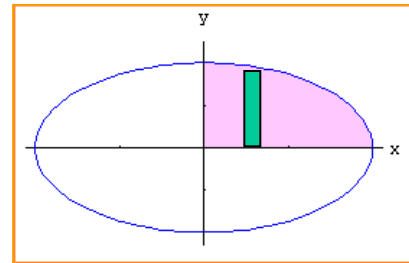
$[t_1, t_2]$ 上 $x = \varphi(t)$ 具有连续导数, $y = \psi(t)$ 连续.

则曲边梯形的面积

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

例 4 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的面积.

解 椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$



由对称性知总面积等于4倍第一象限部分面积.

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t d(a \cos t) \\ &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \pi ab. \end{aligned}$$

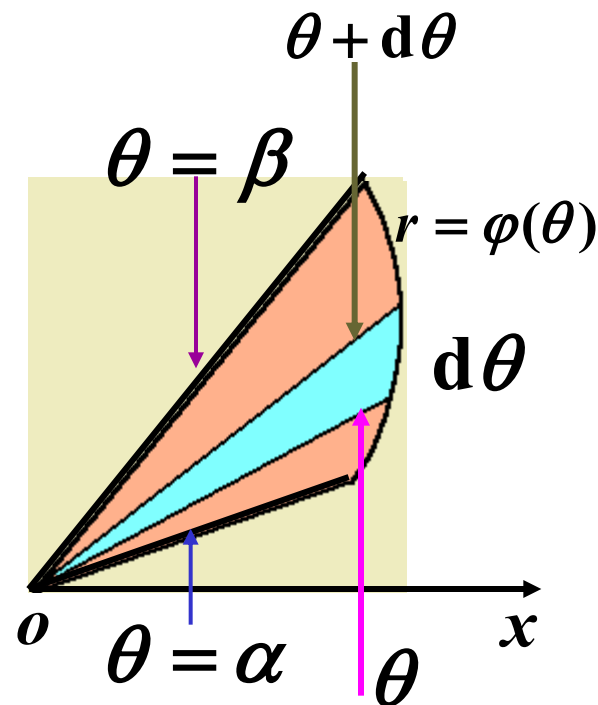
4、极坐标系情形

设由曲线 $r = \varphi(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha$ 、 $\theta = \beta$ 围成一曲边扇形，求其面积．这里， $\varphi(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，且 $\varphi(\theta) \geq 0$ ．

面积元素 $dA = \frac{1}{2} [\varphi(\theta)]^2 d\theta$

曲边扇形的面积

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi(\theta)]^2 d\theta.$$



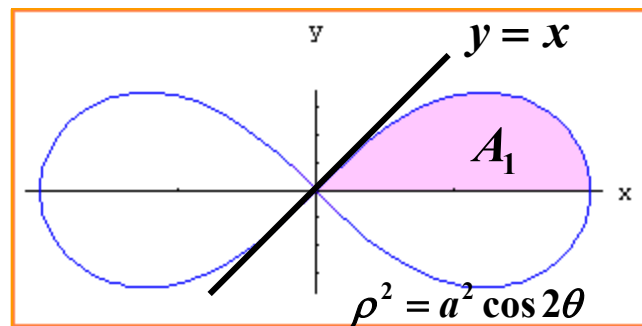
例 5 求双纽线 $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ 所围平面图形的面积.

解 由对称性知总面积=4倍第一象限部分面积

$$A = 4A_1$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta d\theta$$

$$= a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = a^2.$$

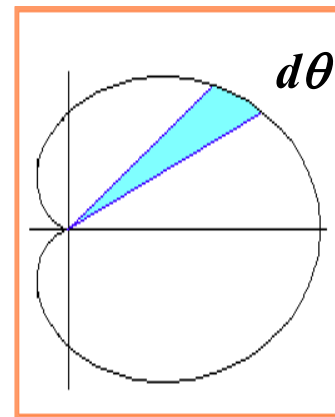


例 6 求心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 所围平面图形的面积($a > 0$).

解 $dA = \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta$

利用对称性知

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 d\theta \\ &= 4a^2 \int_0^\pi \cos^4 \frac{\theta}{2} d\theta \quad (t = \frac{\theta}{2}) \\ &= 8a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = 8a^2 \frac{3\pi}{16} = \frac{3}{2} \pi a^2. \end{aligned}$$



小结与思考题

求在直角坐标系下、参数方程形式下、极坐标系下平面图形的面积.

(注意恰当的**选择积分变量**有助于简化积分运算)

思考题

设曲线 $y = f(x)$ 过原点 $(0,0)$ 及 $(2,3)$ ，单调增加并连续可导. 过曲线上任一点 (x,y) 作两坐标轴的平行线，其中一条平行线与 x 轴及曲线围成的面积为另一条平行线与 y 轴及曲线围成的面积的 2 倍，求该曲线方程.

思考题解答

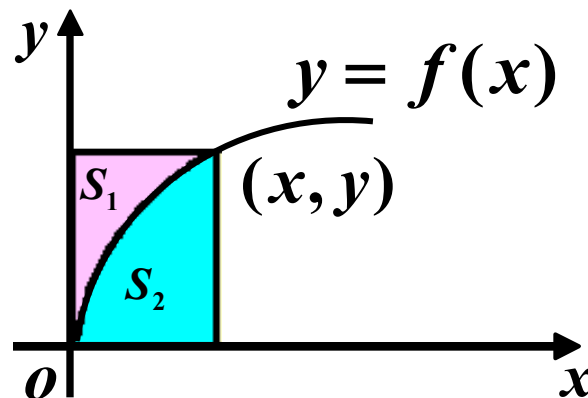
$$S_2 = 2S_1$$

$$\therefore S_2 = \int_0^x f(x)dx$$

$$S_1 = xy - S_2 = xy - \int_0^x f(x)dx$$

$$\therefore \int_0^x f(x)dx = 2[xy - \int_0^x f(x)dx]$$

$$\Rightarrow 3\int_0^x f(x)dx = 2xy, \quad \text{两边同时对 } x \text{ 求导}$$



$$3y = 2y + 2xy' \Rightarrow 2xy' = y$$

积分, 得 $y^2 = Cx$,

因为曲线 $y = f(x)$ 过点 $(2,3) \Rightarrow C = \frac{9}{2}$

$\therefore y^2 = \frac{9}{2}x$, 因为 $f(x)$ 为单调增加函数

所以, 所求曲线为:

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{2x}, \quad x \in [0,2].$$

课堂练习题

一、 填空题：

1. 由曲线 $y = \frac{1}{2}e^x$, $y = \frac{1}{2}e$ 及 y 轴所围成平面区域的面积是_____;

2. 由曲线 $y = 2 - x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成平面区域的面积是_____;

3. 由曲线 $y = x\sqrt{1-x^2}$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$ 所围成平面区域的面积是_____.

二、 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

1. $y = x^2$ 与直线 $y = x$ 及 $y = 2x$.

2. 求星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ 所围图形的面积.

*三、 设曲线 $y = x^2$ 与它的两条相互垂直的切线所围成的平面图形面积为 S , 其中一条切线的切点为 $A(a, a^2)$, ($a > 0$), 求 S , 并确定 a 的值使得面积 S 最小.

课堂练习题答案

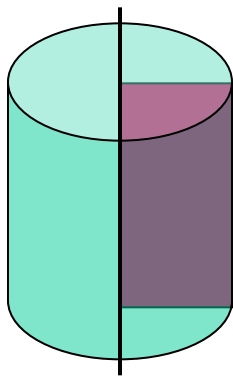
一、 1. $\frac{1}{2}$; 2. $\frac{9}{2}$; 3. 2.

二、 1. $\frac{7}{6}$; 2. $\frac{3}{8}\pi a^2$.

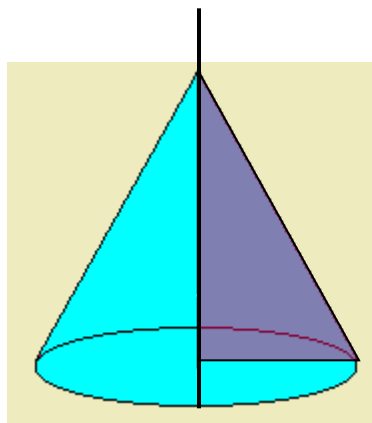
*三、 $a = \frac{1}{2}, S(a) = \frac{2}{3}a^3 \Big|_{a=\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}$.

5、旋转体的体积

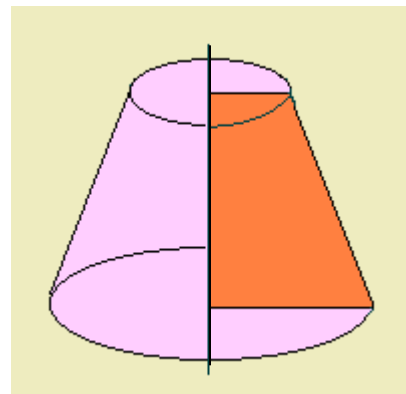
旋转体就是由一个平面图形饶这平面内一条直线旋转一周而成的立体. 这直线叫做**旋转轴**.



圆柱



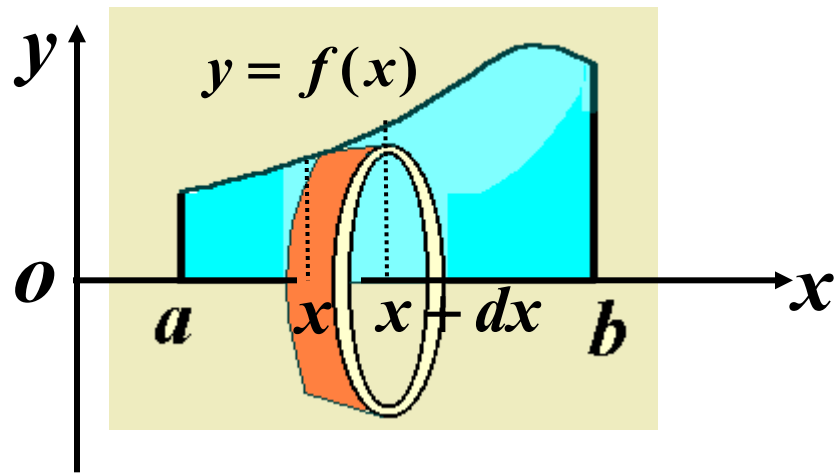
圆锥



圆台

一般地，如果旋转体是由连续曲线 $y = f(x)$ ，
直线 $x = a$ 、 $x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x
轴旋转一周而成的立体，体积为多少？

取积分变量为 x ， $x \in [a, b]$ ，在 $[a, b]$ 上
任取小区间 $[x, x + dx]$ ，
取以 dx 为底的窄边梯
形绕 x 轴旋转而成的薄
片的体积为体积元素，



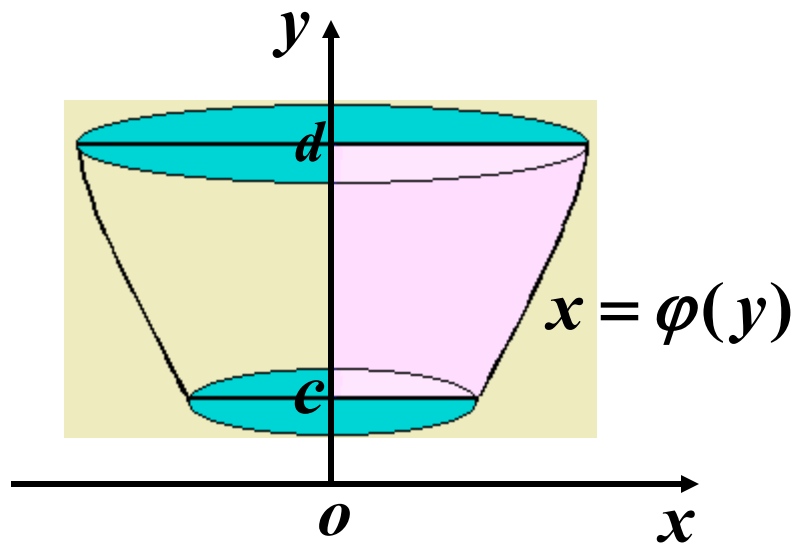
$$dV = \pi[f(x)]^2 dx$$

旋转体的体积为：

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

类似，若旋转体是由连续曲线 $x = \varphi(y)$ 、直线 $y = c$ 、 $y = d$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体，其体积为：

$$V = \int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 dy$$



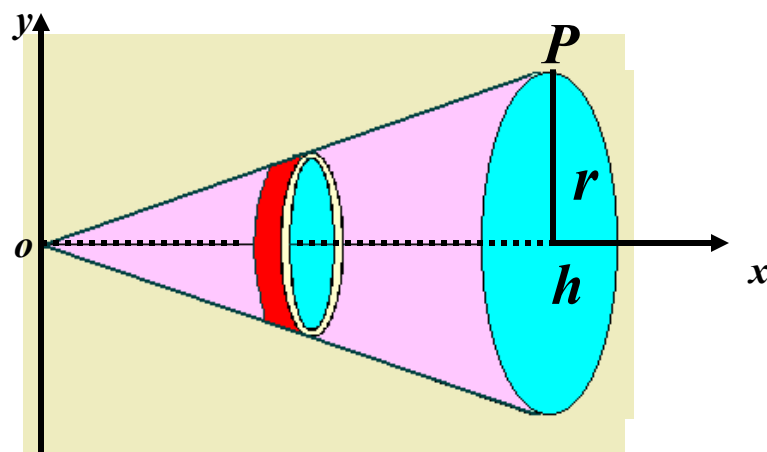
例 7 连接坐标原点 O 及点 $P(h, r)$ 的直线、直线 $x = h$ 及 x 轴围成一个直角三角形. 将它绕 x 轴旋转构成一个底半径为 r 、高为 h 的圆锥体, 计算圆锥体的体积.

解 直线 OP 方程为

$$y = \frac{r}{h}x$$

取积分变量为 x , $x \in [0, h]$

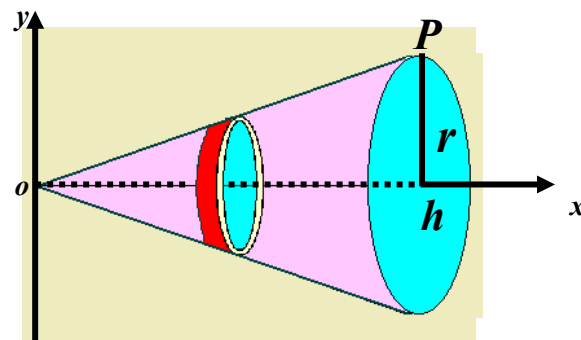
在 $[0, h]$ 上任取小区间 $[x, x + dx]$,



以 dx 为底的窄边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片的体积为

$$dV = \pi \left[\frac{r}{h} x \right]^2 dx$$

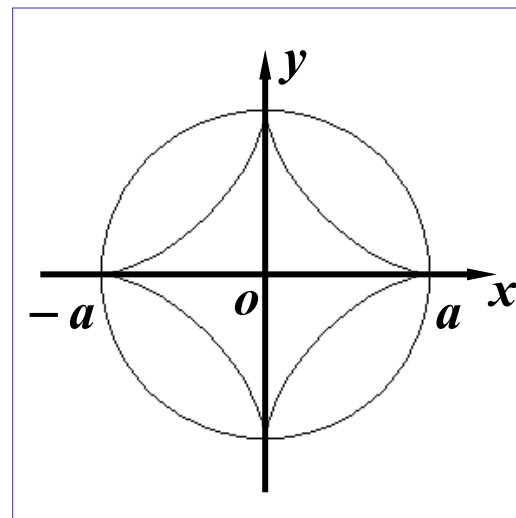
圆锥体的体积



$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

例 8 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$ 绕 x 轴旋转构成旋转体的体积.

$$\begin{aligned}\text{解1 } \because y^{\frac{2}{3}} &= a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}, \\ \therefore y^2 &= \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^3 \\ x &\in [-a, a]\end{aligned}$$



$$\text{旋转体的体积} \quad V = \int_{-a}^a \pi \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^3 dx = \frac{32}{105} \pi a^3.$$

解2 因星形线的参数方程为: $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$, 故

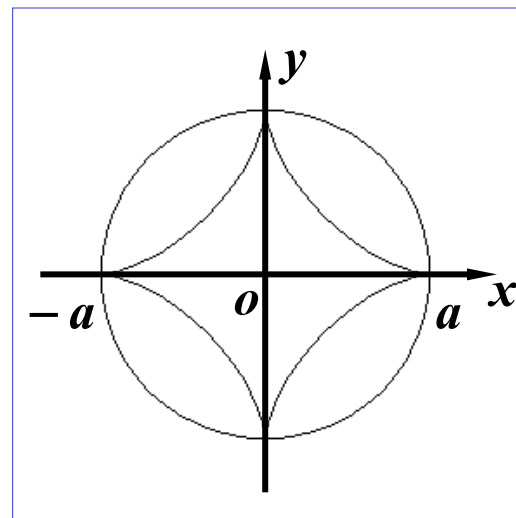
旋转体的体积

$$V = \int_{-a}^a \pi y^2 dx = 2\pi \int_0^a y^2 dx$$

$$= 6\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^7 t \cos^2 t dt$$

$$= 6\pi a^3 \left[\int_0^{\pi/2} \sin^7 t dt - \int_0^{\pi/2} \sin^9 t dt \right]$$

$$= 6\pi a^3 \left[\frac{6!!}{7!!} - \frac{8!!}{9!!} \right] = 6\pi a^3 \frac{6!!}{9!!} = \frac{32}{105} \pi a^3.$$



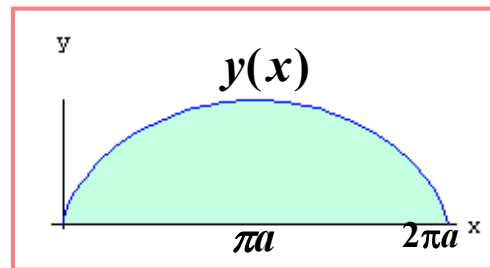
例 9 求摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 的一拱与 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、 y 轴旋转构成旋转体的体积.

解1 绕 x 轴旋转的旋转体体积

$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2(x) dx$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) dt$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) dt = 5\pi^2 a^3.$$



解2 绕 x 轴旋转的旋转体体积

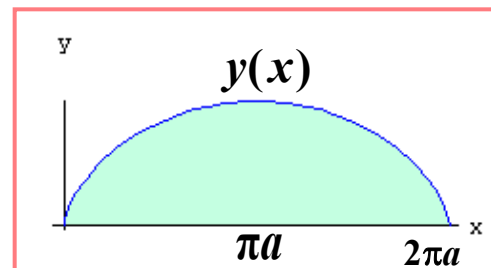
$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2(x) dx$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) dt$$

$$= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} dt \quad (t = 2u)$$

$$= 32\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6 u du$$

$$= 32\pi a^3 \frac{5!!\pi}{6!!2} = 5\pi^2 a^3.$$

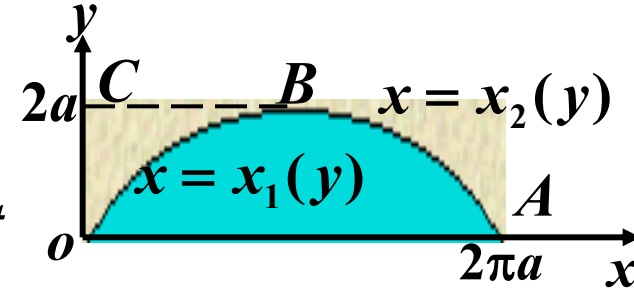


解3 绕y轴旋转的旋转体体积

可看作平面图 $OABC$ 与 OBC

分别绕y轴旋转构成旋转体的体积之差.

$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y) dy - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y) dy$$

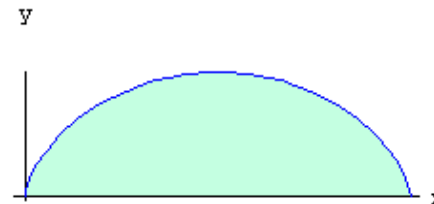
$$= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt - \pi \int_0^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt$$


$$= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt. \quad (t = u + \pi)$$

$$\begin{aligned}
 V_y &= \pi a^3 \int_{-\pi}^{\pi} (u + \pi + \sin u)^2 \sin u \, du \\
 &= \pi a^3 \int_{-\pi}^{\pi} [(u + \sin u)^2 + \pi^2 + 2\pi(u + \sin u)] \sin u \, du \\
 &= 4\pi^2 a^3 \left[\int_0^{\pi} u \sin u \, du + \int_0^{\pi} \sin^2 u \, du \right] \\
 &= 4\pi^2 a^3 \left[\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin u \, du + 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \, du \right] \\
 &= 4\pi^2 a^3 \left[\frac{\pi}{2} \cos u \Big|_{\pi}^0 + 2 \cdot \frac{\pi}{2!!2} \right] = 4\pi^2 a^3 \left[\pi + \frac{1}{2} \pi \right] \\
 &= 6\pi^3 a^3.
 \end{aligned}$$

补充： 如果旋转体是由连续曲线 $y = f(x)$ 、直线 $x = a$ 、 $x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体，体积为：

$$V_y = 2\pi \int_a^b |xf(x)| dx$$



上例解4

$$V_y = 2\pi \int_0^{2\pi a} |xf(x)| dx$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot a(1 - \cos t) d[a(t - \sin t)]$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt$$

作变换 $t = u + \pi$, 则 $dt = du$, 且

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi a^3 \int_{-\pi}^{\pi} (u + \pi + \sin u)(1 + \cos u)^2 du \\ &= 4\pi^2 a^3 \int_0^{\pi} (1 + \cos u)^2 du \\ &= 16\pi^2 a^3 \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{u}{2} du \quad (u = 2v) \\ &= 32\pi^2 a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^4 v dv \\ &= 32\pi^2 a^3 \frac{3!!\pi}{4!!2} = 6\pi^3 a^3. \end{aligned}$$

例 10 求由曲线 $y = 4 - x^2$ 及 $y = 0$ 所围成的图形绕直线 $x = 3$ 旋转构成旋转体的体积.

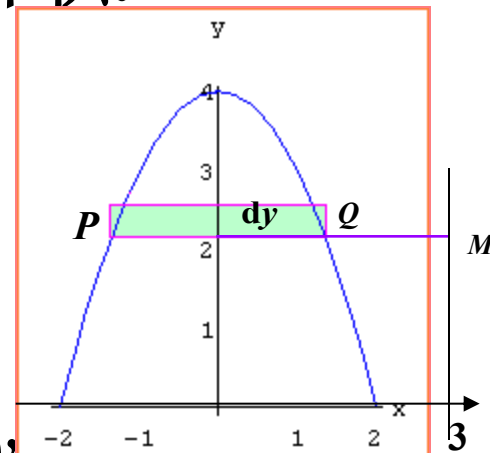
解 取积分变量为 y , $y \in [0, 4]$

体积元素为 $dV = [\pi \overline{PM}^2 - \pi \overline{QM}^2] dy$

$$= [\pi(3 + \sqrt{4 - y})^2 - \pi(3 - \sqrt{4 - y})^2] dy$$

$$= 12\pi\sqrt{4 - y} dy, \quad \therefore V = 12\pi \int_0^4 \sqrt{4 - y} dy$$

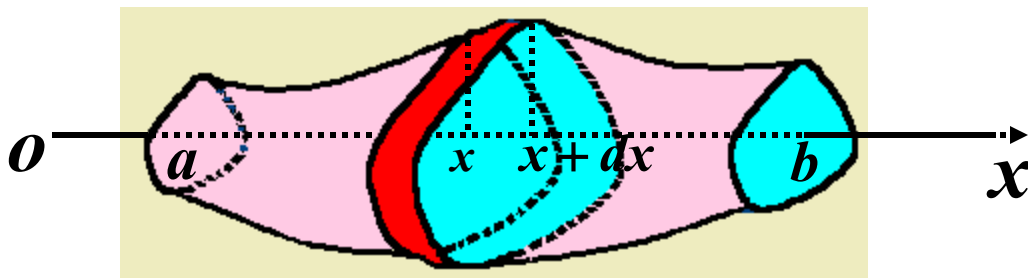
$$= -12\pi \int_0^4 \sqrt{4 - y} d(4 - y) = -8\pi(4 - y)^{3/2} \Big|_0^4 = 64\pi.$$



6、平行截面面积为已知的立体体积

如果一个立体不是旋转体，但却知道该立体上垂直于一定轴的各个截面面积，那么，这个立体的体积也可用定积分来计算。

$A(x)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积，



$A(x)$ 为 x 的已知连续函数

$$dV = A(x)dx,$$

立体体积

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

例 11 一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心，并与底面交成角 α ，计算这平面截圆柱体所得立体的体积。

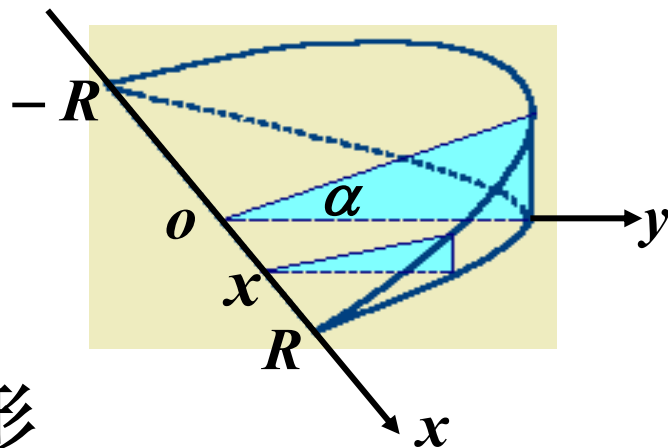
解 取坐标系如图

底圆方程为 $x^2 + y^2 = R^2$

垂直于 x 轴的截面为直角三角形

截面面积 $A(x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha,$

立体体积 $V = \frac{1}{2} \int_{-R}^R (R^2 - x^2) \tan\alpha dx = \frac{2}{3} R^3 \tan\alpha.$



例 12 求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.

解 取坐标系如图

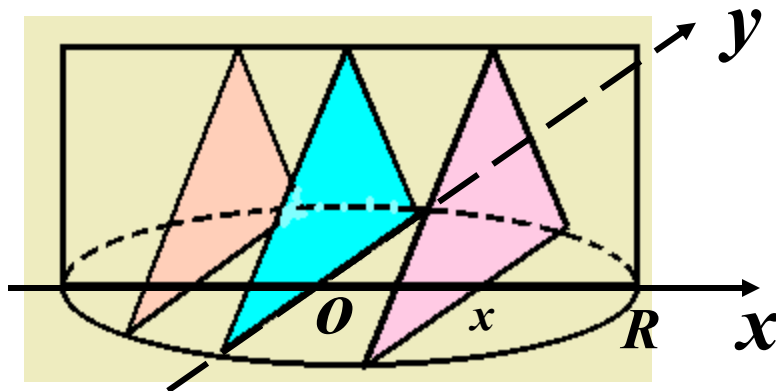
底圆方程为

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

垂直于 x 轴的截面为等腰三角形

截面面积 $A(x) = h \cdot y = h\sqrt{R^2 - x^2}$

立体体积 $V = h \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \pi R^2 h.$



小结与思考题

旋转体的体积 { 绕 x 轴旋转一周
绕 y 轴旋转一周
绕非轴直线旋转一周

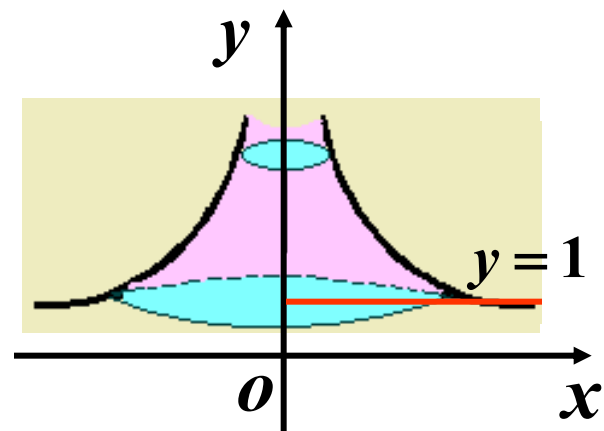
平行截面面积为已知的立体的体积

*思考题

求曲线 $xy = 4$, $y \geq 1$, $x > 0$ 所围成的图形绕 y 轴旋转构成旋转体的体积.

思考题解答

$$\begin{cases} xy = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{交点 } (4,1),$$



立体体积 $V_y = \pi \int_1^{+\infty} x^2 dy$

$$= \pi \int_1^{+\infty} \frac{16}{y^2} dy = \pi \left[-\frac{16}{y} \right]_1^{+\infty} = 16\pi.$$

课堂练习题

一、 填空题:

- 1、 由连续曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$ ($0 \leq a \leq b$) 及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周而成的立体的体积 $V_x =$ _____, 绕 y 轴旋转一周而成的立体的体积 $V_y =$ _____;
- 2、 $V = \int_a^b f(x)dx$ 常用来表示_____立体的体积;
- 3、 抛物线 $y^2 = 8x$ 及直线 $x = x_0$ ($x_0 > 0$) 所围成的图形绕 x 轴旋转而成的立体的体积_____;
- 4、 $y = a \cosh \frac{x}{a}$, $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转而成的立体的体积 $V =$ _____.

二、 有一铁铸件，它是由抛物线 $y = \frac{1}{10}x^2$, $y = \frac{1}{10}x^2 + 1$

与直线 $y = 10$ 围成的图形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体，算出它的质量（长度单位是厘米，铁的密度是 7.8 克/厘米³）。

三、 设直线 $y = ax + b$ 与直线 $x = 0$, $x = 1$ 及 $y = 0$ 所围成梯形面积等于 A ，试求 a, b 的值使这个梯形绕 y 轴旋转所得体积最小，并求这个体积值。

课堂练习题答案

一、 1、 $\pi \int_a^b f^2(x) dx,$ $2\pi \int_a^b |xf(x)| dx;$

2、 已知平行截面面积的;

3、 $4\pi x_0^2;$

4、 $\frac{\pi a^3}{4} [2 + \sinh 2].$

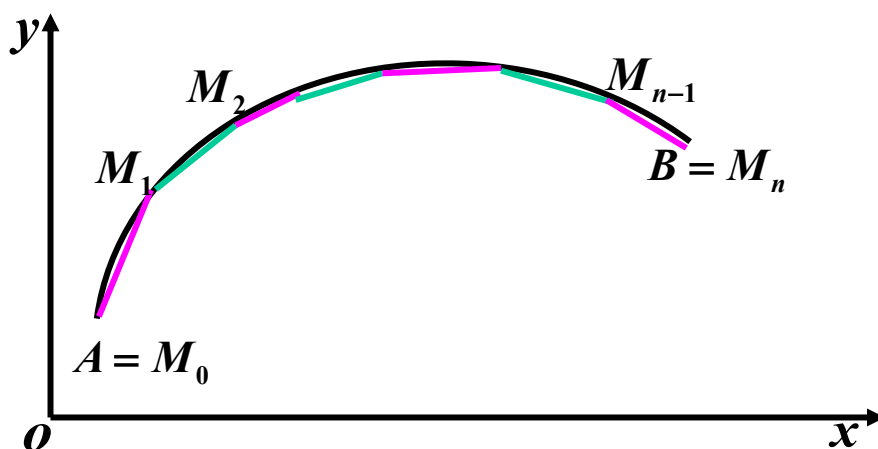
二、 741π (克).

三、 $a = 0, \quad b = A; \quad \pi A.$

7、平面曲线的弧长

设 A 、 B 是曲线弧上的两个端点，在弧上插入分点

$$A = M_0, M_1, \cdots M_i, \cdots, M_{n-1}, M_n = B$$



并依次连接相邻分点得一内接折线，当分点的数目

无限增加且每个小弧段都缩向一点时，此折现的

长 $\sum_{i=1}^n |M_{i-1}M_i|$ 的极限存在，则称此极限为曲线弧

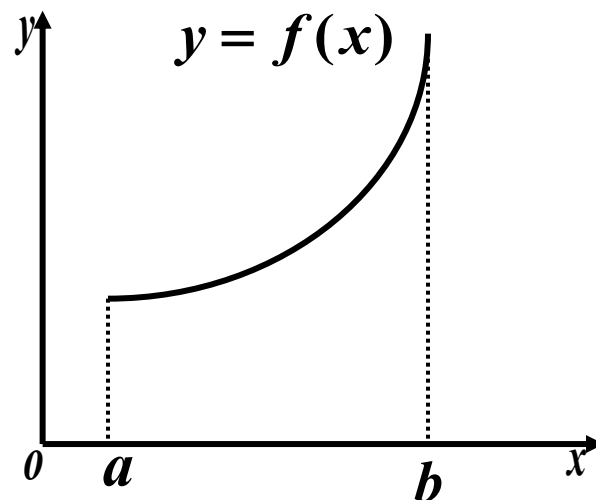
AB 的弧长.

设曲线弧 $y = f(x)$

$(a \leq x \leq b)$ ，其中

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有

一阶连续导数



取积分变量为 x ，在 $[a, b]$ 上任取小区间 $[x, x + dx]$ ，
以对应小切线段的长代替小弧段的长。

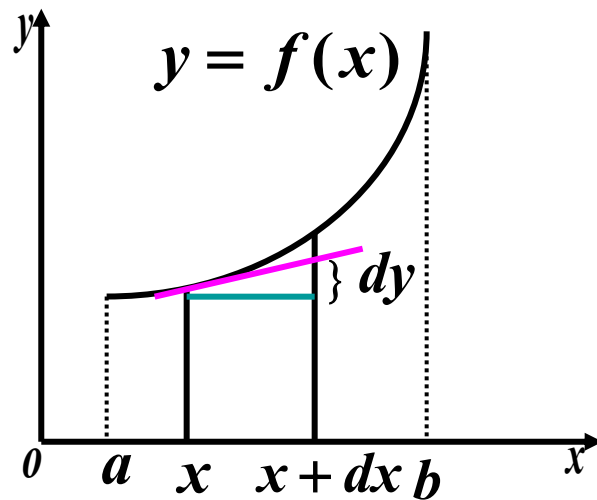
小切线段的长： $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$

弧长元素：

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

弧长公式：

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$



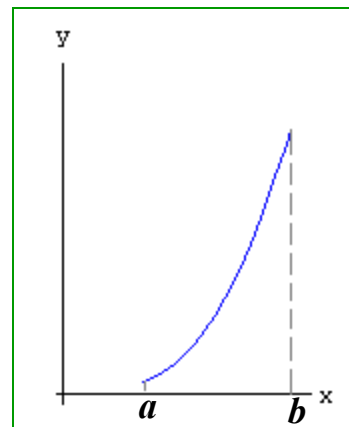
例 13 计算曲线 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 x 从 a 到 b 的一段弧的长度.

解 $\because y' = x^{\frac{1}{2}},$

$$\therefore ds = \sqrt{1 + (x^{\frac{1}{2}})^2} dx = \sqrt{1 + x} dx,$$

所求弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} [(1+b)^{\frac{3}{2}} - (1+a)^{\frac{3}{2}}].$$



例 14 计算曲线 $y = \int_0^{\frac{x}{n}} n\sqrt{\sin \theta} d\theta$ 的弧长 ($0 \leq x \leq n\pi$).

解
$$y' = n \sqrt{\sin \frac{x}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \sqrt{\sin \frac{x}{n}},$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^{n\pi} \sqrt{1 + \sin \frac{x}{n}} dx$$

$$\underline{\underline{x = nt}} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin t} \cdot n dt$$

$$= n \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\sin \frac{t}{2}\right)^2 + \left(\cos \frac{t}{2}\right)^2 + 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} dt$$

$$= n \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2}\right) dt = 4n.$$

设曲线弧为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$

其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数.

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2](dt)^2} \\ &= \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt \end{aligned}$$

弧长公式:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt.$$

例 15 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$ 的全长.

解 星形线的参数方程为:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

根据对称性 $s = 4s_1$ → 第一象限部分的弧长

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin t \cos t dt = 6a.$$

例 16 证明正弦线 $y = a \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 的弧长
等于椭圆 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sqrt{1+a^2} \sin t \end{cases}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的周长.

证 设正弦线的弧长等于 s_1

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+a^2 \cos^2 x} dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{1+a^2 \cos^2 x} dx, \end{aligned}$$

设椭圆的周长为 s_2

$$s_2 = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

根据椭圆的对称性知

$$\begin{aligned} s_2 &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(\sin t)^2 + (1+a^2)(\cos t)^2} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{1+a^2 \cos^2 t} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{1+a^2 \cos^2 x} dx = s_1, \end{aligned}$$

故原结论成立.

设曲线弧为 $r = r(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$)

其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数.

$$\therefore \begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta \\ y = r(\theta) \sin \theta \end{cases} \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

$$\therefore ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} d\theta = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta,$$

弧长公式:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta.$$

例 17 求极坐标系下曲线 $r = a \left(\sin \frac{\theta}{3} \right)^3$ 的长.
($a > 0$) ($0 \leq \theta \leq 3\pi$)

解 $\because r' = 3a \left(\sin \frac{\theta}{3} \right)^2 \cdot \cos \frac{\theta}{3} \cdot \frac{1}{3} = a \left(\sin \frac{\theta}{3} \right)^2 \cdot \cos \frac{\theta}{3},$

$$\begin{aligned} \therefore s &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \left(\sin \frac{\theta}{3} \right)^6 + a^2 \left(\sin \frac{\theta}{3} \right)^4 \left(\cos \frac{\theta}{3} \right)^2} d\theta \\ &= a \int_0^{3\pi} \left(\sin \frac{\theta}{3} \right)^2 d\theta = 6a \int_0^{\pi/2} \sin^2 u du = \frac{3}{2} \pi a. \end{aligned}$$

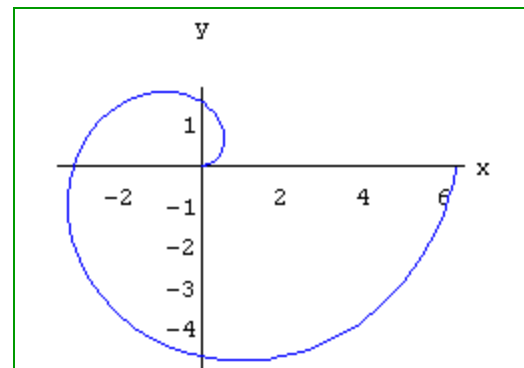
例 18 求阿基米德螺线 $r = a\theta$ ($a > 0$) 上相应于 θ 从 0 到 2π 的弧长.

解 $\because r' = a,$

$$\therefore s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta$$

$$= a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}).$$



小结与思考题

平面曲线弧长的概念

弧微分的概念

求弧长的公式 { 直角坐标系下
参数方程情形下
极坐标系下

思考题

闭区间 $[a, b]$ 上的连续曲线 $y = f(x)$
是否一定可求长?

思考题解答

不一定.

仅仅有曲线连续还不够, 必须保证曲线光滑才可求长.

课堂练习题

一、 填空题:

- 1、 由曲线 $y^3 = x^2$ 及 $y = \sqrt{2 - x^2}$ 所围成的平面图形的周长是_____.
- 2、 渐伸线 $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ 上相应于 t 从 0 变到 π 的一段弧长为_____.

- 二、 在摆线 $x = a (t - \sin t), y = a (1 - \cos t)$ 上求分
摆线第一拱成1:3的点的坐标.
- 三、 证明: 曲线 $y = \sin x (0 \leq x \leq 2\pi)$ 的弧长等于
椭圆 $x^2 + 2y^2 = 2$ 的周长.

课堂练习题答案

一、 1、 $\frac{26\sqrt{13}-16}{27} + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$;

2、 $\frac{a}{2}\pi^2$.

二、 $\left(\frac{a}{6}(4\pi-3\sqrt{3}), \frac{3}{2}a\right)$.