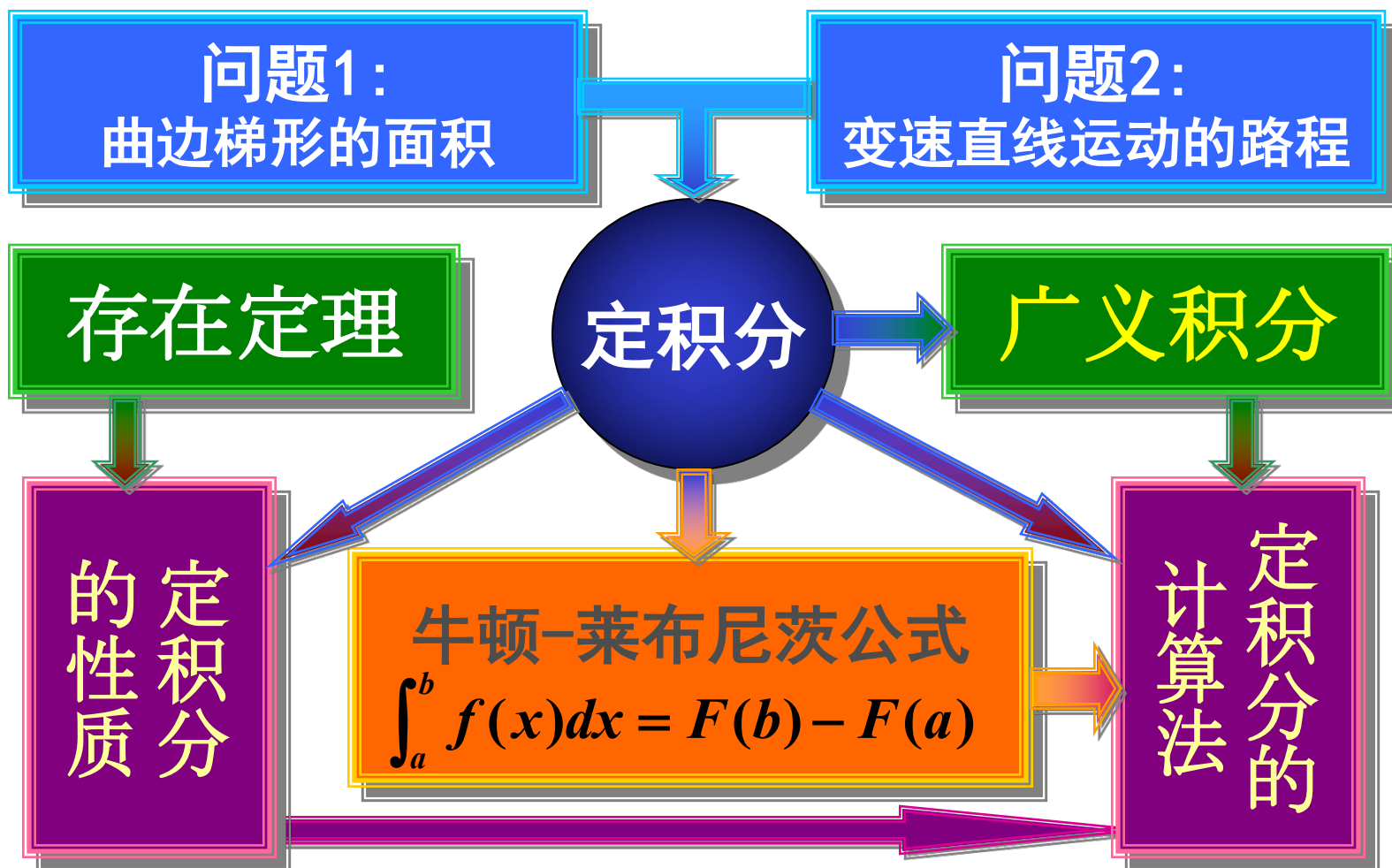


第五章 定积分

复 习

一、主要内容



1、问题的提出

实例1 （求曲边梯形的面积A）

曲边梯形由连续曲线 $y = f(x) (f(x) \geq 0)$ 、 x 轴与两条直线 $x = a$ 、 $x = b$ 所围成.

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

实例2 （求变速直线运动的路程）

设某物体作直线运动，已知速度 $v = v(t)$ 是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上 t 的一个连续函数，且 $v(t) \geq 0$ ，求物体在这段时间内所经过的路程 S 。

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i$$

方法:分割、求和、取极限.

2、定积分的定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 在 $[a, b]$ 中任意若干若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间,

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots [x_{n-1}, x_n],$$

各小区间的长度依次为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ($i = 1, 2, \cdots$),

在各小区间上任取一点 ξ_i ($\xi_i \in \Delta x_i$),

作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ ($i = 1, 2, \dots$) 并作和 $S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$,

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$, 如果不论对 $[a, b]$

怎样的分法, 也不论在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上点 ξ_i 怎样

的取法, 只要当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 和 S 总趋于确定的极限 I ,

我们称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分,

记为
$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

3、存在定理

可积的两个充分条件:

定理1 当函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续时, 称 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积.

定理2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积.

4、定积分的性质

性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

性质2 $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k 为常数)

性质3 假设 $a < c < b$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

性质4 $\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a$

性质5 如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$,

$$\text{则 } \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (a < b)$$

推论: (1) 如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$,

$$\text{则 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (a < b)$$

$$(2) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

性质6 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值及最小值,

则
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

性质7 (定积分中值定理)

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,

则在积分区间 $[a, b]$ 上至少存在一个点 ξ ,

使
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leq \xi \leq b)$$

积分中值公式

5、牛顿—莱布尼茨公式

定理1 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则积分上限的函数

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上具有导数, 且它的导数

是 $\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$

定理2 (原函数存在定理) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上

连续, 则积分上限的函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 就是

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数.

定理 3（微积分基本公式） 如果 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

也可写成 $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$.

牛顿—莱布尼茨公式

表明：一个连续函数在区间 $[a, b]$ 上的定积分等于它的任一原函数在区间 $[a, b]$ 上的增量。

6、定积分的计算法

(1) 换元法

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

换元公式

(2) 分部积分法

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

分部积分公式

7、广义积分

(1) 无穷限的广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

当极限存在时，称广义积分**收敛**；当极限不存在时，称广义积分**发散**。

(2) 无界函数的广义积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon' \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)dx$$

当极限存在时，称广义积分**收敛**；当极限不存在时，称广义积分**发散**.

二、典型例题

例1 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$.

解 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$$
$$= 2\sqrt{2} - 2.$$

例2 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}$.

解 由 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}$, 设 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}$,

$$\text{则 } I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = 0.$$

$$\text{故得 } 2I = \frac{\pi}{2}, \quad \text{即 } I = \frac{\pi}{4}.$$

例3 求 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx$.

解 令 $e^{-x} = \sin t$,

则 $x = -\ln \sin t, dx = -\frac{\cos t}{\sin t} dt$.

x	0	$\ln 2$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$

$$\text{原式} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos t \left(-\frac{\cos t}{\sin t} \right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例4 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2x dx$.

解 令 $2x = t$, $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2 \sin x \cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln \sin x + \ln \cos x) dx \quad (x = \frac{\pi}{2} - t)$$

$$= \frac{\pi}{4} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt$$

$$= \frac{\pi}{4} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \frac{\pi}{4} \ln 2 + 2I \quad \therefore I = -\frac{\pi}{4} \ln 2.$$

例5 求 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\sin x}{x^8 + 1} + \sqrt{\ln^2(1-x)} \right] dx$.

解 原式 $= 0 + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\ln(1-x)| dx$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^0 \ln(1-x) dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-x) dx$$
$$= \frac{3}{2} \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{1}{2}.$$

例6 求 $\int_{-2}^2 \min\{\frac{1}{|x|}, x^2\} dx$.

解 $\because \min\{\frac{1}{|x|}, x^2\} = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{|x|}, & |x| > 1 \end{cases}$ 是偶函数,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2 \int_0^2 \min\{\frac{1}{|x|}, x^2\} dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} + 2 \ln 2. \end{aligned}$$

例7 设 $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$, 求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$.

解 原式 $= \int_0^1 (x-1)^2 \left[\int_0^x e^{-y^2+2y} dy \right] dx$

$$= \left[\frac{1}{3} (x-1)^3 \int_0^x e^{-y^2+2y} dy \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} (x-1)^3 e^{-x^2+2x} dx$$
$$= -\frac{1}{6} \int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1} d[(x-1)^2]$$

令 $(x-1)^2 = u$ $-\frac{e}{6} \int_1^0 u e^{-u} du = \frac{1}{6} (e-2).$

例8 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^{\pi} \frac{xf(\sin x)}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{1 + \cos^2 x} dx.$$

证

$$\therefore \int_0^{\pi} \frac{xf(\sin x)}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{f(\sin x)}{1 + \cos^2 x} dx,$$

$$\text{又} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos x)}{1 + \sin^2 x} dx.$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \frac{f(\sin x)}{1 + \cos^2 x} dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{1 + \cos^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{f(\sin x)}{1 + \cos^2 x} dx.$$

$$\text{令 } x = \pi - t,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{f(\sin x)}{1 + \cos^2 x} dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos t)}{1 + \sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin x)}{1 + \cos^2 x} dx. \quad \text{得证}$$

例9 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$

证明:
$$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2.$$

证 作辅助函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \int_a^x \frac{dt}{f(t)} - (x-a)^2,$$

$$\because F'(x) = f(x) \int_a^x \frac{dt}{f(t)} + \int_a^x f(t)dt \cdot \frac{1}{f(x)} - 2(x-a)$$

$$= \int_a^x \frac{f(x)}{f(t)}dt + \int_a^x \frac{f(t)}{f(x)}dt - \int_a^x 2dt,$$

$$\because f(x) > 0, \quad \therefore \frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} \geq 2$$

$$\text{即 } F'(x) = \int_a^x \left(\frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} - 2 \right) dt \geq 0$$

$F(x)$ 单调增加.

$$\text{又 } \because F(a) = 0, \quad \therefore F(b) \geq F(a) = 0,$$

$$\text{即 } \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2.$$

例10 求下列广义积分:

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}; \quad (2) \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 - 2x - 1}}.$$

解 (1) 原式 = $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

$$(2) \quad \because \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x\sqrt{3x^2 - 2x - 1}} = \infty,$$

$\therefore x = 1$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 - 2x - 1}} \\ &= -\int_1^2 \frac{d(1 + \frac{1}{x})}{\sqrt{2^2 - (1 + \frac{1}{x})^2}} \\ &= -\arcsin \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{3}{4}. \end{aligned}$$



测 验 题

一、 选择题 (20 分):

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right) = (\quad)$
(A) 0; (B) 1/2; (C) $\pi/4$; (D) $\pi/2$.

2、 $\frac{d}{dx} \int_0^x \ln(t^2 + 1) dt = (\quad)$
(A) $\ln(x^2 + 1)$; (B) $\ln(t^2 + 1)$;
(C) $2x \ln(x^2 + 1)$; (D) $2t \ln(t^2 + 1)$.

3、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt = (\quad)$
(A) 0; (B) 1; (C) 1/3; (D) ∞ .

4、定积分 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$ 的值是 ()

(A) e ; (B) $1/2$; (C) $\sqrt{e}$; (D) 2 .

5、下列积分中，使用变换正确的是 ()

(A) $\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \sin^3 x}$, 令 $x = \arctan t$;

(B) $\int_0^3 x \sqrt[3]{9 - x^2} dx$, 令 $x = \sin t$;

(C) $\int_{-1}^2 \frac{x \ln(1 + x^2)}{1 + x^2} dx$, 令 $1 + x^2 = u$;

(D) $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$, 令 $x = t^{\frac{1}{3}}$.

6、下列积分中，值为零的是（ ）

(A) $\int_{-1}^1 x^2 dx$;

(B) $\int_{-1}^2 x^3 dx$;

(C) $\int_{-1}^1 dx$;

(D) $\int_{-1}^1 x^2 \sin x dx$.

7、 已知 $f(0)=1$, $f(2)=3$, $f'(2)=4$,

则 $\int_0^2 x f''(x) dx =$ ()

(A) 12; (B) 6; (C) 7; (D) 8.

8、 广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} =$ ()

(A) $\ln 4$; (B) 0; (C) $\frac{1}{3} \ln 4$; (D) 发散.

9、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0 \end{cases}$ ，则定积分 $\int_0^4 f(x-2)dx = (\quad)$

(A) $\ln \frac{3(1+e^2)}{2}$; (B) $2 - \ln(1+e^2) + \ln 3$;

(C) $1 + \ln(1+e^{-1}) + \ln 2$; (D) $1 - \ln(1+e^{-1})$.

10、广义积分 $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} = (\quad)$

(A) $1 - \ln 3$; (B) $\frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$; (C) $\ln 3$; (D) 发散.

二、(10 分) 证明不等式:

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \leq \frac{\pi}{6}, (n \geq 2).$$

三、(10 分) 求下列函数的导数:

1、 $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}};$

2、由方程 $\int_0^y e^{t^2} dt + \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = 1$ 确定 y 为 x 函数,

求 $\frac{dy}{dx}.$

四、(40 分) 求下列定积分:

$$1、\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})};$$

$$2、\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$3、\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx;$$

$$4、\int_{-2}^5 |x^2-2x-3| dx;$$

$$5、\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+2^{\frac{1}{x}}};$$

$$6、\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9};$$

$$7、\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}};$$

$$8、\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$$

五、 (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, $f(0) = 0$, 且 $0 < f'(x) \leq 1$, 试证:

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq \int_0^1 [f(x)]^3 dx.$$

六、 (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶连续导数, 证明:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} [f(0) + f(1)] - \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x) f''(x) dx.$$



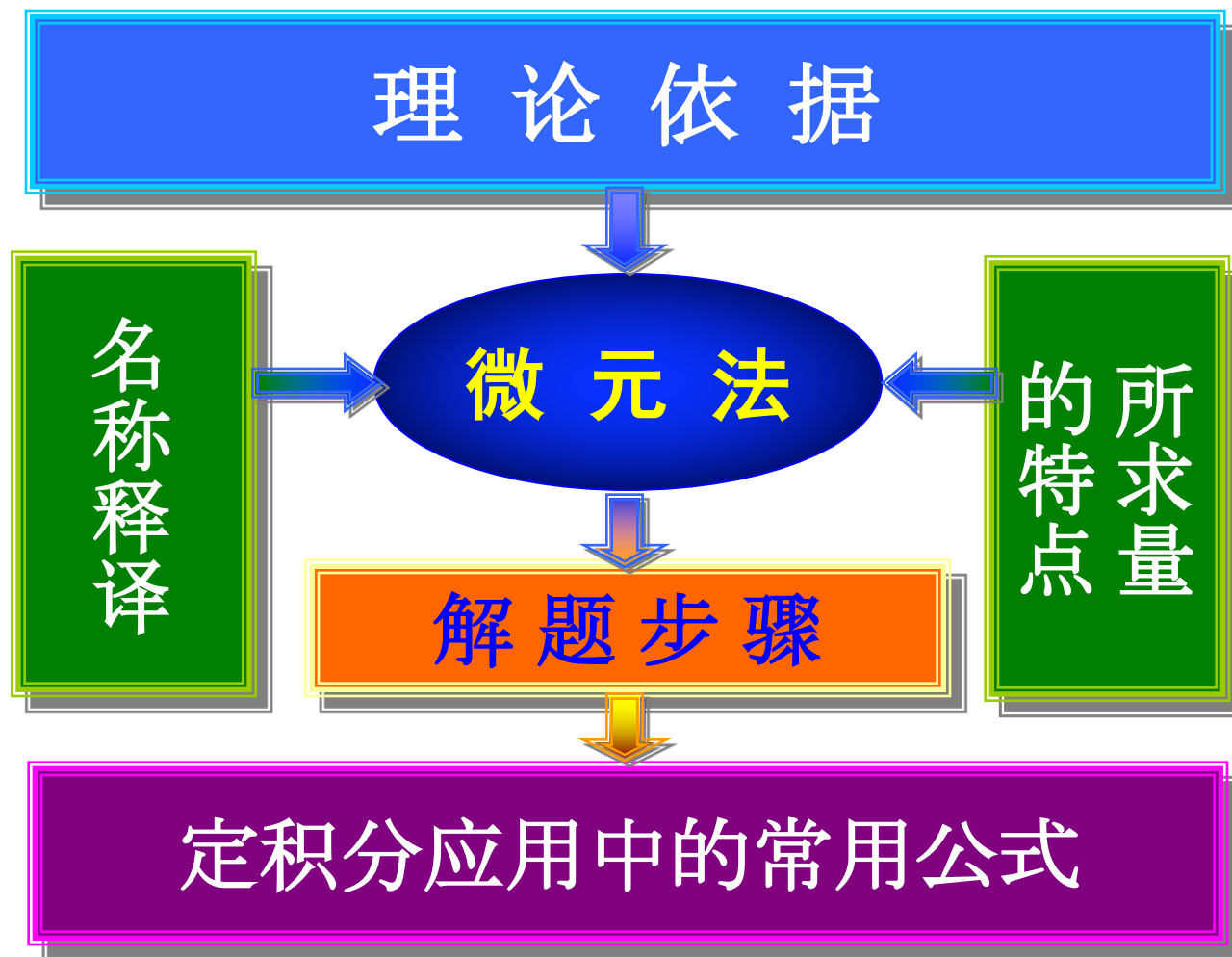
测验题答案

一、 1、 C; 2、 A; 3、 C; 4、 D; 5、 C;
6、 D; 7、 B; 8、 C; 9、 A; 10、 D.

三、 1、 $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$; 2、 $2e^{-y^2} \sin x^2 \operatorname{sgn} x$.

四、 1、 $2\ln \frac{4}{3}$; 2、 $\frac{\pi}{4}$; 3、 $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$; 4、 $\frac{71}{3}$;
5、 1; 6、 $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; 7、 $\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{3}{4}$; 8、 π .

一、主要内容



1、理论依据

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则它的变上限积分

$$U(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1)$$

是 $f(x)$ 的一个原函数, 即 $dU(x) = f(x)dx$,
于是

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b dU = U(b) - U(a) \quad (2)$$

这表明连续函数的定积分就是 (1) 的微分的定积分.

2、名称释译

由理论依据 (2) 知, 所求总量 U 就是其微分 $dU = f(x)dx$ 从 a 到 b 的无限积累(积分):

$$U = \int_a^b f(x)dx$$

这种取微元 $f(x)dx$ 计算积分或原函数的方法称微元法.

3、所求量的特点

(1) U 是与一个变量 x 的变化区间 $[a, b]$ 有关的量；

(2) U 对于区间 $[a, b]$ 具有可加性，就是说，如果把区间 $[a, b]$ 分成许多部分区间，则 U 相应地分成许多部分量，而 U 等于所有部分量之和；

(3) 部分量 ΔU_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$ ；
就可以考虑用定积分来表达这个量 U 。

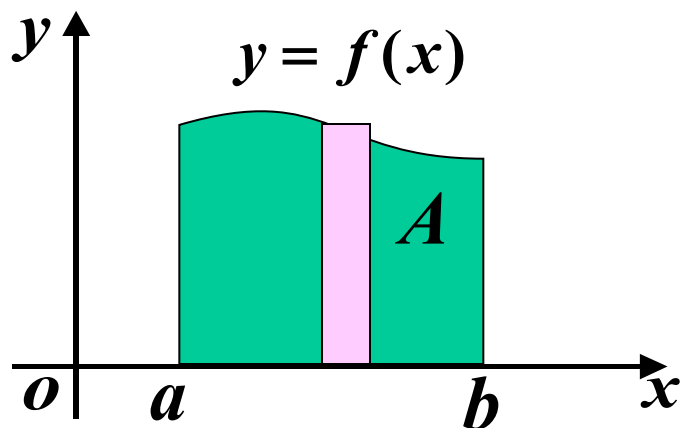
4、解题步骤

- 1) 根据问题的具体情况，选取一个变量例如 x 为积分变量，并确定它的变化区间 $[a, b]$;
- 2) 设想把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间，取其中任一小区间并记为 $[x, x + dx]$ ，求出相应于这小区间的部分量 ΔU 的近似值. 如果 ΔU 能近似地表示为 $[a, b]$ 上的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 dx 的乘积，就把 $f(x)dx$ 称为量 U 的元素且记作 dU ，即 $dU = f(x)dx$;
- 3) 以所求量 U 的元素 $f(x)dx$ 为被积表达式，在区间 $[a, b]$ 上作定积分，得 $U = \int_a^b f(x)dx$ ，即为所求量 U .

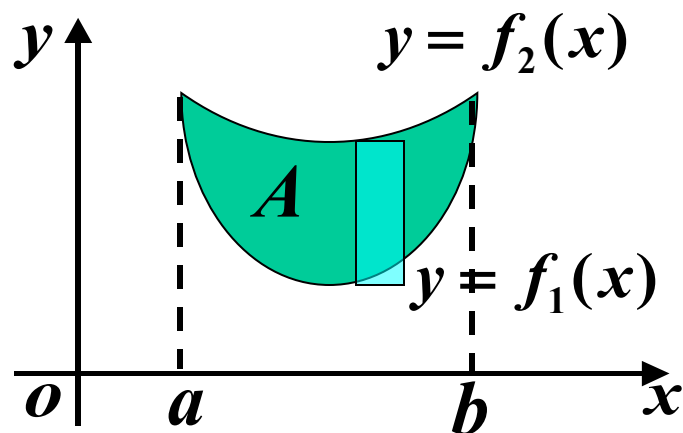
5、定积分应用的常用公式

(1) 平面图形的面积

直角坐标情形



$$A = \int_a^b f(x) dx$$



$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

参数方程所表示的函数

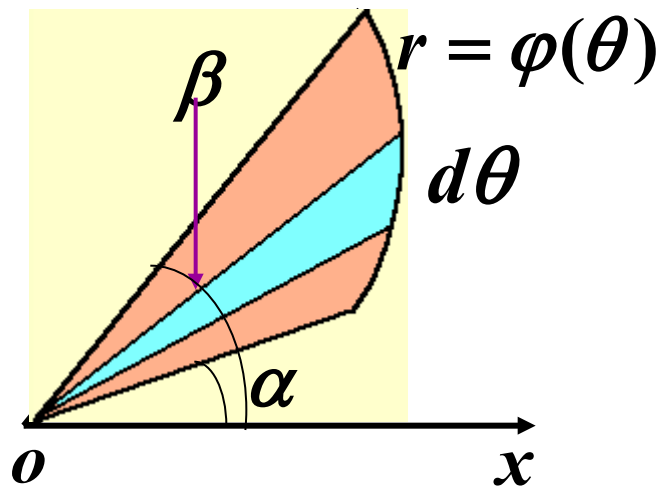
如果曲边梯形的曲边为参数方程
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

曲边梯形的面积
$$A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt$$

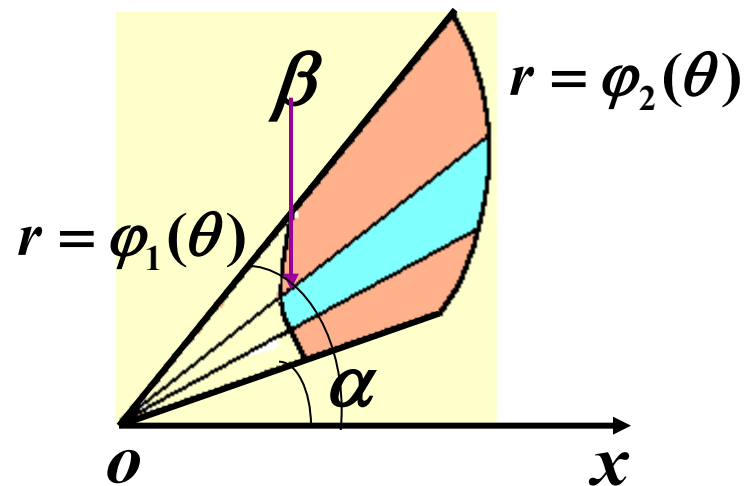
(其中 t_1 和 t_2 对应曲线起点与终点的参数值)

在 $[t_1, t_2]$ (或 $[t_2, t_1]$) 上 $x = \varphi(t)$ 具有连续导数,
 $y = \psi(t)$ 连续.

极坐标情形

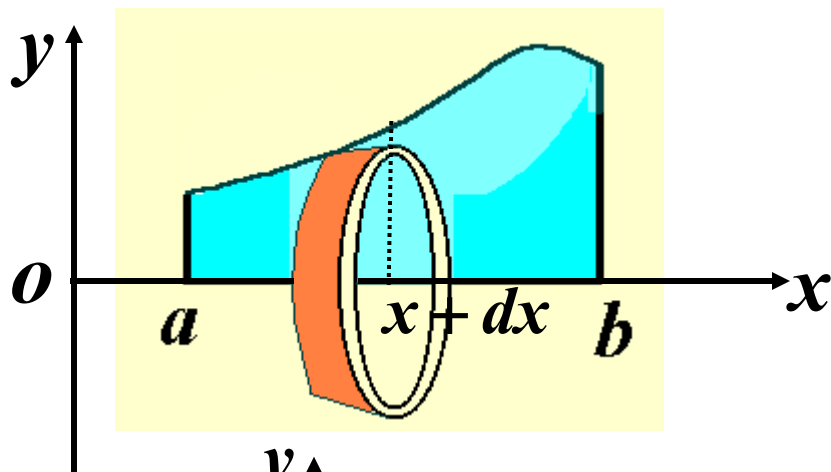


$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi(\theta)]^2 d\theta$$

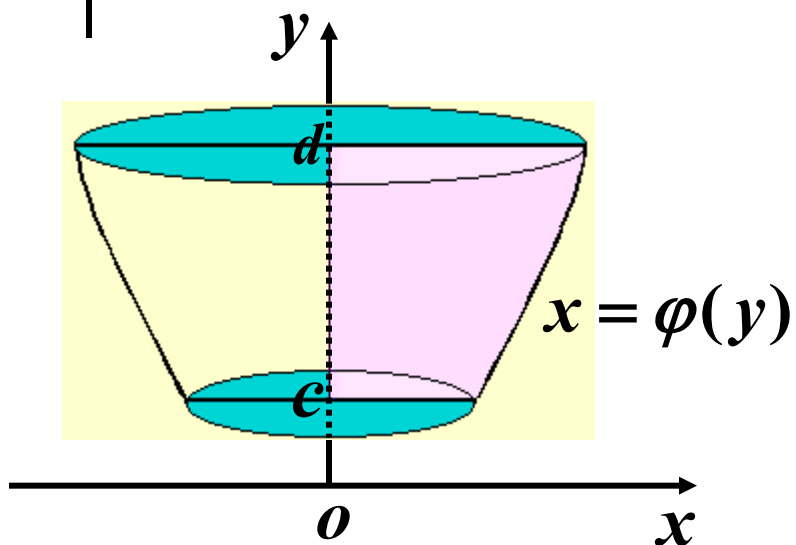


$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi_2^2(\theta) - \varphi_1^2(\theta)] d\theta$$

(2) 体积

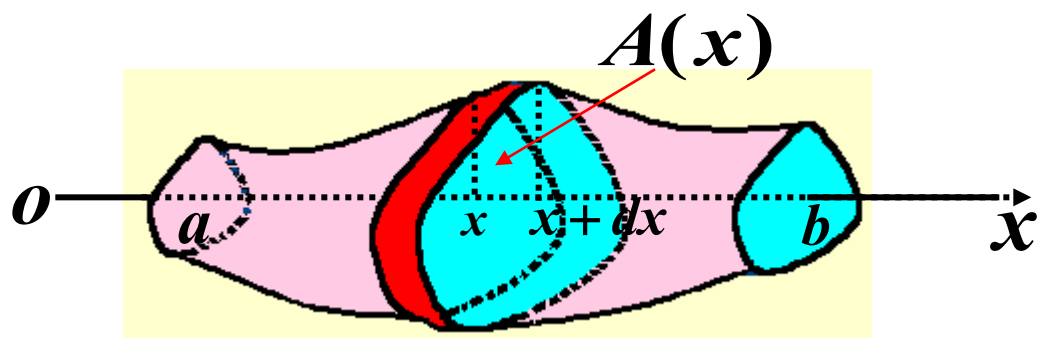


$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$



$$V = \int_c^d \pi [\varphi(y)]^2 dy$$

平行截面面积为已知的立体的体积

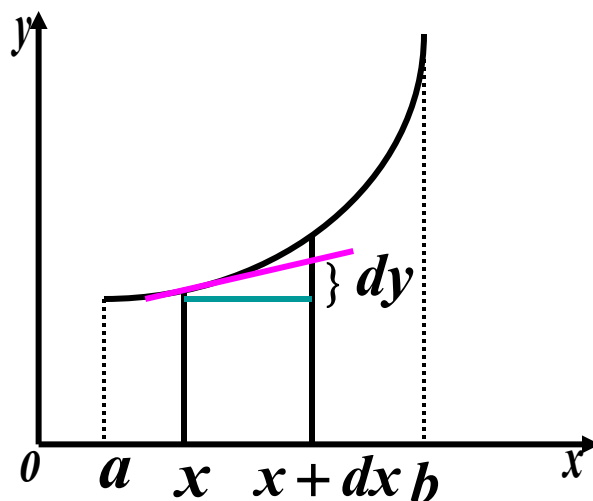


$$V = \int_a^b A(x) dx$$

(3) 平面曲线的弧长

A. 曲线弧为 $y = f(x)$

弧长 $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$



B. 曲线弧为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$

其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数

弧长 $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$

C. 曲线弧为 $r = r(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$)

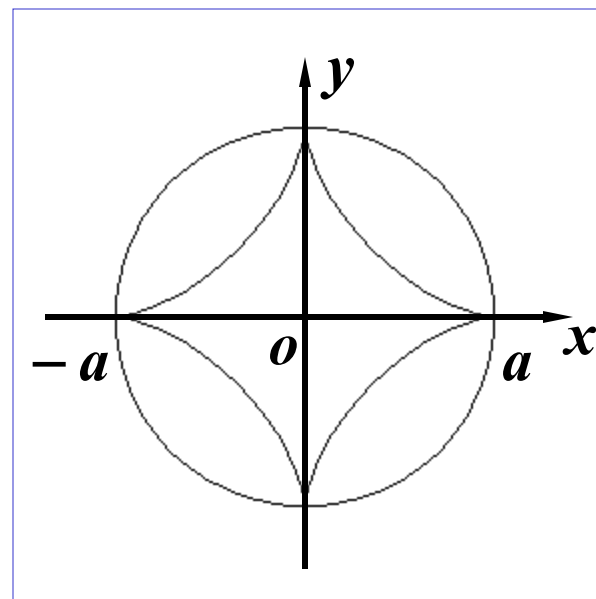
弧长 $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$

二、典型例题

例1 已知

星形线
$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (a > 0)$$

求它绕 x 轴旋转而成的旋转体的表面积.



解 由对称性,有旋转体侧面积

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^a 2\pi y \sqrt{1 + y_x'^2} dx \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \cdot 3a \cos t \sin t dt = \frac{12}{5} \pi a^2. \end{aligned}$$

另外,已知面积,弧长和旋转体积分别为

$$A = \frac{3}{8} \pi a^2; \quad L = 6a; \quad V = \frac{32}{105} \pi a^3.$$

测 验 题

一、 选择题（共 24 分）：

1、 曲线 $y = |\ln x|$ 与直线 $x = e^{-1}$, $x = e$ 及 $y = 0$ 所围成的区域的面积 $S = (\quad)$;

(A) $2(1 - e^{-1})$; (B) $e - e^{-1}$; (C) $e + e^{-1}$; (D) $e^{-1} + 1$.

2、 曲线 $r = \sqrt{2} \sin \theta$ 与 $r^2 = \cos 2\theta$ 所围图形公共部分的面积 $S = (\quad)$;

(A) $\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$; (B) $\frac{1}{24}\pi - \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3})$;

(C) $\frac{1}{12}\pi - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$; (D) $\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$.

3、曲线 $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$ 所围图形的面积 $S = (\quad)$;

(A) $\frac{3}{32} \pi a^2$; (B) $\frac{3}{8} \pi a^2$; (C) $\frac{1}{2} a^2$; (D) $\frac{1}{16} \pi a^2$.

4、由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 与旋转锥面 $x^2 + y^2 = 8z^2$ 之间包含 z 轴的部分的体积 $V = (\quad)$;

(A) 144π ; (B) 36π ; (C) 72π ; (D) 24π .

5、曲线 $y = x^2 - 2x + 4$ 上点 $M_0(0, 4)$ 处的切线 M_0T 与曲线 $y^2 = 2(x - 1)$ 所围图形的面积 $S = (\quad)$;

(A) $\frac{9}{4}$; (B) $\frac{4}{9}$; (C) $\frac{13}{12}$; (D) $\frac{21}{4}$.

6、用一平面截半径为 r 的球，设截得的部分球体高为 h ($0 < h < 2r$) 体积为 V ，则 $V = (\quad)$;

(A) $\frac{\pi h^2}{3}(2r - h)$; (B) $\frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$;

(C) $\pi h^2(2r - h)$; (D) $\frac{\pi h^2}{4}(3r - h)$.

7、曲线 $y = \frac{r}{h}x$, $0 \leq x \leq h$, 绕 x 轴旋转所得旋转体的侧面积 $S = (\quad)$;

(A) $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$; (B) $\pi h \sqrt{r^2 + h^2}$;

(C) $\frac{\pi r}{h} \sqrt{r^2 + h^2}$; (D) $2\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.

8、抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 自点 $(0, 0)$ 至点 $(\frac{p}{2}, p)$ 的一段曲线弧长 $L = (\quad)$;

- (A) $\frac{p}{2}[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] + p \ln p$; (B) $\frac{1}{p}[\frac{p}{2}\sqrt{2} + \frac{p^2}{2}\ln(1 + \sqrt{2})]$;
(C) $\frac{p}{2}[\sqrt{2} + \ln p(1 + \sqrt{2})]$; (D) $\frac{p}{2}[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$.

二、(10 分) 在区间 $[1, e]$ 内求一点 x_0 , 使 $y = \sqrt{\ln x}$, $y = 0$, $y = 1$ 及 $x = x_0$ 所围成两块面积之和为最小.

三、(12 分) 设曲边梯形是由连续曲线 $y = f(x) > 0$, x 轴与两直线 $x = a$, $x = b$ 所围成的, 求证: 存在直线 $x = \xi$ ($\xi \in (a, b)$) 将曲边梯形的面积平分.

四、(20 分) 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, (0 \leq t \leq 2\pi)$

1、绕 x 轴旋转一周所成曲面的面积；

2、绕 y 轴旋转一周所成曲面的面积。

五、(14 分) 有一旋转体，它由曲线 $y = \frac{1}{1+x^2}$ ， y 轴，

x 轴以及直线 $x=1$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转而成，已知其上任一点的体密度等于该点到旋转轴的距离，求它的质量。

测验题答案

一、 1、 A; 2、 D; 3、 B; 4、 D;
 5、 D; 6、 B; 7、 A; 8、 A .

二、 $x_0 = e^{\frac{1}{4}}$. 四、 1、 $\frac{64}{3}\pi a^2$; 2、 $16\pi^2 a^2$.

五、 $2\pi(1 - \frac{\pi}{4})$.