

# 第五章 定积分

## 第四讲：反常积分

# 1 积分区间无限的广义积分

设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有定义, 在  $[a, b]$  上可积. 若极限  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$  存在, 则称此极限为函数  $f(x)$  在无穷区间  $[a, +\infty)$  上的广义积分 (无穷积分), 记作

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

当极限存在时, 称广义积分收敛; 当极限不存在时, 称广义积分发散.

设  $f(x)$  在  $(-\infty, b]$  上有定义, 在  $[a, b]$  上可积,  
若极限  $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$  存在, 则称此极限为函数  $f(x)$

在无穷区间  $(-\infty, b]$  上的广义积分 (无穷积分),  
记作

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

当极限存在时, 称广义积分收敛; 当极限不存在  
时, 称广义积分发散.

一般地, 设函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上有定义, 若广义积分  $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$  和  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  都收敛, 则称上述两广义积分之和为函数  $f(x)$  在无穷区间  $(-\infty, +\infty)$  上的广义积分 (无穷积分), 记作

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x)dx\end{aligned}$$

极限存在称广义积分收敛; 否则称广义积分发散.

例1 计算广义积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

解 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\arctan x]_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} [\arctan x]_0^b$$

$$= -\lim_{a \rightarrow -\infty} \arctan a + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan b = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

例2 计算广义积分  $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx &= - \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= - \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\frac{2}{\pi}}^b \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \cos \frac{1}{x} \right]_{\frac{2}{\pi}}^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \cos \frac{1}{b} - \cos \frac{\pi}{2} \right] = 1. \end{aligned}$$

例 3 证明广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  当  $p > 1$  时收敛,  
当  $p \leq 1$  时发散.

证 (1)  $p = 1, \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{+\infty} = +\infty,$

$$(2) \quad p \neq 1, \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p < 1 \\ \frac{1}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

因此当  $p > 1$  时广义积分收敛, 其值为  $\frac{1}{p-1}$ ;

当  $p \leq 1$  时广义积分发散.

例 4 证明广义积分  $\int_a^{+\infty} e^{-px} dx$  当  $p > 0$  时收敛,  
当  $p \leq 0$  时发散.

证 当  $p=0$  时, 积分显然发散. 否则

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} e^{-px} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{-px} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{e^{-px}}{p} \right]_a^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{-pa}}{p} - \frac{e^{-pb}}{p} \right) = \begin{cases} \frac{e^{-ap}}{p}, & p > 0 \\ \infty, & p < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

即当  $p > 0$  时收敛, 当  $p \leq 0$  时发散.

## 无穷积分的审敛法

定理 1 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上连续,

且  $f(x) \geq 0$ . 若函数  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

在  $[a, +\infty)$  上有界, 则广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛.

证: 略.

定理1对于非负函数的无穷积分有下面的  
比较收敛原理.

定理 2 (比较审敛原理) 设函数  $f(x), g(x)$  在区  $[a, +\infty)$  上连续, 且  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ,  $(a \leq x < +\infty)$ , 则当无穷积分  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  收敛时,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  也收敛; 当无穷积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  发散时,  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  也发散.

证 设  $a < b < +\infty$ , 由  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  及  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  的收敛性, 得  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$ ,

即  $F(b) = \int_a^b f(x)dx$  在  $[a, +\infty)$  也上有上界. 由定理 1 可知, 积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛.

当积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  发散时, 显然  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  发散. 否则, 由上面的结果得  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛的矛盾.

定理 3（比较审敛法 1）设函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$ ,  $(a > 0)$  上连续，且  $f(x) \geq 0$ . 若存在常数

$M > 0$  及  $p > 1$ , 使得  $f(x) \leq \frac{M}{x^p}$  ( $a \leq x < +\infty$ ), 则

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛；若存在常数  $N > 0$ , 使得

$f(x) \geq \frac{N}{x}$  ( $a \leq x < +\infty$ ), 则  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  发散.

例 5 判别无穷积分  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$  的收敛性.

解  $\because 0 < \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{4/3}}, \quad p = \frac{4}{3} > 1,$

根据比较审敛法 1 ,

无穷积分  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$  收敛.

## 定理 4 (极限审敛法 1)

设函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  ( $a > 0$ ) 连续, 且  $f(x) \geq 0$ . 若存在常数  $p > 1$ , 使得极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x)$  存在, 则积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛; 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = d > 0$  或  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty$ , 则积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散.

例 6 判别广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$  的收敛性.

解  $\because \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = 1$ , 所给广义积分收敛.

例 7 判别广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx$  的收敛性.

解  $\because \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{x^{3/2}}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{x}}{1+x^2} = +\infty,$

根据极限审敛法 1, 所给广义积分发散.

例 8 判别广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$  的收敛性.

解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$

根据极限审敛法 1, 所给广义积分发散.

定理 5 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上连续, 若积分  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  收敛, 则  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  也收敛.

证 令  $\varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|)$ .

$$\because \varphi(x) \geq 0, \quad \text{且 } \varphi(x) \leq |f(x)|,$$

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ 收敛}, \quad \therefore \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \text{ 也收敛}.$$

$$\text{而 } f(x) = 2\varphi(x) - |f(x)|,$$

$$\therefore \int_a^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx - \int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ 收敛}.$$

满足定理 5 条件的广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  称为绝对收敛积分.

绝对收敛的广义积分必定收敛.

例 9 判别广义积分  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx$  ( $a > 0$ ) 的收敛性.

解  $\because |e^{-ax} \sin bx| \leq e^{-ax}$ , 而  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$  收敛.

$\therefore \int_0^{+\infty} |e^{-ax} \sin bx| dx$  收敛, 所以, 所给积分收敛.

## 2 被积函数无界的广义积分

设  $f(x)$  在  $(a, b]$  有定义, 在  $[a + \varepsilon, b]$  上可积 ( $\varepsilon > 0$ ), 在点  $a$  的右邻域无界. 若  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$  存在, 则称此极限为  $f(x)$  在区间  $(a, b]$  上的广义积分, 记作

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

当极限存在时, 称广义积分**收敛**; 当极限不存在时, 称广义积分**发散**.

设  $f(x)$  在  $[a, b)$  有定义, 在  $[a, b - \eta]$  上可积  $\eta > 0$ ,

在点  $b$  的左邻域无界. 若  $\lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} f(x) dx$  存在,

则称此极限为  $f(x)$  在  $[a, b)$  上的广义积分, 记作

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} f(x) dx.$$

当极限存在时, 称广义积分**收敛**; 当极限不存在时, 称广义积分**发散**.

一般地, 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上除一点  $c$  ( $a < c < b$ ) 外有定义, 而在点  $c$  的邻域内无界. 若两个广义积分  $\int_a^c f(x)dx$  和  $\int_c^b f(x)dx$  都收敛, 则定义

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{c+\eta}^b f(x)dx\end{aligned}$$

否则, 就称广义积分  $\int_a^b f(x)dx$  发散. 定义中  $c$  称为函数的**瑕点**, 所以, 此积分亦称**瑕积分**.

例10 计算广义积分  $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0).$

解  $\because \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = +\infty,$

$\therefore x = a$  为被积函数的无穷间断点.

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \arcsin \frac{x}{a} \right]_0^{a-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \arcsin \frac{a-\varepsilon}{a} - 0 \right] = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

例 11 证明广义积分  $\int_0^1 \frac{1}{x^q} dx$  当  $q < 1$  时收敛, 当  $q \geq 1$  时发散.

证 (1)  $q = 1$ ,  $\int_0^1 \frac{1}{x^q} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_0^1 = +\infty$ ,

$$(2) \quad q \neq 1, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^q} dx = \left[ \frac{x^{1-q}}{1-q} \right]_0^1 = \begin{cases} +\infty, & q > 1 \\ \frac{1}{1-q}, & q < 1 \end{cases}$$

因此当  $q < 1$  时广义积分收敛, 其值为  $\frac{1}{1-q}$ ;

当  $q \geq 1$  时广义积分发散.

例 12 计算广义积分  $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$ .

解 
$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x \ln x} \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [\ln(\ln x)]_{1+\varepsilon}^2 \\&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [\ln(\ln 2) - \ln(\ln(1 + \varepsilon))] \\&= \infty.\end{aligned}$$

故原广义积分发散.

例 13 计算广义积分  $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$ .  $x=1$  瑕点

解 
$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3 \cdot \sqrt[3]{2},$$

$$\therefore \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = 3(1 + \sqrt[3]{2}).$$

## 瑕积分的审敛法

### 定理 6（比较审敛法 2）

设函数  $f(x)$  在  $(a, b]$  上连续, 且  $f(x) \geq 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$$

若存在常数  $M > 1$  及  $q < 1$ , 使得

$$f(x) \leq \frac{M}{(x-a)^q} \quad (a < x \leq b),$$

则广义积分  $\int_a^b f(x) dx$  收敛;

若存在常数  $N > 0$  及  $q \geq 1$ , 使得

$$f(x) \geq \frac{N}{(x-a)^q} (a < x \leq b),$$

则广义积分  $\int_a^b f(x)dx$  发散.

定理 7 (极限审敛法 2)

设函数  $f(x)$  在区间  $(a, b]$  上连续, 且  $f(x) \geq 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty.$$

若存在常数  $0 < q < 1$ , 使得

$$\lim_{x \rightarrow a+0} (x-a)^q f(x)$$

存在, 则广义积分  $\int_a^b f(x)dx$  收敛;

若存在常数  $q \geq 1$ , 使得

$$\lim_{x \rightarrow a+0} (x-a)^q f(x) = d > 0 ,$$

则广义积分  $\int_a^b f(x)dx$  发散.

例14 判别广义积分  $\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$  的收敛性.

解  $\because$  被积函数在点  $x=1$  的左邻域内无界.

由洛必达法则知

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1) \frac{1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 > 0,$$

根据极限审敛法2, 所给广义积分发散.

例15 判别广义积分  $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$  的收敛性.

解  $\because \left| \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$  而  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  收敛,

根据比较审敛原理,  $\int_0^1 \left| \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \right| dx$  收敛,

从而,  $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$  也收敛.

## $\Gamma$ -函数

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$$

特点: 1. 积分区间为无穷;

2. 当  $s-1 < 0$  时被积函数在点  $x=0$  的右邻域内无界.

$$\text{设 } I_1 = \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx,$$

(1) 当  $s \geq 1$  时,  $I_1$  是常义积分; 当  $0 < s < 1$  时,

$$\because e^{-x} \cdot x^{s-1} = \frac{1}{x^{1-s}} \cdot \frac{1}{e^x} < \frac{1}{x^{1-s}},$$

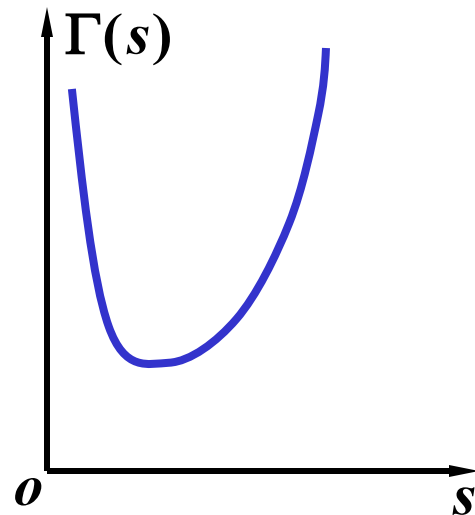
而  $1-s < 1$ , 根据比较审敛法 2,  $I_1$  收敛.

$$(2) \because \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot (e^{-x} x^{s-1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{s+1}}{e^x} = 0,$$

根据极限审敛法 1,  $I_2$  也收敛.

由 (1), (2) 知

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx, s > 0 \quad \text{收敛}.$$



## $\Gamma$ 函数的几个重要性质:

1、递推公式  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) (s > 0)$ .

2、当  $s \rightarrow +0$  时,  $\Gamma(s) \rightarrow +\infty$ .

3、余元公式  $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} (0 < s < 1)$

特别地,  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ .

4、在  $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$  中, 作代换  $x = u^2$ ,

有  $\Gamma(s) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2s-1} du$ .

### 3 小结与思考题

无穷限的广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

无界函数的广义积分（瑕积分） $\int_a^b f(x)dx$

（注意：不能忽略内部的瑕点）

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

## 思考题

积分  $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx$  的瑕点是哪几点？

## 思考题解答

积分  $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx$  可能的瑕点是  $x=0$ ,  $x=1$

$$\because \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1, \quad \therefore x=1 \text{ 不是瑕点,}$$

$$\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x-1} = \infty \quad \therefore x=0 \text{ 是瑕点,}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx \text{ 的瑕点是 } x=0.$$

## 课堂练习题

### 一、 填空题:

1、 广义积分  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$  在\_\_\_\_\_时收敛; 在\_\_\_\_\_时发散;

2、 广义积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} =$ \_\_\_\_\_;

3、 广义积分  $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$ \_\_\_\_\_;

4、 广义积分  $\int_{-\infty}^x f(t)dt$  的几何意义是\_\_\_\_\_.

二、判别下列各广义积分的收敛性，如果收敛，则计算广义积分的值：

1、 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$  (  $n$  为自然数 );

2、 $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$  ;

3、 $\int_0^1 \ln^n x dx$  .

三、求当  $k$  为何值时，广义积分  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$  收敛？

又  $k$  为何值时，这广义积分发散？

四、已知  $f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x, & 0 < x \leq 2 \\ 1, & 2 < x \end{cases}$ ，试表示  $\int_{-\infty}^x f(t)dt$  .

## 课堂练习题答案

一、1、 $k > 1, k \leq 1$ ;      2、发散;      3、1;

4、过点  $x$  平行于  $y$  轴的直线左边, 曲线  
 $y = f(x)$  和  $x$  轴所围图形面积的代数和.

二、1、 $n!$ ;      2、0;      3、 $(-1)^n n!$ .

三、当  $k < 1$  时收敛于  $\frac{1}{1-k}(b-a)^{1-k}$ ;      当  $k \geq 1$  时发散.

$$\text{四、} \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 < x \leq 2. \\ x-1, & 2 < x \end{cases}$$

## 课堂练习题

一、判别下列广义积分的收敛性

$$\begin{array}{ll} 1. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1}; & 2. \int_1^{+\infty} \sin \frac{dx}{x^2}; \\ 3. \int_1^2 \frac{dx}{(\ln x)^3}; & 4. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}}. \end{array}$$

二、用函数表示下列函数的积分，并指出这些积分的收敛范围：

$$1. \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx \quad (n > 0); \quad 2. \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx.$$

三、证明：  $\sqrt{\pi}\Gamma(2n) = 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n + \frac{1}{2})$ .

## 课堂练习题答案

- 一、 1、收敛；                      2、收敛；  
      3、发散(瑕点1)；            4、收敛(瑕点1, 2).

- 二、 1、  $\frac{1}{n} \Gamma(\frac{1}{n})$ ,  $n > 0$ ;  
      2、  $\Gamma(p+1)$ ,  $p > -1$ .

- 三、 提示：用递推公式和余元公式.