第五章 定积分

第三讲：定积分的计算方法

1　定积分法

1、换元积分法

定理3　　假设（1）$f(x)$在$[a,b]$上连续；

（2）函数$x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有连续导数；

（3）当t在区间$[\alpha,\beta]$上变化时，$x=\varphi(t)$的值在$[a,b]$上变化，且$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

证　设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a);$$

设$\Phi(t) = F[\varphi(t)]$，　$\because$

$$\Phi'(t) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

$\therefore \Phi(t)$是$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$的一个原函数，即

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

又 $\varphi(\alpha)=a$， $\varphi(\beta)=b$,

$$\Phi(\beta)-\Phi(\alpha) = F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$$

$$= F(b)-F(a),$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a) = \Phi(\beta)-\Phi(\alpha)$$

$$= \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

注意： 当$\alpha>\beta$时，换元公式仍成立.

应用换元公式时应注意:

（1）用 $x=\varphi(t)$ 把变量 x 换成新变量 t 时，积分限也相应的改变.

（2）求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后，不必象计算不定积分那样再要把 $\Phi(t)$ 变换成原变量 x 的函数，而只要把新变量 t 的上、下限分别代入 $\Phi(t)$ 然后相减就行了.

例1　计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$.

解　令 $t = \cos x$,　$dt = -\sin x dx$,

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0, \qquad x = 0 \Rightarrow t = 1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx = -\int_1^0 t^5 dt = \left.\frac{t^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

例2　计算定积分 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$.

解 $\because f(x)=\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}=|\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore \int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}|\cos x|(\sin x)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x(\sin x)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\sin x$$

$$=\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}(\sin x)^{\frac{5}{2}}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{5}.$$

例3 计算定积分 $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$.

解 原式 $\displaystyle = \int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$

$$= \int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}\sqrt{(1-\ln x)}} = 2\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d\sqrt{\ln x}}{\sqrt{1-(\sqrt{\ln x})^2}}$$

$$= 2\Big[\arcsin(\sqrt{\ln x})\Big]_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} = \frac{\pi}{6}.$$

例4 计算定积分 $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$, $(a>0)$.

解 令 $x = a\sin t$, $dx = a\cos t dt$,

$x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$,

原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos t dt}{a\sin t + \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{\sin t + \cos t} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}\right) dt$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\Big[\ln|\sin t + \cos t|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

引理 1　设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续，且有

① $f(x)$ 为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x;$$

② $f(x)$ 为奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

证　$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x,$$

在 $\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 中令 $x = -t$,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x,$$

①$f(x)$为偶函数，则 $f(-x) = f(x)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x;$$

②$f(x)$为奇函数，则 $f(-x) = -f(x)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

例5　计算定积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

解　原式 $\displaystyle=\int_{-1}^{1}\boxed{\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\boxed{\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}}\mathrm{d}x$

偶函数　　奇函数

$$=4\int_{0}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=4\int_{0}^{1}\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)}\mathrm{d}x$$

$$=4\int_{0}^{1}(1-\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x=4-\boxed{4\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x}$$

单位圆的面积

$$=4-\pi.$$

引理 2 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，证明

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x;$

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$

证 （1）设 $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t,$

$$x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.}$$

（2）设 $x = \pi - t \quad \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t,$

$$x = 0 \quad \Rightarrow t = \pi, \qquad x = \pi \quad \Rightarrow t = 0,$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t) f[\sin(\pi - t)]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$-\int_0^{\pi} tf(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$-\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x,$$

$$\therefore\ \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

例 6 计算定积分 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解 根据引理 2，定积分

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1+\cos^2 x} = -\frac{\pi}{2}\big[\arctan(\cos x)\big]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

思考题

指出求$\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$的解法中的错误，并写出正确的解法.

解 令 $x=\sec t$，$t:\frac{2\pi}{3}\to\frac{3\pi}{4}$，$\mathrm{d}x=\tan t\sec t\mathrm{d}t$，

$$\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sec t\cdot\tan t\mathrm{d}t}{\sec t\cdot\tan t}=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{12}.$$

思考题解答

计算中第二步是错误的.　　$\because x=\sec t$

$$t\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right],\quad \tan t<0,\quad \sqrt{x^2-1}=|\tan t|\neq\tan t.$$

正确解法是

$$\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}\overline{\overline{\;x=\sec t\;}}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sec t\cdot\tan t\,\mathrm{d}t}{\sec t\cdot|\tan t|}$$

$$=-\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{12}.$$

2、分部积分法

设函数$u(x)$、$v(x)$在区间$[a,b]$上具有连续导数，则有 $\int_a^b u\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$.

定积分的分部积分公式

推导 $(uv)' = u'v + uv'$, $\int_a^b (uv)'\mathrm{d}x = [uv]_a^b$,

$$[uv]_a^b = \int_a^b u'v\mathrm{d}x + \int_a^b uv'\mathrm{d}x,$$

$$\therefore \int_a^b u\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u.$$

例7 计算定积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \mathrm{d}x.$

解 令 $u=\arcsin x,\quad \mathrm{d}v=\mathrm{d}x,$

则 $\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},\quad v=x,$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \mathrm{d}x=\left[x\arcsin x\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$=\frac{\pi}{12}+\left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1.$$

例8 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$.

解 $\because 1+\cos 2x = 2\cos^2 x,$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\mathrm{d}x}{1+\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\mathrm{d}x}{2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2}\mathrm{d}(\tan x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\left[\ln\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}.$$

例9 计算定积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}\mathrm{d}x.$

解 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}\frac{1}{2+x}$

$$= -\left[\frac{\ln(1+x)}{2+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2+x}\mathrm{d}\ln(1+x)$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \boxed{\frac{1}{2+x}\cdot\frac{1}{1+x}}\mathrm{d}x \qquad \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + [\ln(1+x) - \ln(2+x)]_0^1 = \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3.$$

例 10 设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$

解 因为$\frac{\sin t}{t}$没有初等形式的原函数，无法直接求出$f(x)$，所以采用分部积分法：

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[x^2 f(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \mathrm{d}f(x) \\ &= \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$$\because\ f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,\quad f(1)=\int_1^1\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=0,$$

$$f'(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x=\frac{2\sin x^2}{x},$$

$$\therefore \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin x^2\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1\sin x^2\mathrm{d}x^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1).$$

引理 3　　证明定积分公式：

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}[1+(-1)^n]}}$$

证　设 $u = \sin^{n-1} x$，$\mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x$，

$$\mathrm{d}u = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x\mathrm{d}x,\quad v = -\cos x,$$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$，则

$$I_n = \underbrace{\left[-\sin^{n-1} x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} dx$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$ （积分I_n关于下标的递推公式）

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} \quad \cdots\cdots,$$ 直到下标减到0或1为止.

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0,$$

$$(m=1,2,\cdots)$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1,$$

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\qquad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1,$$

于是 $$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

思考题

设 $f''(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x$.

思考题解答

$$\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}f'(2x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[xf'(2x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}f'(2) - \frac{1}{4}\left[f(2x)\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4}\left[f(2) - f(0)\right] = 2.$$

3. 小结与思考题

定积分的换元法:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

几个特殊积分、定积分的几个等式.

思考题解答

$$\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}f'(2x)$$

$$= \frac{1}{2}\left[xf'(2x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}f'(2) - \frac{1}{4}\left[f(2x)\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4}\left[f(2) - f(0)\right] = 2.$$

课堂练习题一

一、 填空题：

1. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos(x-\frac{\pi}{3})\mathrm{d}x=$_____； 2. $\int_{0}^{\pi}(1-\sin^{3}\theta)\mathrm{d}\theta=$_____；

3. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(\arccos x)^{2}}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=$____； 4. $\int_{-5}^{5}\frac{x^{3}\sin^{2}x\mathrm{d}x}{x^{4}+2x^{2}+1}=$______.

二、 计算下列定积分：

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^{3}x}\mathrm{d}x$； 2. $\int_{-1}^{1}(x^{2}\sqrt{1-x^{2}}+x^{3}\sqrt{1+x^{2}})\mathrm{d}x$；

3. $\int_{0}^{2}\max\{x,x^{3}\}\mathrm{d}x$； 4. $\int_{0}^{2}x|x-\lambda|\mathrm{d}x$（ λ 为参数 ）.

三、证明：$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$，

并求 $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

四、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，证明

$$\int_{0}^{2\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x=4\int_{0}^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

五、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续，证明：

$$\int_{0}^{2\pi} f(\cos x)\mathrm{d}x=\begin{cases}4\int_{0}^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{为偶函数},\\ 0, & f(x)\text{为奇函数}.\end{cases}$$

课堂练习题一答案

一、1. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；　2. $\pi-\dfrac{4}{3}$；　3. $\dfrac{19}{324}\pi^3$；　4. 0.

二、1. $\dfrac{4}{3}$；　2. $\dfrac{\pi}{8}$；　3. $\dfrac{17}{4}$；

4. $$\int_0^2 x\,|x-\lambda|\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{8}{3}-2\lambda, & \lambda\le 0,\\ \dfrac{8}{3}-2\lambda+\dfrac{1}{3}\lambda^3, & 0<\lambda<2,\\ -\dfrac{8}{3}+2\lambda, & \lambda\ge 20.\end{cases}$$

三、2.　　四、提示：先令 $x=u+\pi$，再令 $u=t+\dfrac{\pi}{2}$.

课堂练习题二

一、 填空题：

1. 设 n 为正奇数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x =$ ______；

2. 设 n 为正偶数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x =$ ______；

3. $\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x =$ ______；4、$\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x =$ ______；

5. $\int_0^1 x\,\mathrm{arccot}\,x\mathrm{d}x =$ ______.

二、 计算下列定积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)f''(x)\mathrm{d}x \text{，其中 } f(x)=\tan^2 x.$$

三、设 $f''(x)$ 在 $[0,\pi]$ 连续， $f(0)=2$, $f(\pi)=1$,计算

$$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x$$

。.

课堂练习题二答案

一、 1. $\dfrac{(n-1)!!}{n!!}$;　　　2. $\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$;

3. $2-5\mathrm{e}^{-1}$;　　4. $\dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)$;　　5. $\dfrac{1}{2}$.

二、 8;　　　三、 3.

*4　定积分的近似计算法

1、定积分近似计算的理由：

(1)　被积函数的原函数不能用初等函数表示；

(2) 被积函数难于用公式表示，而是用图形或表格给出的；

(3) 被积函数虽然能用公式表示，但计算其原函数很困难.

2、解决办法：

建立定积分的近似计算方法.

3、研究思路：

$\int_a^b f(x)dx\ (f(x)\geq 0)$ 在数值上表示曲边梯形的面积，只要近似地算出相应的曲边梯形的面积，就得到所给定积分的近似值.

4、常用方法：矩形法、梯形法、抛物线法.

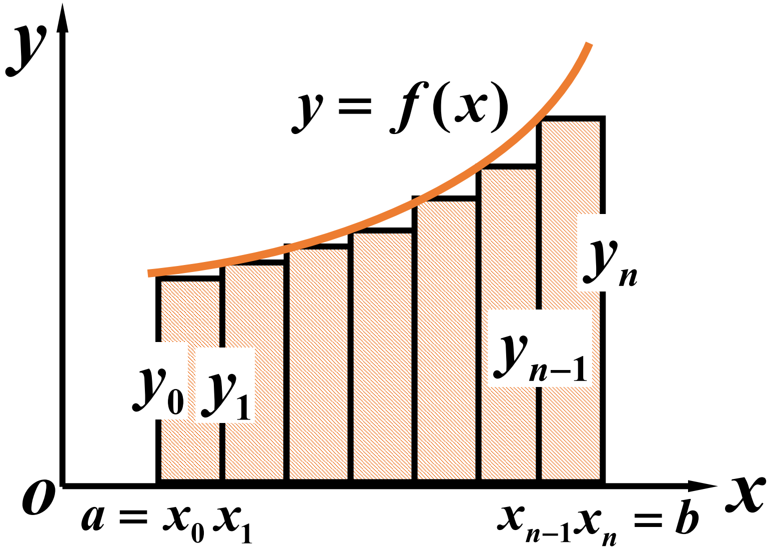
一、矩形法(平均值法)

用分点 $a=x_0,x_1,\cdots,x_n=b$ 将区间 $[a,b]$ n 等分,取小区间左端点的函数值 $y_i(i=0,1,\cdots,n)$作为窄矩形的高，如图

则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\Delta x$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \qquad (1)$$

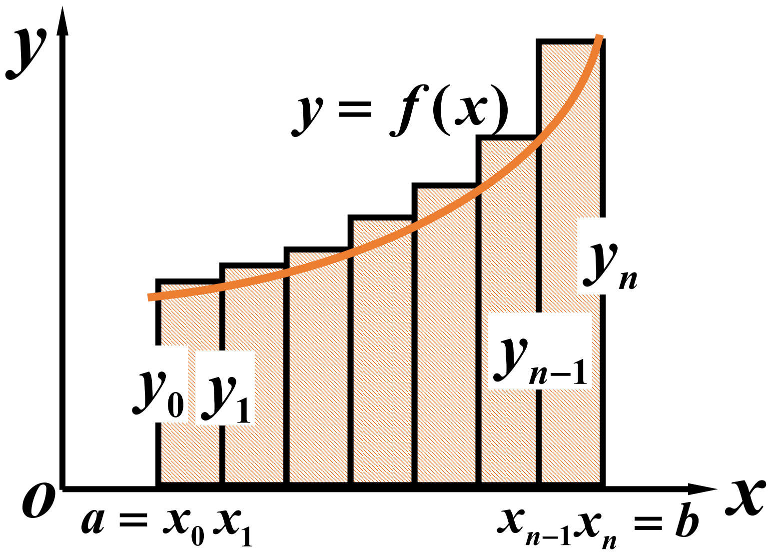


取右端点的函数值 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$作为窄矩形的高，如图

则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x$$

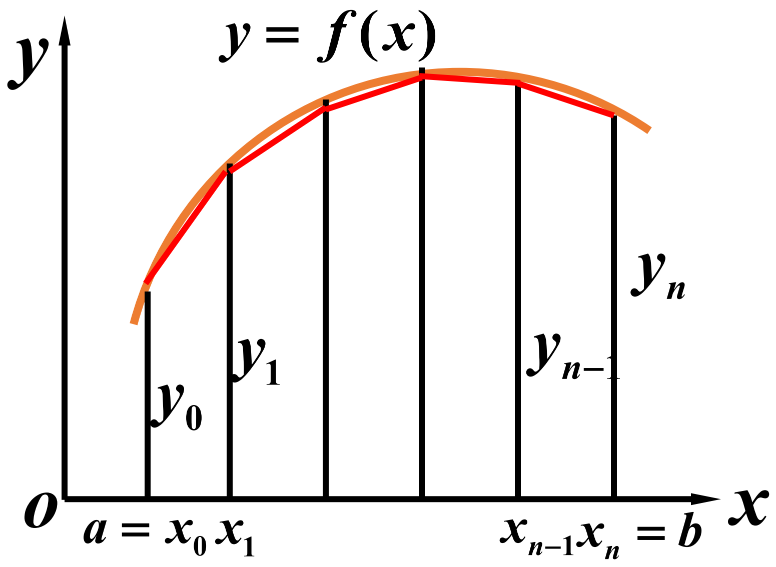
$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (2)$$



（1）、（2）称为矩形法（平均值法）公式

二、梯形法

梯形法就是在每个小区间上，以窄梯形的面积近似代替窄曲边梯形的面积，如图



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}(y_0+y_1)\Delta x+\frac{1}{2}(y_1+y_2)\Delta x$$

$$+\cdots+\frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)\Delta x$$

$$=\frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right] \quad (3)$$

例11 用矩形法和梯形法计算积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的近似值

解 把区间十等分,设分点为 x_i, $(i=0,1,\cdots,10)$

相应的函数值为 $y_i=\mathrm{e}^{-x_i^2}$ $(i=0,1,\cdots,10)$ 列表:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	1.00000	0.99005	0.96079	0.91393	0.85214	0.77880

i	6	7	8	9	10
x_i	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	0.69768	0.61263	0.52729	0.44486	0.36788

利用矩形法公式（1），得

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \approx (y_0 + y_1 + \cdots + y_9)\times\frac{1-0}{10} = 0.77782.$$

利用矩形法公式（2），得

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \approx (y_1 + y_2 + \cdots + y_{10})\times\frac{1-0}{10} = 0.71461.$$

利用梯形法公式（３），得

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \approx \frac{1-0}{10}[\frac{1}{2}(y_0+y_{10})+y_1+y_2\cdots+y_9]$$

实际上是前面两值的平均值，

$$\therefore \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}(0.77782+0.71461)$$

$$=0.74621.$$

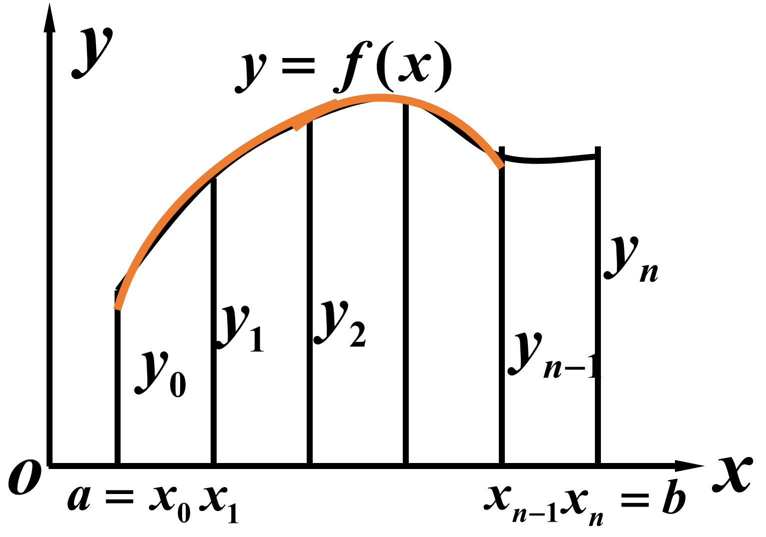
三、抛物线法

抛物线法是将曲线分为许多小段，用对称轴平行于 y 轴的二次抛物线上的一段弧来近似代替原来的曲线弧，从而得到定积分的近似值.

用分点 $a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b$ 把区间分成 n（偶数）等分，这些分点对应曲线上的点为

$M_i(x_i, y_i)$ $(y_i = f(x_i))$.

$$(i = 0,1,2,\cdots n)$$



因为经过三个不同的点可以唯一确定一抛物线,

故可将这些曲线上的点 M_i 互相衔接的分成 $\frac{n}{2}$ 组,

$$\{M_0, M_1, M_2\}, \{M_2, M_3, M_4\}, \cdots, \{M_{n-2}, M_{n-1}, M_n\}.$$

在每组 $\{M_{2k-2}, M_{2k-1}, M_{2k}\}\ (k = 1, 2, \cdots, \frac{n}{2})$所对应的子区间 $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ 上,用经过点 M_{2k-2}, M_{2k-1}, M_{2k} 的二次抛物线 $y = px^2 + qx + r$近似代替曲线弧.

计算在 $[-h,h]$ 上过三点 $M_0'(-h,y_0),M_1'(0,y_1),$ $M_2'(h,y_2)$,的抛物线 $y=px^2+qx+r$ 为曲边的曲边梯形的面积.

抛物线方程中的 p,q,r 可由下列方程组确定：

$$\begin{cases} y_0 = ph^2 - qh + r, \\ y_1 = r, \\ y_2 = ph^2 + qh + r. \end{cases}$$

由此得 $2ph^2 = y_0 - 2y_1 + y_2.$

于是所求面积为

$$A=\int_{-h}^{h}(px^2+qx+r)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}ph^3+2rh=\frac{1}{3}h(2ph^2+6r)$$

$$=\frac{1}{3}h(y_0+4y_1+y_2),$$

显然，曲边梯形的面积只与 M_0', M_1', M_2' 的纵坐标 y_0, y_1, y_2 及底边所在的区间长度 $2h$ 有关.

由此可知 $\frac{n}{2}$ 组曲边梯形的面积为

$$A_1=\frac{1}{3}h(y_0+4y_1+y_2),\quad A_2=\frac{1}{3}h(y_2+4y_3+y_4),$$

$$\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots$$

$$A_{\frac{n}{2}}=\frac{1}{3}h(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n),$$ 其中 $h=\frac{b-a}{n}$.

$$\therefore\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{3n}[(y_0+y_n)+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})$$

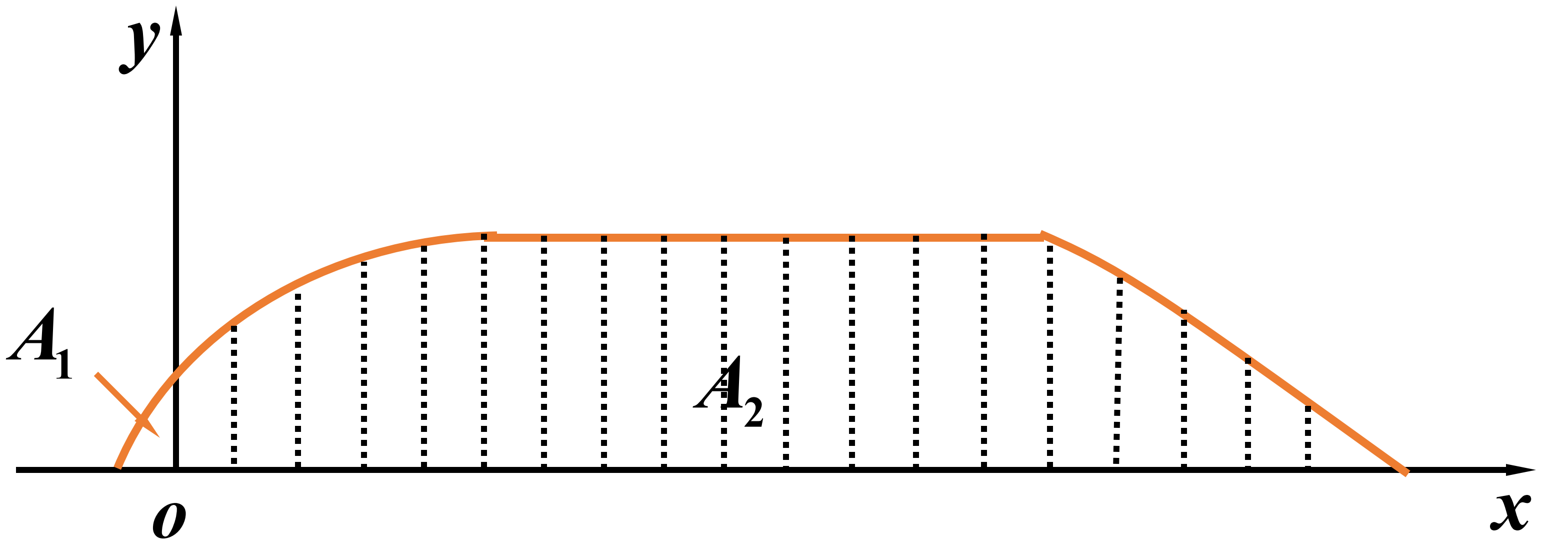
$$+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})]. \qquad (4)$$

例12 对如图所示的图形测量所得的数据如下表所示,用抛物线法计算该图形的面积 A.

站号	-1	0	1	2	3	4	5	6
高 y	0	2.305	4.865	6.974	8.568	9.559	10.011	10.183

站号	7	8	9	10	11	12	13
高 y	10.200	10.200	10.200	10.200	10.200	10.200	10.200

站号	14	15	16	17	18	19	20
高 y	10.400	9.416	8.015	6.083	3.909	1.814	0



这里, 0 站到 20 站之间的距离为 147.18米，相邻两站之间的距离（站距）为 $147.18 \div 20 = 7.359.$

而 -1 站到 0 站之间的距离为 5米.

解 从 -1 站到 0 站这一段的面积用 A_1 表示. 它可以用曲线同坐标轴的交点的连线与坐标轴构成的三角形的面积来近似表示，即

$$A_1 \approx \frac{1}{2} \times 5 \times 2.305 = 5.763\ (\text{平方米}).$$

根据抛物线公式(4)，得

$$A_2 \approx [(y_0 + y_{20}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{19}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{18})]\frac{\Delta x}{3} = 1194.839\ (\text{平方米}).$$

$$\therefore A = A_1 + A_2 \approx 5.768 + 1194.839 = 1200.602\ (\text{平方米}).$$

5　小结与思考题

求定积分近似值的方法：

矩形法、梯形法、抛物线法

注意：对于以上三种方法当 n 取得越大时近似程度就越好.

课堂练习题

一、用三种积分近似计算法计算 $s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$,

（取 $n=6$，被积函数值取四位小数）.

课堂练习题答案

一、1、1.3890；　2、1.3506；　3、1.3506.