第五章 定积分

第一讲：定积分的定义与性质

1　两个典型问题

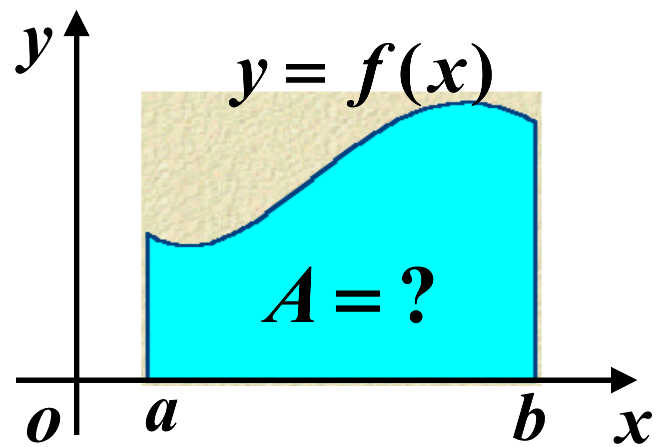
典型问题1：求曲边梯形的面积

曲边梯形由连续曲线

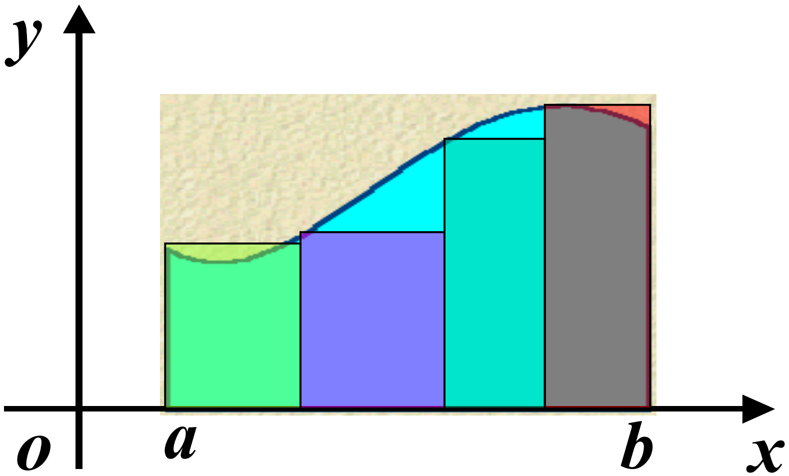
$y = f(x)(f(x) \geq 0)$、

x轴与两条直线$x = a$、

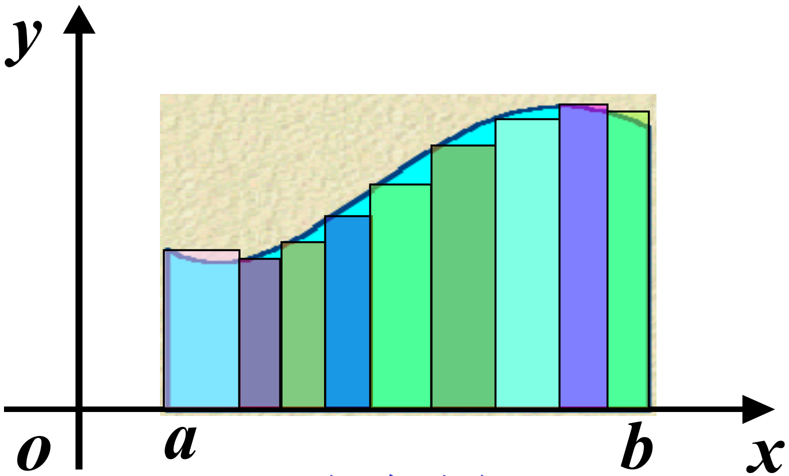
$x = b$所围成.



用矩形面积近似取代曲边梯形面积



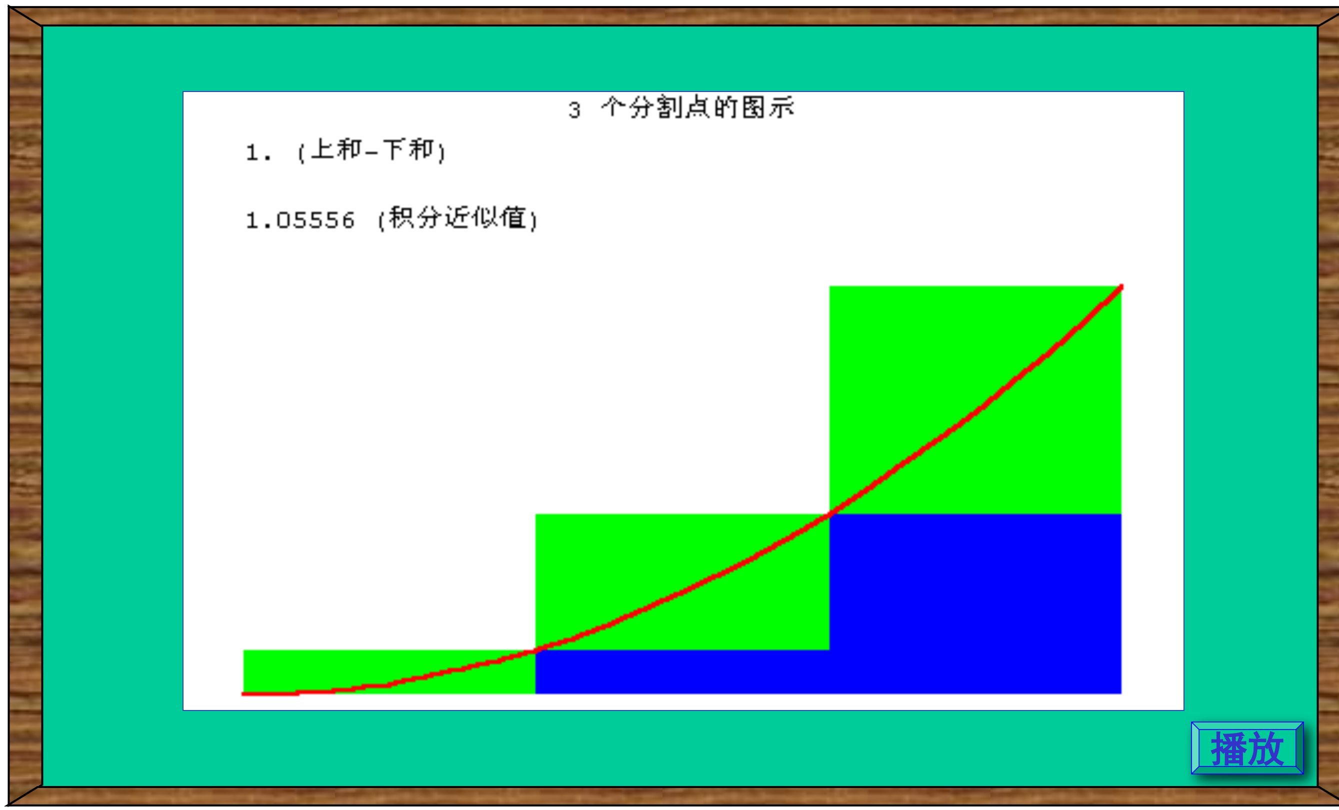
（四个小矩形）



（九个小矩形）

显然，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积.

观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.

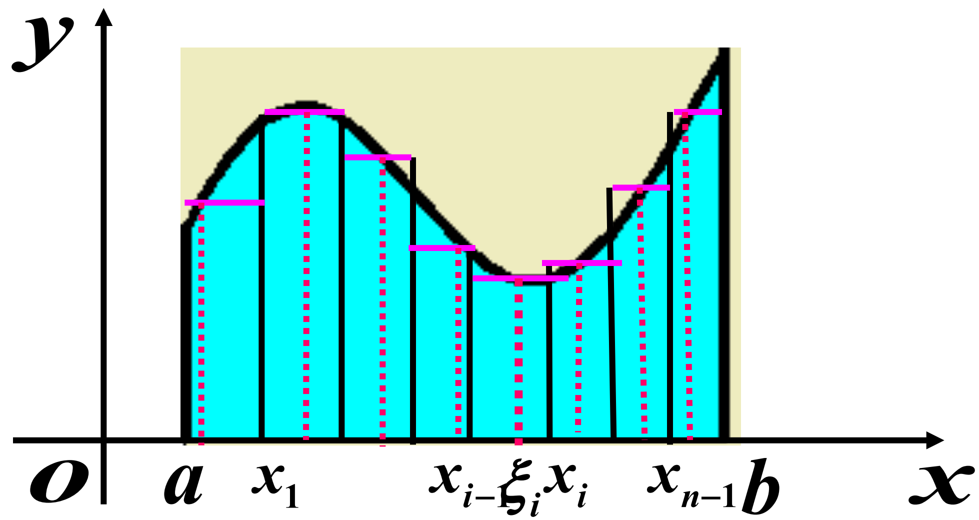


曲边梯形如图所示，在区间 $[a,b]$ 内插入若干个分点，$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$,

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$,

长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$;

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i,



以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底，以 $f(\xi_i)$ 为的小曲边梯形面积为:

$$A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形面积的近似值为

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

当分割无限加细,即小区间的最大长度

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$$

趋近于零 $(\lambda \to 0)$ 时，曲边梯形面积为

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

典型问题2：求变速直线运动的路程

设某物体作直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t)\geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程.

思路：把整段时间分割成若干小段，每小段上速度看作不变，求出各小段的路程再相加，便得到路程的近似值，最后通过对时间的无限细分过程求得路程的精确值.

（1）分割 $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$

$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $\Delta s_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i$

部分路程值

某时刻的速度

（2）求和 $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

（3）取极限 $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$

路程的精确值 $s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$

2 定积分的定义

设函数 $f(x)$在$[a,b]$上有界， 在$[a,b]$中任意插入

n-1 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

把区间$[a,b]$分成n个小区间, 各小区间的长度依次为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ (i = 1,2,\cdots),$$

在各小区间上任取一点ξ_i（$\xi_i \in \Delta x_i$），

作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，并作和：

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果不论对 $[a,b]$ 怎样的分法，也不论在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上点 ξ_i 怎样的取法，只要恒有

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I,$$

则称该极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，

记为：

积分上限

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分和

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

$[a,b]$ 积分区间

面积：$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$ 路程：$s = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t.$

注意:（1）积分值仅与被积函数及积分区间有关，而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

（2）定义中区间的分法和ξ_i的取法是任意的.

（3）当函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分存在时，称$f(x)$在区间$[a,b]$上**可积**.

定积分的存在定理

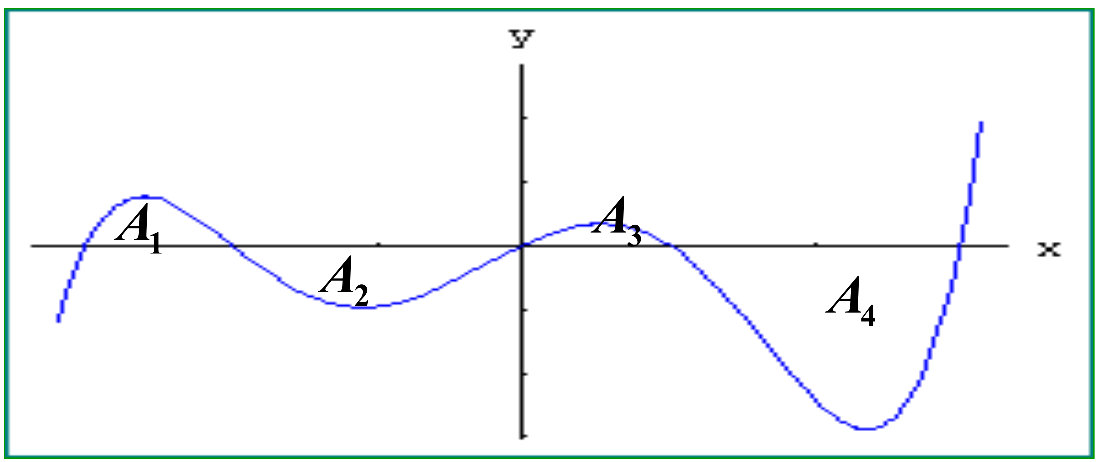
定理 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积.

定理 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且最多只有有限个间断点，则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积.

3 定积分的几何意义

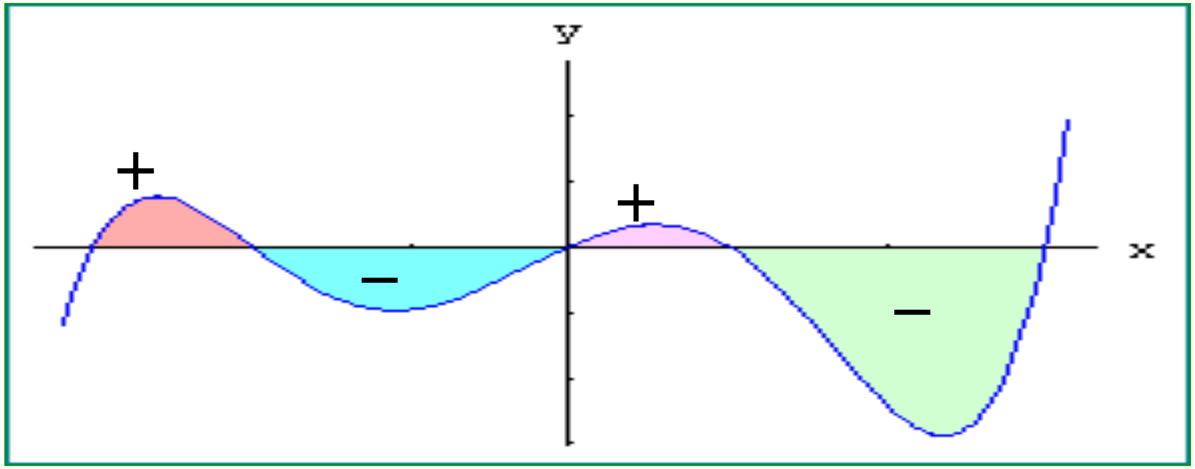
$f(x) > 0, \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$ 曲边梯形面积

$f(x) < 0, \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$ 面积的负值



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

几何意义：它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a, x=b$ 之间的各部分面积的代数和．在 x 轴上方的面积取正号；在 x 轴下方的面积取负号.



例1 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$.

解 将$[0,1]$ n等分，分点为$x_i = \frac{i}{n}$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

小区间$[x_{i-1}, x_i]$的长度$\Delta x_i = \frac{1}{n}$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

取$\xi_i = x_i$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i$$

$$
=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
$$

$$
=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),\qquad \lambda\to 0\ \Rightarrow n\to\infty
$$

$$
\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^{\,2}\Delta x_i
$$

$$
=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.
$$

例2 利用定义计算定积分 $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 在$[1,2]$中插入分点 $q, q^2, \cdots, q^{n-1}$,

典型小区间为$[q^{i-1}, q^i]$, （$i = 1,2,\cdots,n$）

小区间的长度$\Delta x_i = q^i - q^{i-1} = q^{i-1}(q-1)$,

取$\xi_i = q^{i-1}$, （$i = 1,2,\cdots,n$）

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_i}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{i-1}} q^{i-1}(q-1)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(q-1)\ =n(q-1)\qquad \text{取}q^{n}=2\ \ \text{即}q=2^{\frac{1}{n}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=n(2^{\frac{1}{n}}-1),$$

$$\because \lim_{x\to+\infty}x(2^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\ln 2,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}n(2^{\frac{1}{n}}-1)=\ln 2,$$

$$\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi_i}\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}n(2^{\frac{1}{n}}-1)=\ln 2.$$

例 3　设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且取正值.

试证 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x}.$$

证　利用对数的性质得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}$$

$$=\exp\left\{\ln\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}\right)\right\}$$

极限运算与对数运算换序得

$$= \exp\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\ln\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right\}$$

指数可理解为：$\ln f(x)$在$[0,1]$区间上的一个

积分和，分割是将[0,1]作n等分，分点为

$$x_i=\frac{i}{n},\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

因为$f(x)$在区间[0,1]上连续，且$f(x)>0$

所以$\ln f(x)$在[0,1]上有意义且可积，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}.$$

5　小结与思考题

1、定积分的实质：特殊和式的极限.

2、定积分的思想和方法：

分割 → 化整为零

⇓　　⇓ 求近似以直（不变）代曲（变）

求和 → 积零为整

⇓　　⇓ 取极限

取极限 → 精确值——定积分

思考题

将和式极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

表示成定积分.

思考题解答

原式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}\sum_{i=1}^{n}\sin\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}\pi=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\underbrace{\boxed{\frac{i\pi}{n}}}_{\xi_i}\right)\cdot\underbrace{\boxed{\frac{\pi}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\int_0^1\sin\pi x\,dx.$$

课堂练习题

一、 填空题：

1、函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分是积分和的极限，

即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$ ______________.

2、定积分的值只与__________及__________有关，而与

______________无关.

3、 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分的几何意义是____________.

4、区间 $[a,b]$ 长度的定积分表示是________________.

二、 利用定积分的定义计算由抛物线 $y = x^2 + 1$,两直线 $x = a$, $x = b$ ($b > a$)及横轴所围成的图形的面积.

三、 利用定积分的定义计算积分 $\int_a^b x\mathrm{d}x$ ，($a < b$).

课堂练习题答案

一、1、$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$；

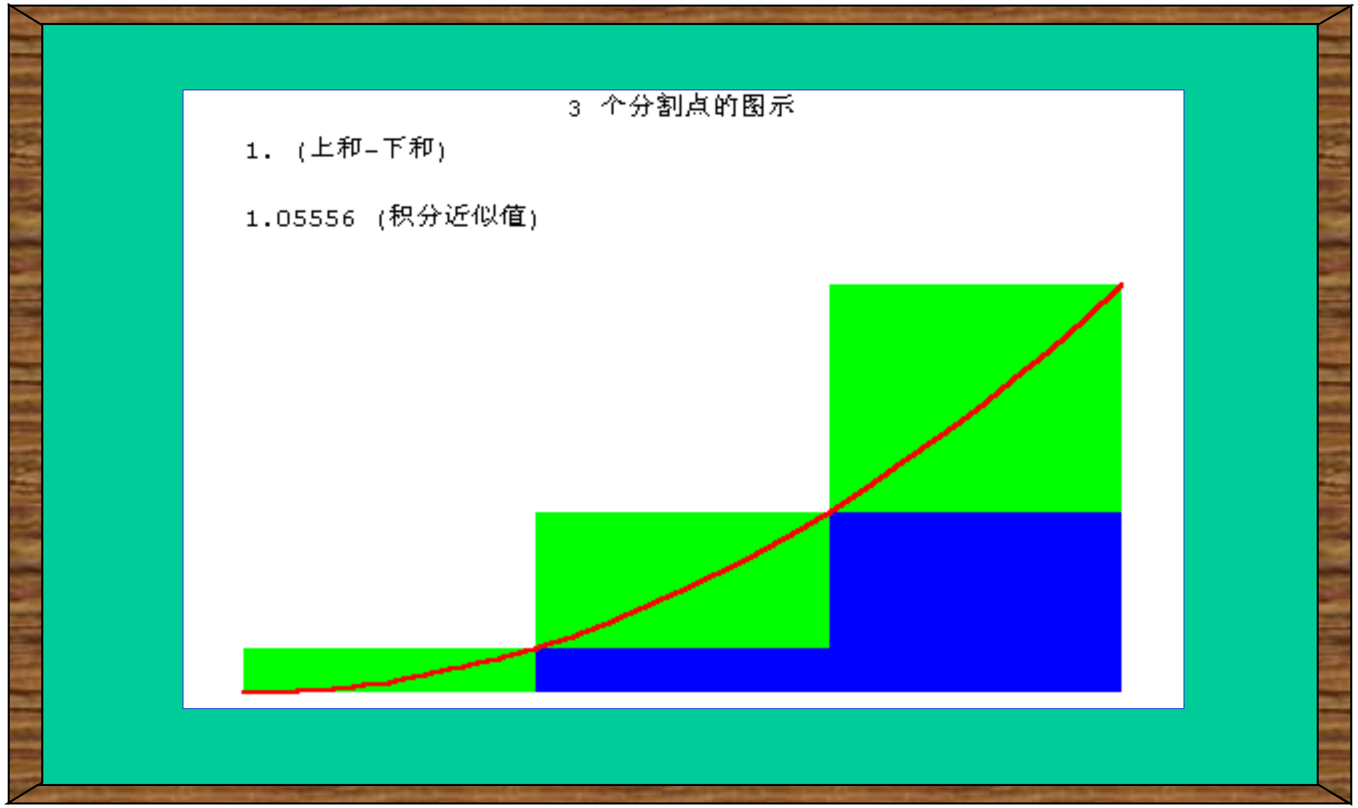
2、被积函数, 积分区间, 积分变量;

3、介于曲线 $y = f(x)$, x 轴及直线 $x=a$ 与 $x=b$ 之间

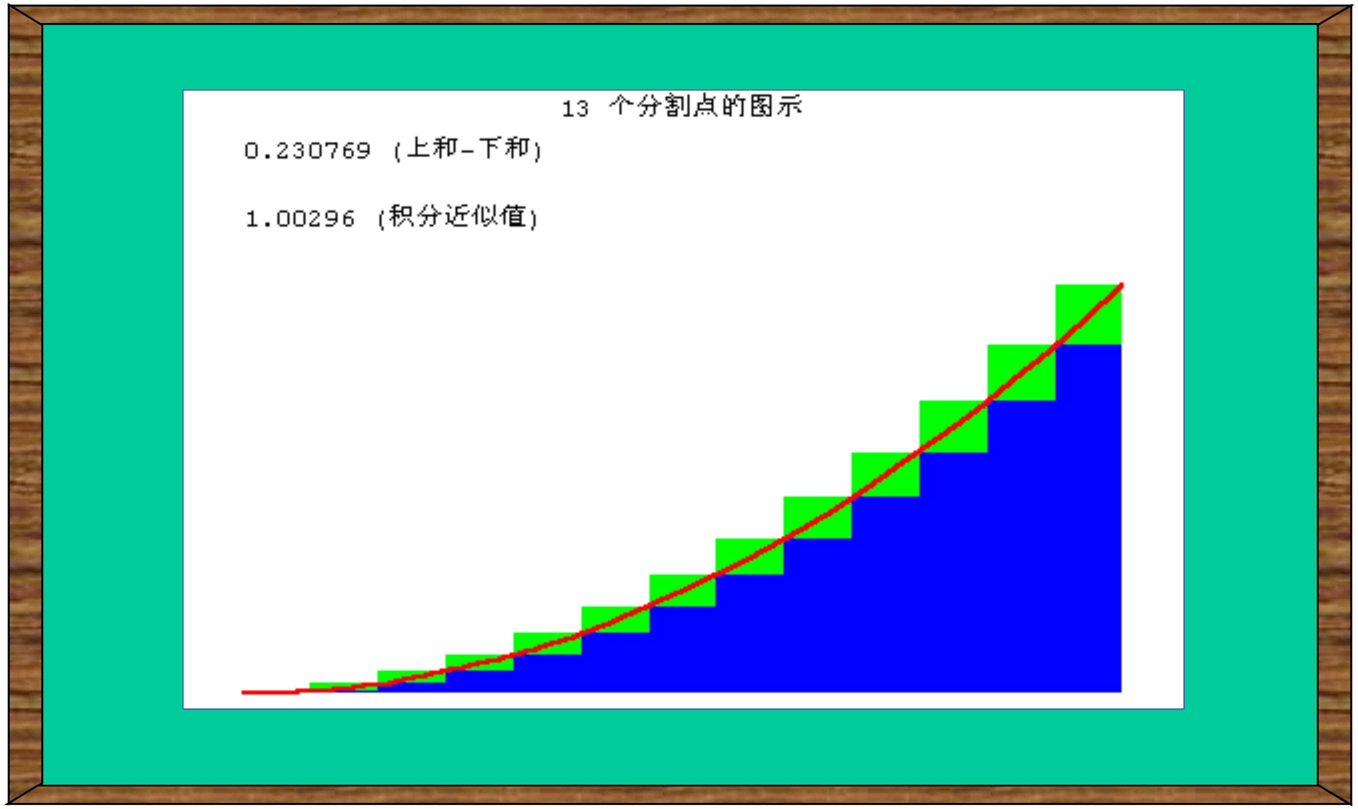
各部分面积的代数和;　　　　4、$\int_a^b \mathrm{d}x$.

二、$\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + b - a$.　　　　三、$\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

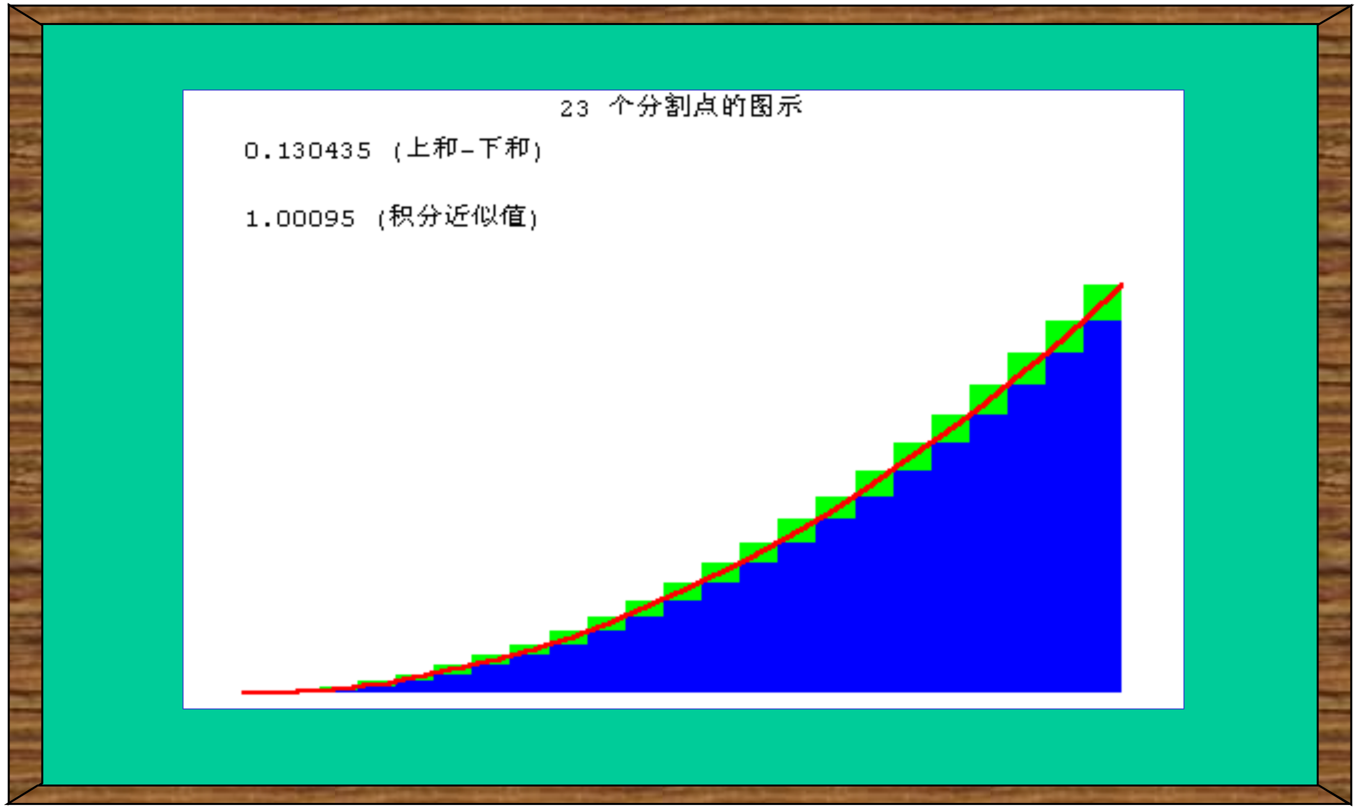
观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



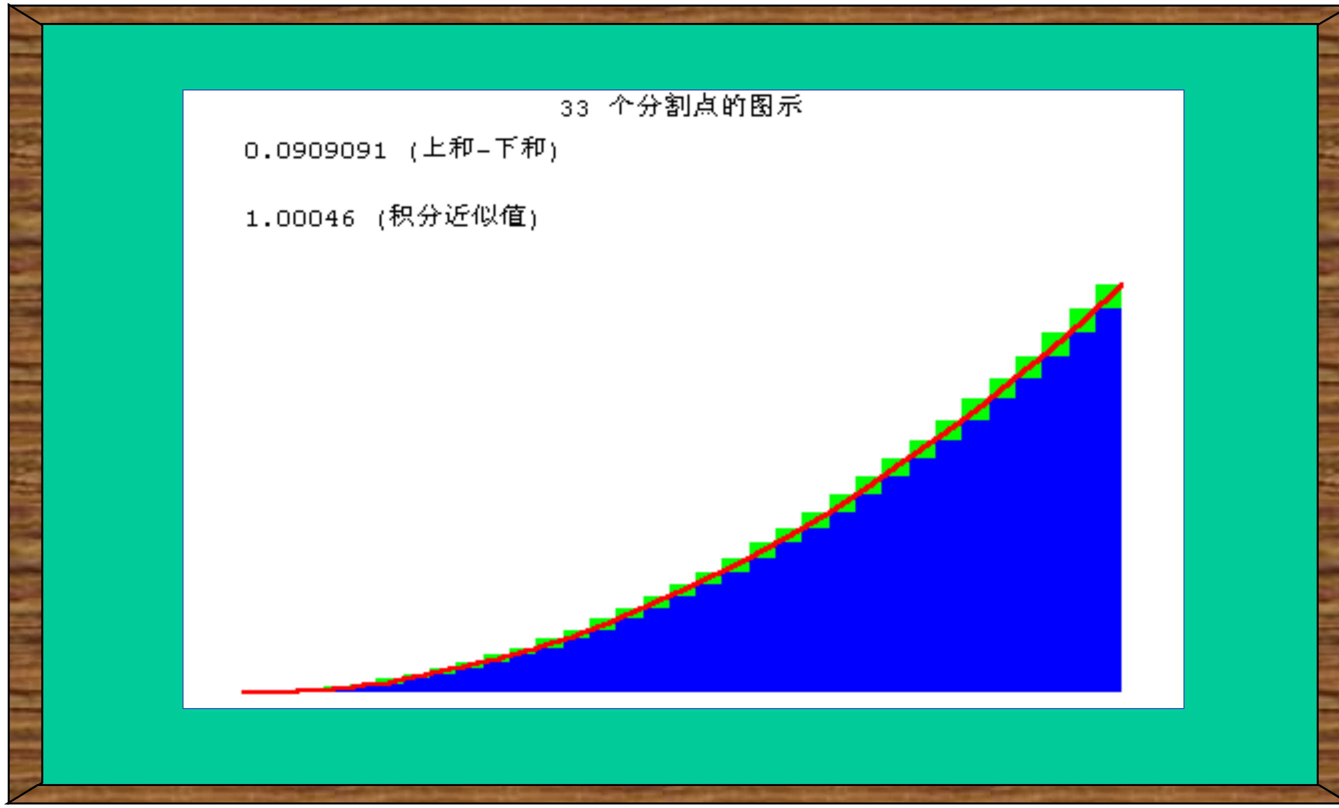
观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.

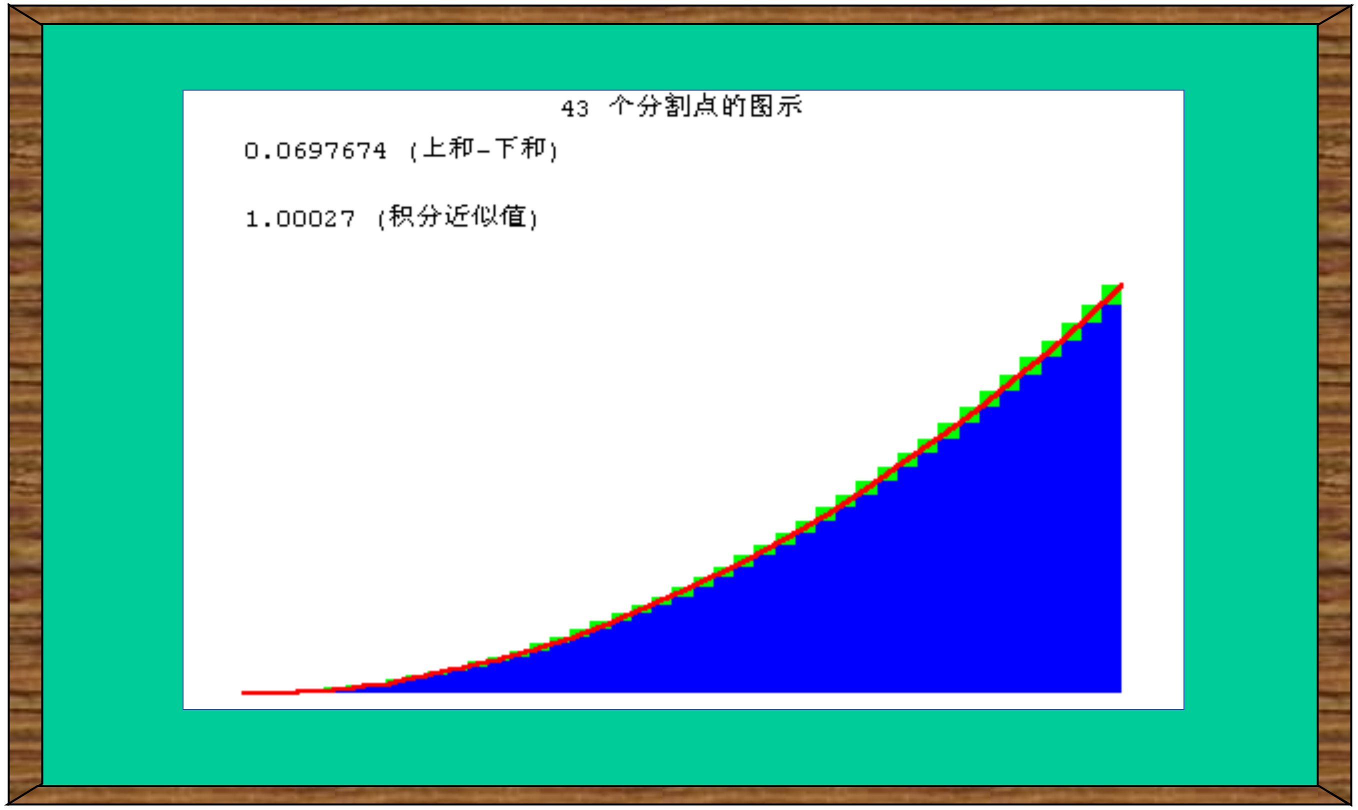


观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.

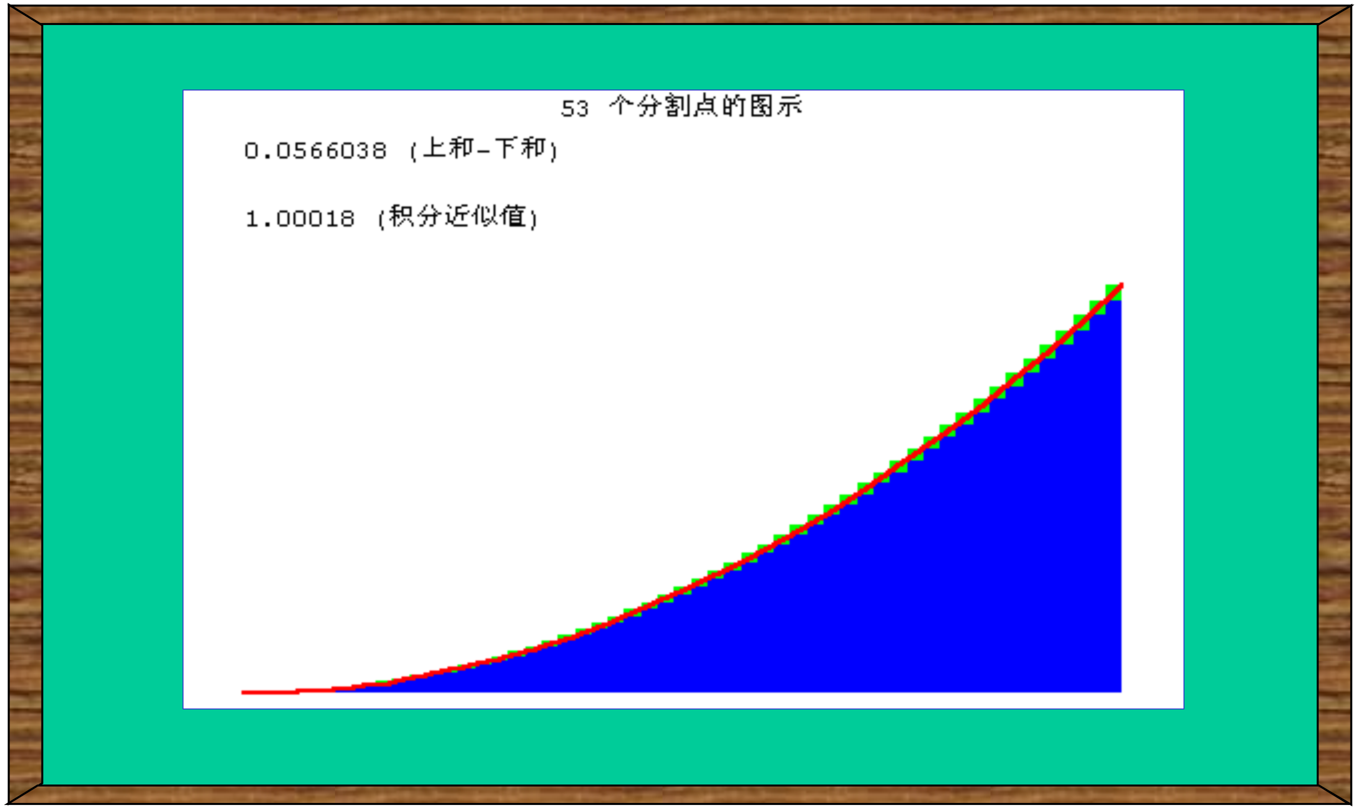


观察下列演示过程，注意当分割加细时，

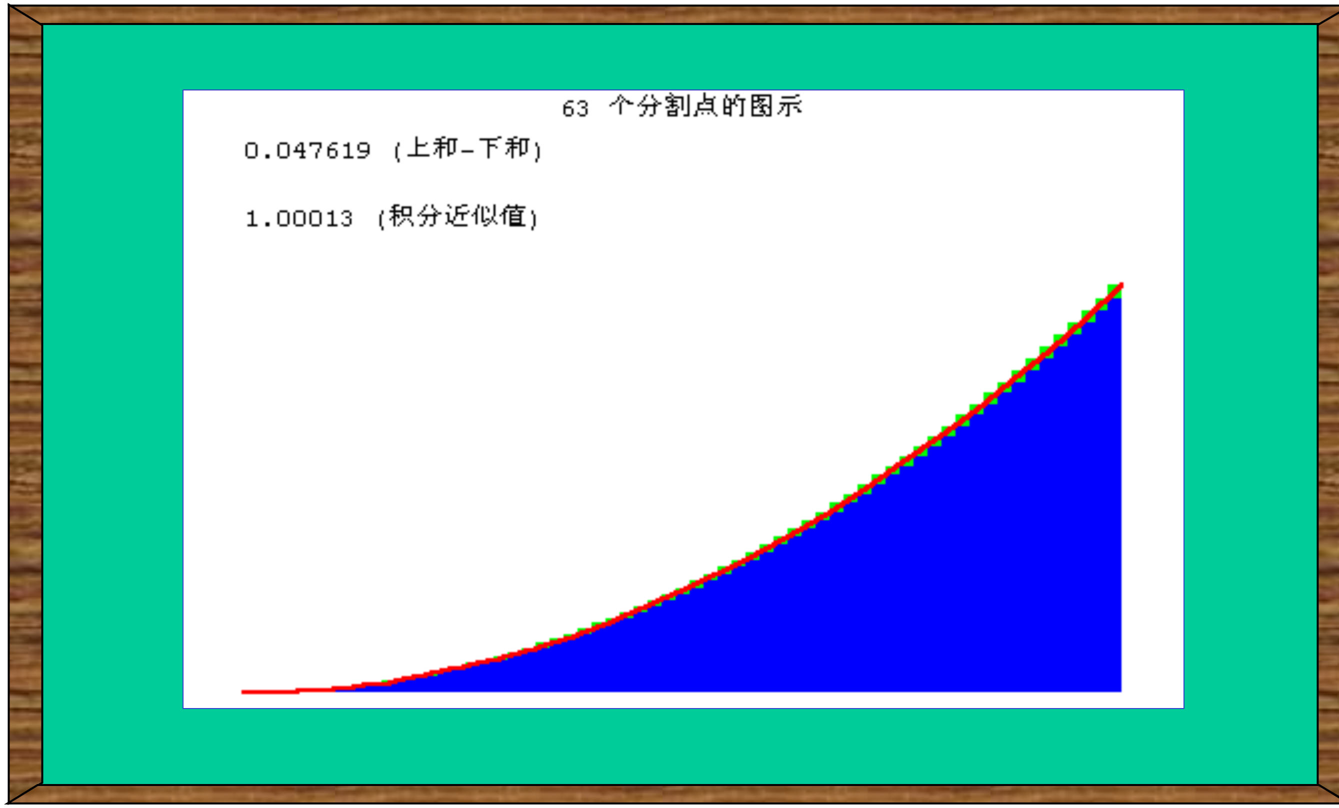
矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



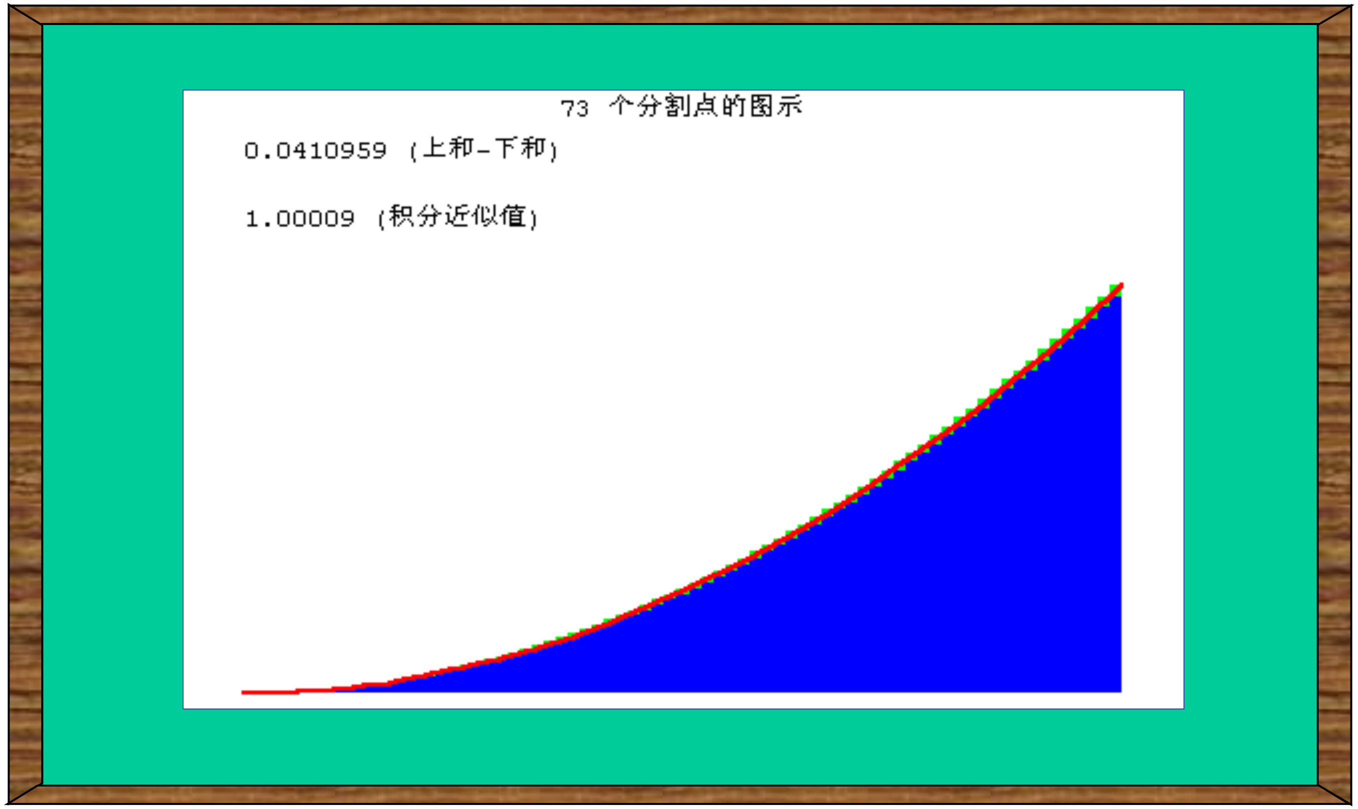
观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



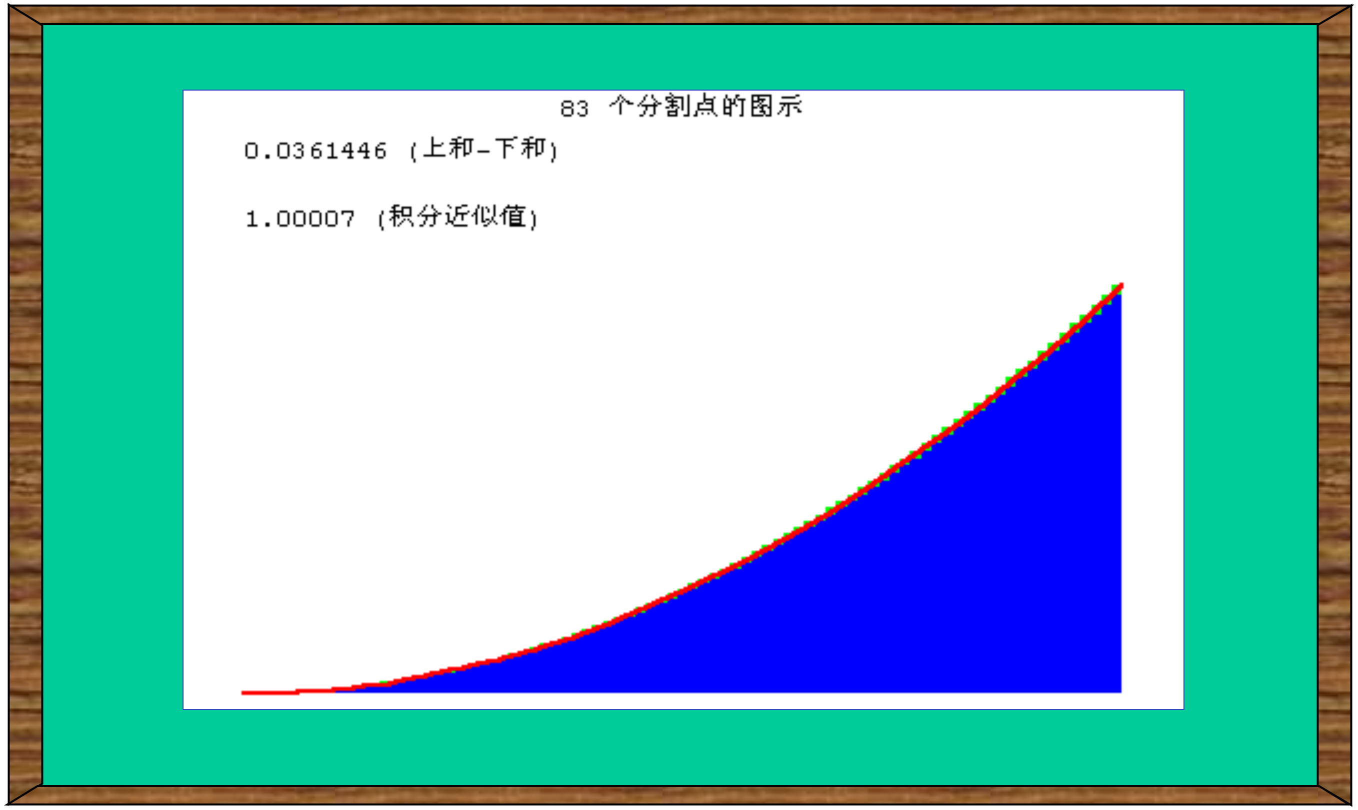
观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



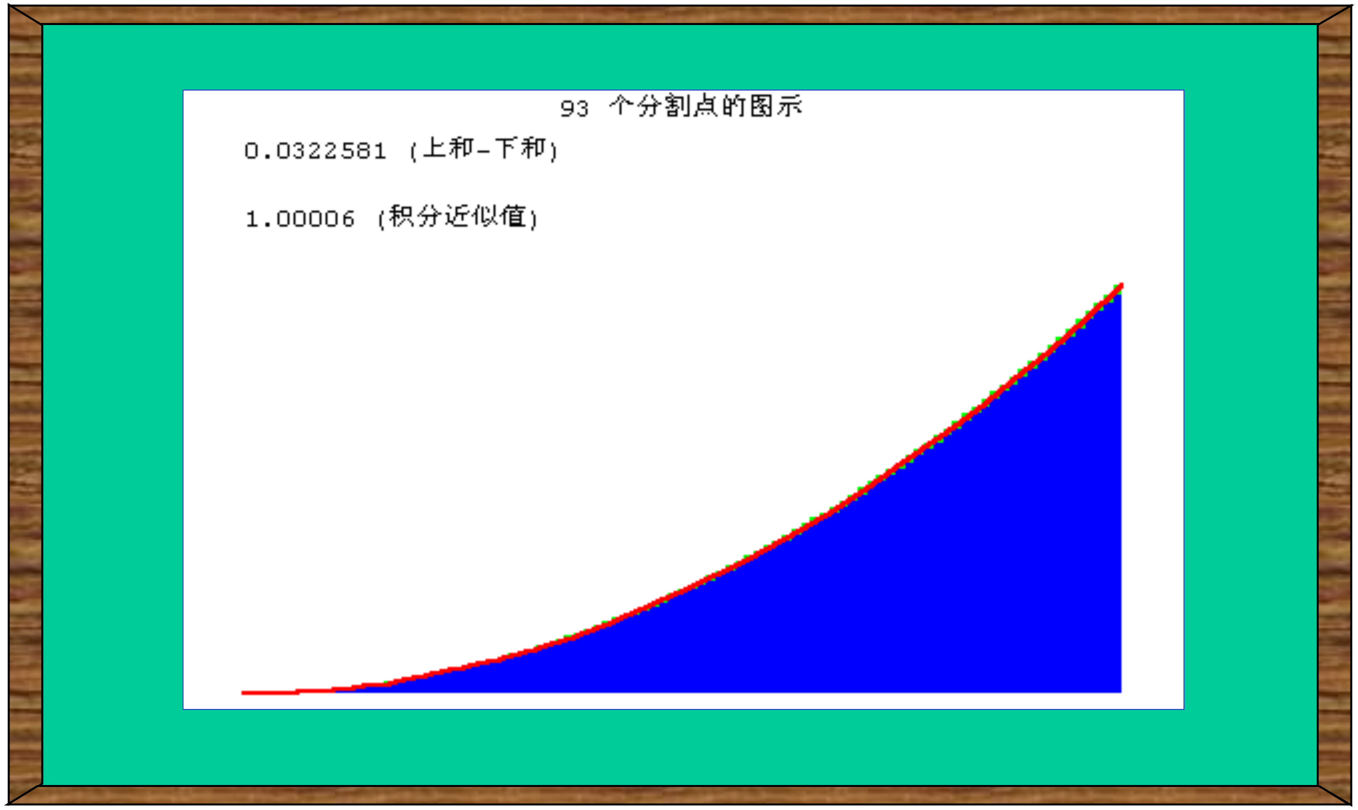
观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



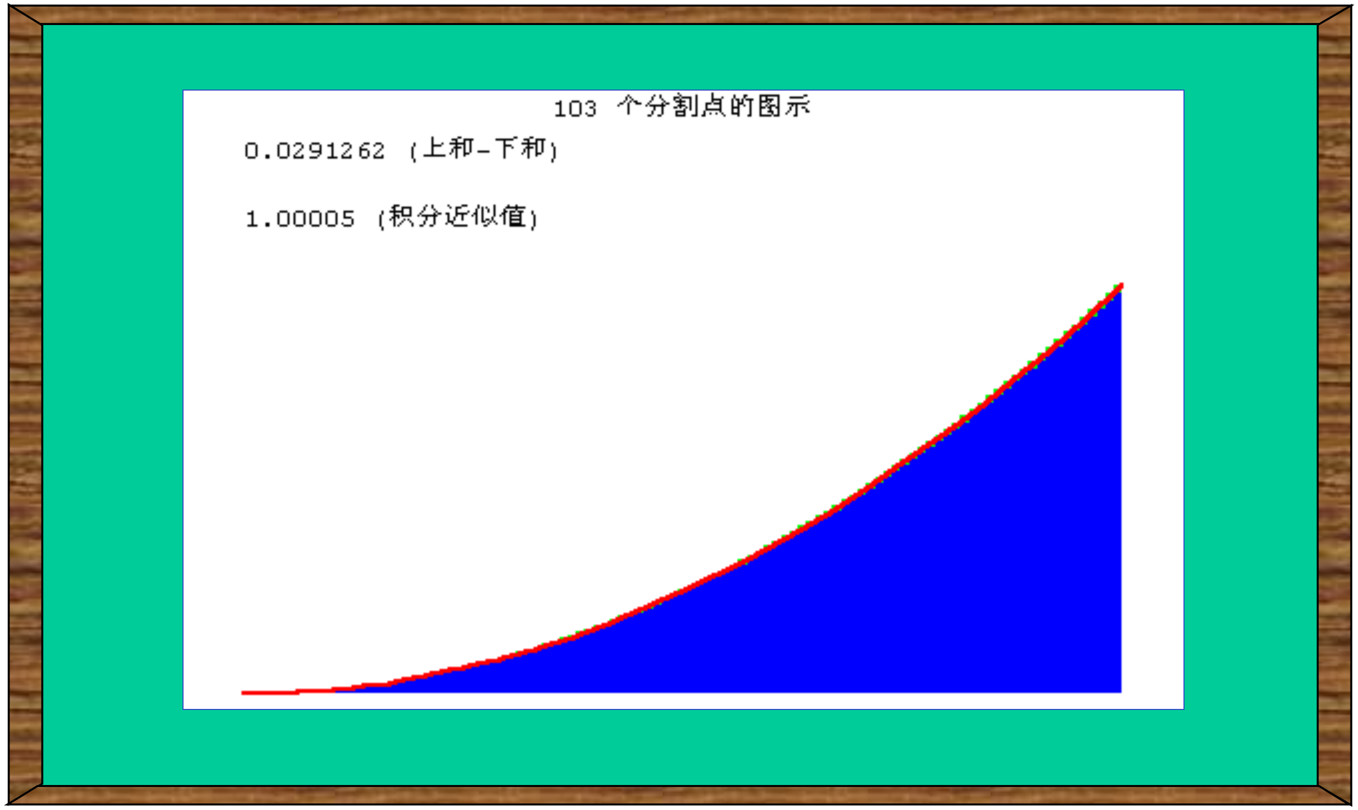
观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



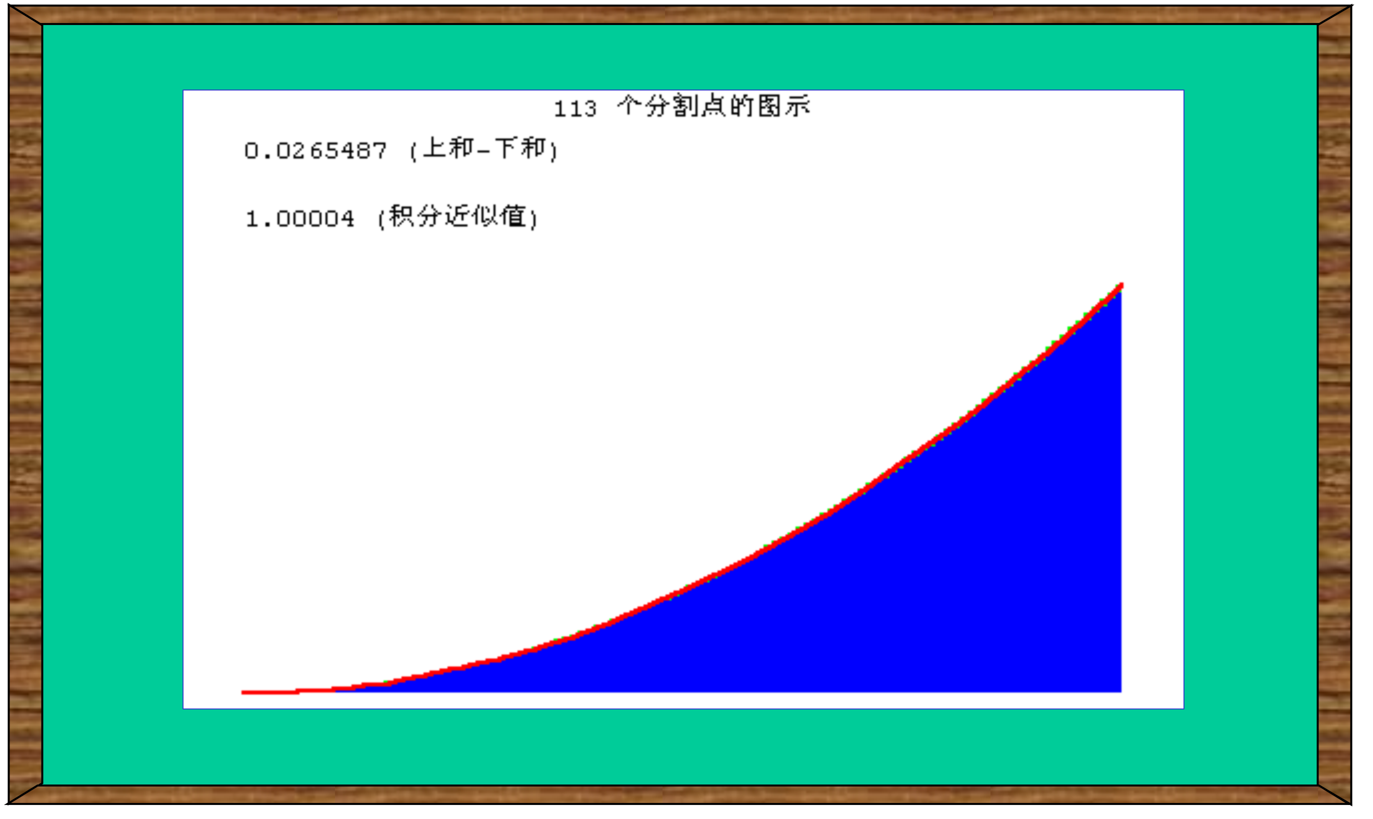
观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



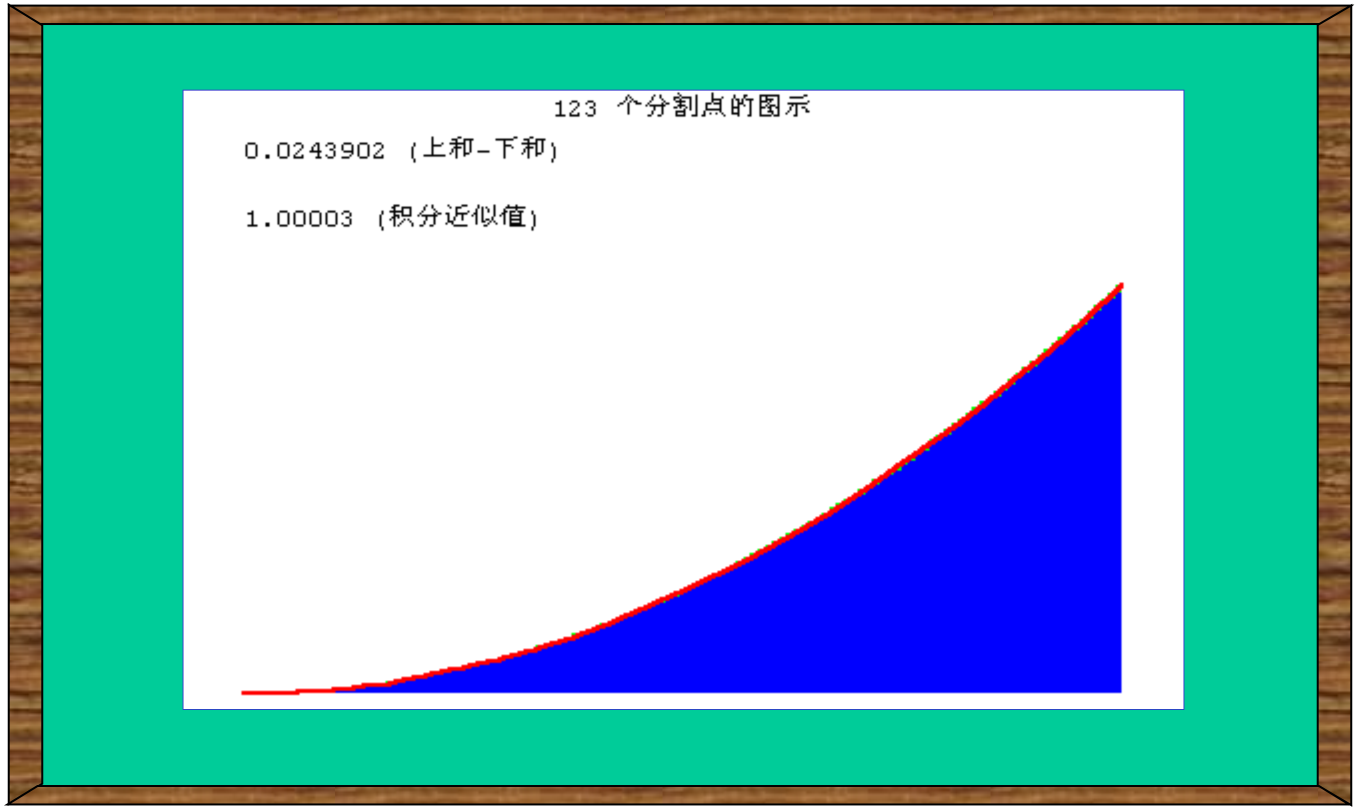
观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



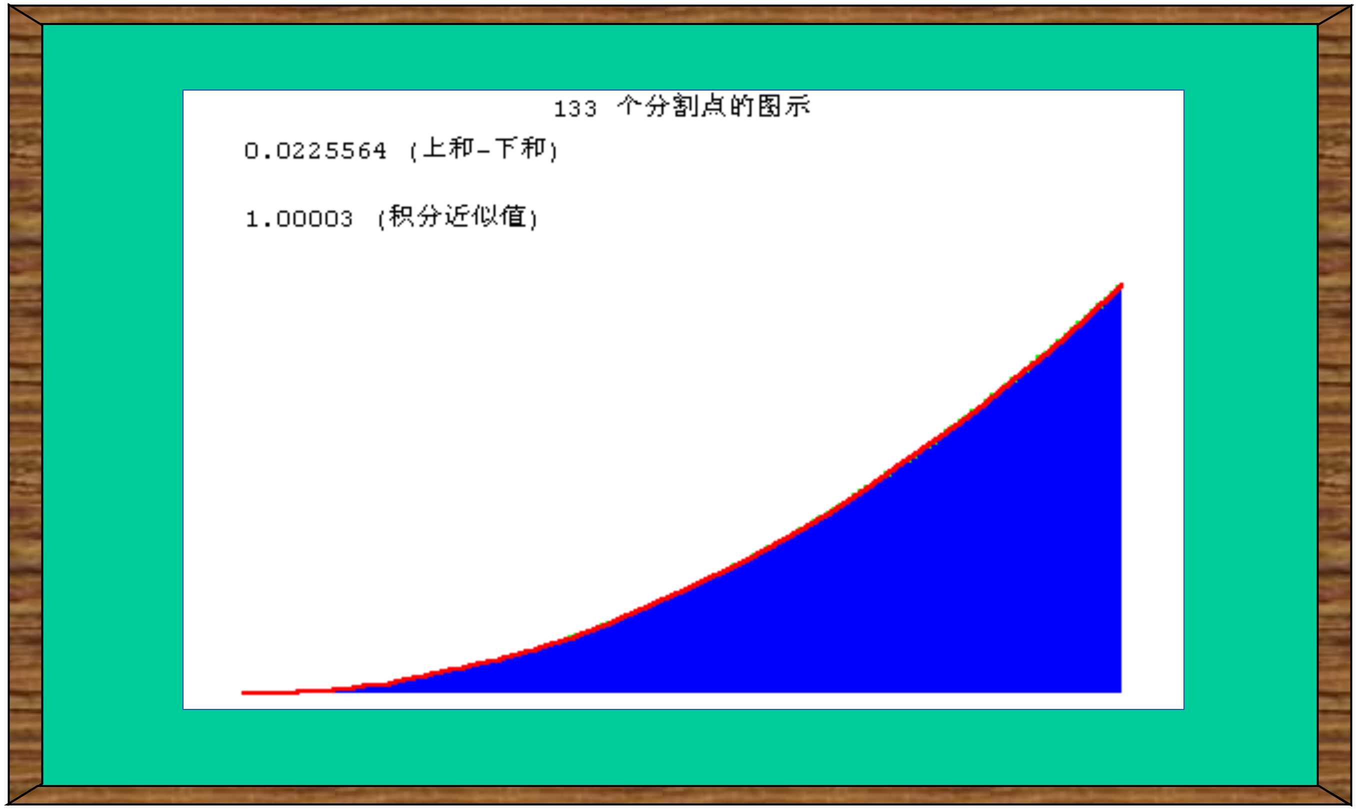
观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



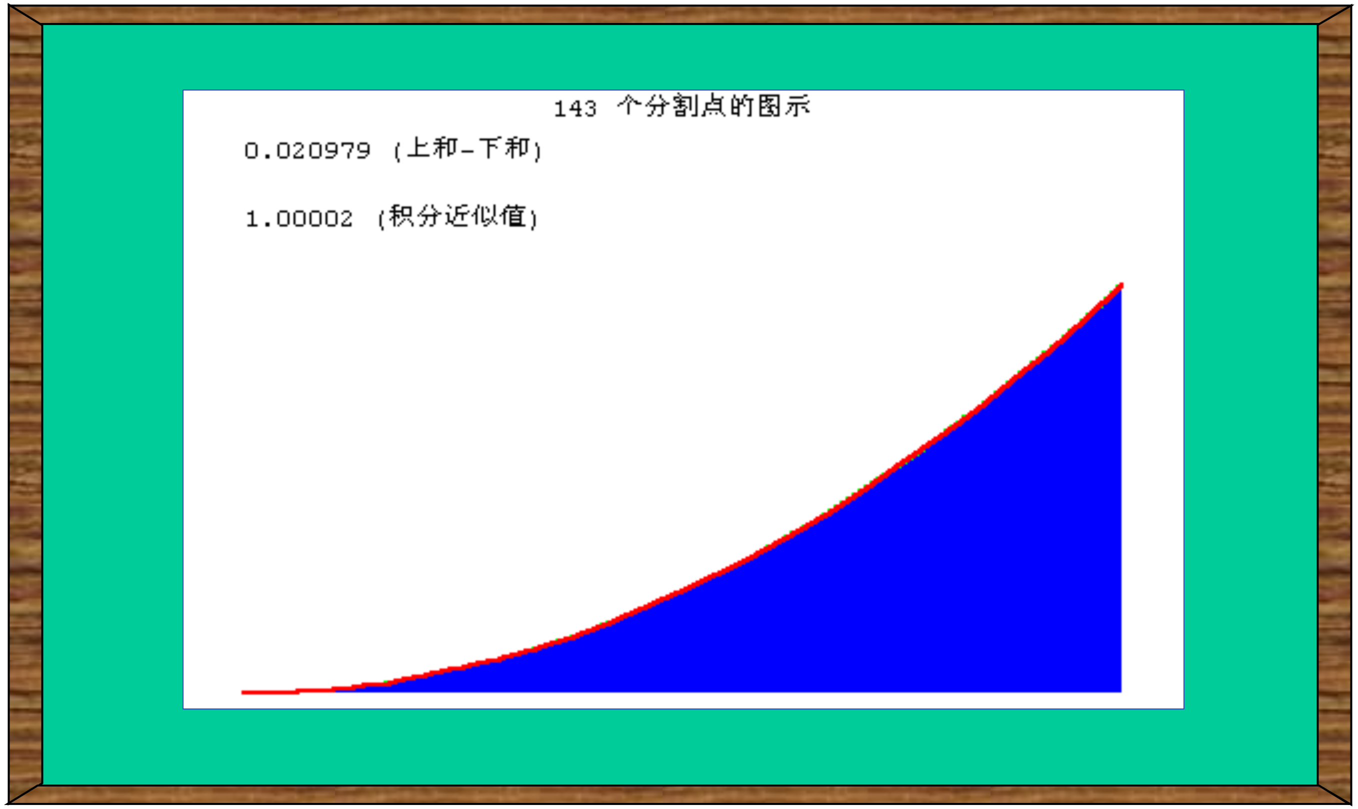
观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



6 定积分性质

对定积分的**补充规定**:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x\,.$$

说明: 在下面的性质中，假定定积分都存在，且不考虑积分上、下限的大小.

性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

证 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

（此性质可以推广到有限多个函数作和的情况）

性质2 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k为常数).

证 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i$

$$= \lim_{\lambda\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质3　假设$a<c<b$　（定积分对区间具有可加性）

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

补充：不论 a,b,c的相对位置如何，上式总成立.

例 若 $a<b<c$,

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质4 $\int_a^b 1\cdot \mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$.

性质5 如果在区间$[a,b]$上$f(x)\geq 0$,

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$. $(a<b)$

证 $\because\ f(x)\geq 0,\ \therefore\ f(\xi_i)\geq 0,\quad (i=1,2,\cdots,n)$

$\because\ \Delta x_i\geq 0,\quad \therefore\ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\geq 0,$

$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$

$$\therefore\ \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0.$$

例 4　比较积分值 $\int_0^{-2} e^x dx$ 和 $\int_0^{-2} x dx$ 的大小.

解　令 $f(x) = e^x - x, \quad x \in [-2, 0]$

$\because \ f(x) > 0, \quad \therefore \int_{-2}^{0} (e^x - x) dx > 0,$

$\therefore \int_{-2}^{0} e^x dx > \int_{-2}^{0} x dx,$

于是 $\int_0^{-2} e^x dx < \int_0^{-2} x dx.$

性质5的推论：

（1）如果在区间$[a,b]$上$f(x)\le g(x)$，

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.　　$(a<b)$

证　$\because\ f(x)\le g(x)$,　$\therefore\ g(x)-f(x)\ge 0$,

$$\therefore\ \int_a^b [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x \ge 0,$$

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0,$$

于是 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

性质5的推论：

（2） $$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \quad (a < b)$$

证 $\because\ -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$

$$\therefore\ -\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

即 $$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

性质6　设M及m分别是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值及最小值，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

证　$\because\ m \le f(x) \le M,$

$$\therefore\ \int_a^b m\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b M\mathrm{d}x,$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

（此性质可用于估计积分值的大致范围）

例 5　估计积分$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^3 x}$的值.

解　$f(x)=\frac{1}{3+\sin^3 x},\quad \forall\, x\in[0,\pi],$

$$0\le \sin^3 x\le 1,\qquad \frac{1}{4}\le\frac{1}{3+\sin^3 x}\le\frac{1}{3},$$

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\le\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^3 x}\le\int_0^{\pi}\frac{1}{3}\mathrm{d}x,$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{4}\le\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^3 x}\le\frac{\pi}{3}.$$

例 6　估计积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$的值.

解　$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0,$$

$f(x)$在$[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$上单调下降,

故$x = \frac{\pi}{4}$为极大点，$x = \frac{\pi}{2}$为极小点,

$$M = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \qquad m = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi},$$

$$\because \ b - a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \ \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \ \frac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \le \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

性质7（定积分中值定理）

若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则在积分区间$[a,b]$上至少存在一个点 ξ，使得

积分中值公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a),\ (a \le \xi \le b).$$

证 $\because\ m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)$

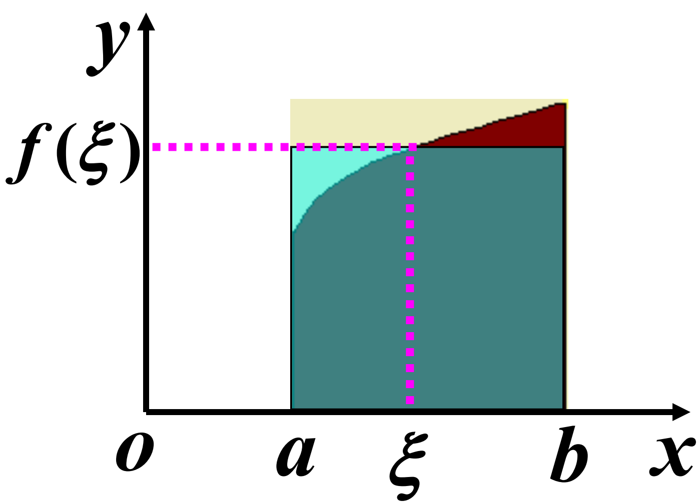
$$\therefore\ m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M$$

由介值定理可知在区间$[a,b]$上至少存在一点ξ,

使得 $$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

几何解释: 在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，使得以区间$[a,b]$为底边，以曲线$y=f(x)(\geq 0)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积。



例 7 设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=251$，

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\dfrac{4}{t} f(t)\mathrm{d}t$.

解 由积分中值定理知有 $\xi\in[x, x+2]$，

$$使\int_x^{x+2} t\sin\frac{4}{t} f(t)\mathrm{d}t=\xi\sin\frac{4}{\xi} f(\xi)(x+2-x),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{4}{t} f(t)\mathrm{d}t=2\lim_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{4}{\xi} f(\xi)$$

$$=2\lim_{\xi\to+\infty}4f(\xi)=2\times4\times251=2008.$$

例 8 求函数 $f(x)=x^2+1$ 在 $[0,2]$ 上的平均值 .

解 由积分中值定理知函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有均值

$$f(\xi)=\frac{1}{2-0}\int_0^2 (x^2+1)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 (x^2+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}.$$

7　小结与思考题

1、定积分的性质

（注意估值性质、积分中值定理的应用）

2、典型问题

（1）估计积分值；

（2）不计算定积分比较积分大小.

思考题

定积分性质表明：

若 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都可积，则 $f(x)+g(x)$ 或 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积。

试问：此性质之逆成立吗？为什么？

思考题解答

由 $f(x)+g(x)$ 或 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，

不能断言 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都可积。如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0, & x\text{为有理数}\\ 1, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

显然 $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，但

$f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上都不可积。

课堂练习题

一、 填空题：

1、若积分区间$[a,b]$被点c分成$[a,c]$与$[c,b]$，则定积分的可加性为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$____________；

2、若$f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值分别为M与m，则$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$有如下估计式：____________；

3、当$a>b$时，规定$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$与$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$的关系是____________；

4、积分中值公式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$, $(a\le\xi\le b)$ 的几何意义是____________.

二、用定积分定义和性质求极限：

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$；

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$.

3、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)\cdots\sin\left(\frac{n\pi}{2n}\right)}$.

三、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：若在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq 0$，

且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 0$.

课堂练习题答案

一、1、$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$；

2、$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)$，$(a<b)$；

3、$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$；

4、曲边梯形各部分面积的代数和等于 $f(\xi)$ 与 $b-a$ 为邻边的矩形面积.　　二、1、$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2$；

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n \xi = 0$　　3、$\mathrm{e}^{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x}$.