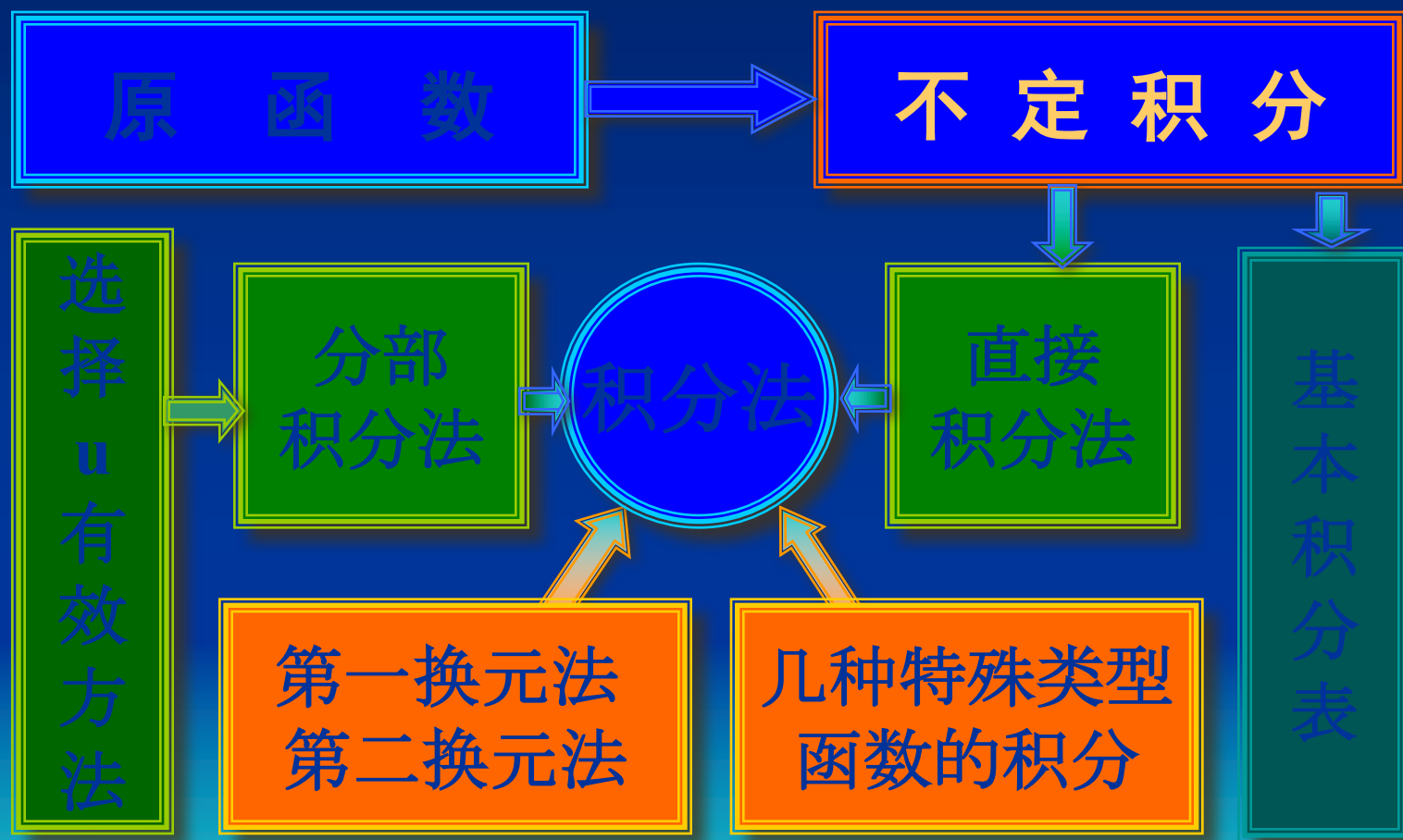


第四章 不定积分

复 习

一、主要内容



综合练习与测试

- 一、典型例题
- 二、测试题

一、典型例题

例1 求 $\int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx$.

解 原式 $= \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 1} dx = \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} \int \frac{d\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 1} \xrightarrow{\text{令 } \left(\frac{3}{2}\right)^x = t} \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} \int \frac{dt}{t^2 - 1}$

$$= \frac{1}{2 \ln \frac{3}{2}} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$
$$= \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left| \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} \right| + C.$$

例2 求 $\int \frac{e^x (1 + \sin x)}{1 + \cos x} dx$.

解 原式 $= \int \frac{e^x (1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2})}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx$

$$= \int \left(\frac{e^x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} + e^x \tan \frac{x}{2} \right) dx$$
$$= \int \left[(e^x d(\tan \frac{x}{2})) + \tan \frac{x}{2} de^x \right]$$
$$= \int d(e^x \tan \frac{x}{2}) = e^x \tan \frac{x}{2} + C.$$

例3 求 $\int \frac{\sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 5}}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

解 $\because [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 5]'$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\text{原式} = \int \sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 5} \cdot d[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 5]$$

$$= \frac{2}{3} [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 5]^{\frac{3}{2}} + C.$$

例4 求 $\int \frac{x+1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx$.

解 令 $x = \frac{1}{t}$, (倒代换)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\frac{1}{t} + 1}{\frac{1}{t^2} \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int \frac{d(1-t^2)}{2\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + \sqrt{1-t^2} + C \\ &= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \arcsin \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

例5 求 $\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}}.$

解 令 $e^{\frac{x}{6}} = t$, $x = 6 \ln t$, $dx = \frac{6}{t} dt$,

$$\text{原式} = \int \frac{1}{1 + t^3 + t^2 + t} \cdot \frac{6}{t} dt = \int \frac{6dt}{t(1+t)(1+t^2)}$$

$$\text{设 } \frac{6}{t(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$$

$$6 = A(1+t)(1+t^2) + Bt(1+t^2) + (Ct+D)t(t+1)$$

解得 $A = 6, B = -3, C = -3, D = -3.$

$$\text{原式} = \int \left(\frac{6}{t} - \frac{3}{1+t} - \frac{3t+3}{1+t^2} \right) dt$$

$$= 6 \ln t - 3 \ln(1+t) - \frac{3}{2} \ln(1+t^2) - 3 \arctan t + C$$

$$= x - 3 \ln(1 + e^{\frac{x}{6}}) - \frac{3}{2} \ln(1 + e^{\frac{x}{3}}) - 3 \arctan e^{\frac{x}{6}} + C.$$

例6 求 $\int x \arctan x \ln(1+x^2) dx$.

解 $\because \int x \ln(1+x^2) dx = \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) d(1+x^2)$
 $= \frac{1}{2} (1+x^2) \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C.$

原式 $= \int \arctan x d[\frac{1}{2} (1+x^2) \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x^2]$
 $= \frac{1}{2} [(1+x^2) \ln(1+x^2) - x^2] \arctan x$
 $- \frac{1}{2} \int [\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{1+x^2}] dx$

$$= \frac{1}{2} [(1+x^2) \ln(1+x^2) - x^2] \arctan x$$

$$- \frac{1}{2} [x \ln(1+x^2) - \int \frac{3x^2}{1+x^2} dx]$$

$$= \frac{1}{2} [(1+x^2) \ln(1+x^2) - x^2 - 3] \arctan x$$

$$- \frac{x}{2} \ln(1+x^2) + \frac{3}{2} x + C.$$

例7 求 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

解 $\because \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4} = \sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \cdot (x+1)^2}.$

令 $t = \frac{x-1}{x+1}, \quad dt = \frac{2}{(x+1)^2} dx,$

原式 $= \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \cdot (x+1)^2}} = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{4}{3}} dt$
 $= -\frac{3}{2} t^{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$

例8 求 $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$.

解 原式 $= \int \frac{x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx$

$$= \int \frac{x dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} + \int \tan \frac{x}{2} dx$$
$$= x \tan \frac{x}{2} - \int \tan \frac{x}{2} dx + \int \tan \frac{x}{2} dx$$
$$= x \tan \frac{x}{2} + C.$$

例9 求 $\int \left[\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)} \right] dx.$

解 原式 $= \int \frac{f(x)}{f'(x)} \left[1 - \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)} \right] dx$

$$= \int \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} dx$$
$$= \int \frac{f(x)}{f'(x)} d\left[\frac{f(x)}{f'(x)} \right]$$
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{f(x)}{f'(x)} \right]^2 + C.$$

例10 求 $\int \max\{1, |x|\} dx$.

解 设 $f(x) = \max\{1, |x|\}$,

$$\text{则 } f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 必存在原函数 $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + C_1, & x < -1 \\ x + C_2, & -1 \leq x \leq 1. \\ \frac{1}{2}x^2 + C_3, & x > 1 \end{cases}$$

又 $\because F(x)$ 须处处连续, 有

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (x + C_2) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-\frac{1}{2}x^2 + C_1\right) \text{ 即 } -1 + C_2 = -\frac{1}{2} + C_1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{2}x^2 + C_3\right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + C_2) \quad \text{即 } \frac{1}{2} + C_3 = 1 + C_2,$$

联立并令 $C_1 = C$,

可得 $C_2 = \frac{1}{2} + C$, $C_3 = 1 + C$.

$$\text{故 } \int \max\{1, |x|\} dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + C, & x < -1 \\ x + \frac{1}{2} + C, & -1 \leq x \leq 1. \\ \frac{1}{2}x^2 + 1 + C, & x > 1 \end{cases}$$



二、测验题

一、选择题 (20 分):

1. 设 $F_1(x), F_2(x)$ 是区间 I 内连续函数 $f(x)$ 的两个不同的原函数且 $f(x) \neq 0$, 则在区间 I 内必有 ()

- (A) $F_1(x) + F_2(x) = C$; (B) $F_1(x) \cdot F_2(x) = C$;
(C) $F_1(x) = CF_2(x)$; (D) $F_1(x) - F_2(x) = C$.

2. 若 $F'(x) = f(x)$, 则 $\int dF(x) =$ ()

- (A) $f(x)$; (B) $F(x)$; (C) $f(x) + C$; (D) $F(x) + C$.

3. $f(x)$ 在某区间内具备了条件 (), 就可保证它的原函数一定存在

- (A) 有极限; (B) 连续; (C) 有界; (D) 有有限个间断点.

4. 下列结论正确的是 ()

- (A) 初等函数必存在原函数;
- (B) 每个不定积分都可以表示为初等函数;
- (C) 初等函数的原函数必定是初等函数;
- (D) A, B, C 都不对.

5. 函数 $f(x) = (x + |x|)^2$ 的一个原函数 $F(x) = ()$

- (A) $\frac{4}{3}x^3$;
- (B) $\frac{4}{3}|x|x^2$;
- (C) $\frac{2}{3}x(x^2 + |x|^2)$;
- (D) $\frac{2}{3}x^2(x + |x|)$.

6. 已知一个函数的导数为 $y' = 2x$, 且 $x = 1$ 时 $y = 2$, 这个函数是 ()

- (A) $y = x^2 + C$; (B) $y = x^2 + 1$;
(C) $y = 2x^2 + C$; (D) $y = x + 1$.

7. 下列积分能用初等函数表出的是 ()

- (A) $\int e^{-x^2} dx$; (B) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$; (C) $\int \frac{dx}{\ln x}$; (D) $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

8. $\int f(x)dx = F(x) + C$, 且 $x = at + b$, 则 $\int f(t)dt =$ ()

- (A) $F(x) + C$; (B) $F(t) + C$;
(C) $\frac{1}{a}F(at + b) + C$; (D) $F(at + b) + C$.

9. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = (\quad)$

(A) $\frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + C;$

(B) $-\frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + C;$

(C) $\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C;$

(D) $-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C.$

10. $\int \frac{dx}{(4x+1)^{10}} = (\quad)$

(A) $\frac{1}{9} \frac{1}{(4x+1)^9} + C;$

(B) $\frac{1}{36} \frac{1}{(4x+1)^9} + C;$

(C) $-\frac{1}{36} \frac{1}{(4x+1)^9} + C;$

(D) $-\frac{1}{36} \frac{1}{(4x+1)^{11}} + C.$

二、求下列不定积分（40 分）：

1. $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx;$

2. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5};$

3. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx;$

4. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1-x^2}};$

5. $\int \frac{x+1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx;$

6. $\int \frac{dx}{e^x (1+e^{2x})};$

7. $\int x^2 \arccos x dx;$

8. $\int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2}.$

三、(20 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x \ln(1+x^2), & x \geq 0 \\ (x^2 + 2x - 3)e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$,

求 $\int f(x)dx$.

四、(20 分) 设当 $x \neq 0$ 时, $f'(x)$ 连续, 求

$$\int \frac{xf'(x) - (1+x)f(x)}{x^2 e^x} dx.$$



测验题答案

一、 1. D; 2. D; 3. B; 4. D; 5. D;
 6. B; 7. D; 8. B; 9. D; 10. C.

二、 1. $-\sin \frac{1}{x} + C$; 2. $\frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C$;
 3. $\frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + C$;
 4. $-\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x + C$;
 5. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \arcsin \frac{1}{x} + C$; 6. $-e^{-x} - \arctan e^x + C$;

$$7. \frac{1}{3} x^3 \arccos x + \frac{1}{9} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \sqrt{1 - x^2} + C;$$

$$8. \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln(1 + x^4) - \ln(x^4 + 2) + C.$$

$$\text{三、} \int f(x) dx =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} x^2 \ln(1 + x^2) - \frac{1}{2} [x^2 - \ln(1 + x^2)] + C, & x \geq 0 \\ -(x^2 + 4x + 1)e^{-x} + 1 + C, & x < 0. \end{cases}$$

$$\text{四、} \frac{f(x)}{xe^x} + C.$$