第四章 不定积分

第四讲： 有理函数的积分

1　有理函数积分法

1、有理函数

由两个多项式的商表示的函数.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

其中m、n都是非负整数；$a_0,a_1,\cdots,a_n$及

$b_0,b_1,\cdots,b_m$都是实数，并且$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$.

假定分子与分母之间没有公因式

(1) $n < m$，这有理函数是**真分式**；

(2) $n \geq m$，这有理函数是**假分式**；

利用多项式除法，假分式可以化成一个多项式和一个真分式之和.

如，$$\frac{x^3+x+1}{x^2+1} = x + \frac{1}{x^2+1}.$$

难点： 将有理函数化为部分分式之和.

2、化有理函数为最简分式之和

（1）分母中若有因式 $(x-a)^k$，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},$$

其中$A_1, A_2, \cdots, A_k$都是常数.

特殊地：$k=1$, 分解后为 $\dfrac{A}{x-a}$;

（2）分母中若有因式 $(x^2+px+q)^k$，其中

$p^2-4q<0$，　则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

其中M_i, N_i都是常数$(i=1,2,\cdots,k)$.

特殊地：$k=1$，分解后为 $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

3、化真分式化为最简分式之和的**待定系数法**

例1 $$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

$$\because \quad x+3=A(x-3)+B(x-2),$$

$$\therefore \quad x+3=(A+B)x-(3A+2B),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1, \\ -(3A+2B)=3, \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A=-5 \\ B=6 \end{cases},$$

$$\therefore \quad \frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}.$$

例2 $$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1},$$

$$1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1) \qquad (1)$$

代入特殊值来确定系数 A,B,C

取 $x=0,\ \Rightarrow A=1$ 　　取 $x=1, \Rightarrow B=1$

取 $x=2,$ 并将 A,B 值代入 (1) $\Rightarrow C=-1$

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

例3 $$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2},$$

$$1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x),$$

整理得 $1=(A+2B)x^2+(B+2C)x+C+A,$

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Rightarrow A=\frac{4}{5}, B=-\frac{2}{5}, C=\frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{\frac{4}{5}}{1+2x}+\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

例4 求不定积分 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x.$

解 $$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x = \int \left[\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$$

$$= \ln x - \frac{1}{x-1} - \ln(x-1) + C.$$

例5 求不定积分 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x.$

解 $$\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x}\mathrm{d}x + \int \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}\ln(1+2x) - \frac{1}{5}\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{5}\ln(1+2x) - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C.$$

说明：将有理函数化为部分分式之和后，只出现三类情况：

(1) 多项式； (2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$； (3) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$；

讨论积分 $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$,

$$\because\ x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4},\ 令\ x+\frac{p}{2}=t$$

记 $x^2 + px + q = t^2 + a^2$， $Mx + N = Mt + b,$

则 $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$， $b = N - \frac{Mp}{2}$，

$$\therefore \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x = \int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t$$

$$+\int \frac{b}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t.$$

(1) $n=1$, $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{b}{a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C;$$

(2) $n>1$, $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{M}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+b\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t.$$

这三类积分均可积出，且原函数都是初等函数.

结论：有理函数的原函数都是初等函数.

2 三角有理式的积分法

1、三角有理式

由三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数称之．一般记为 $R(\sin x, \cos x)$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\qquad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

2、万能置换公式

设 $u=\tan\dfrac{x}{2}$，即 $x=2\arctan u$，则

$$\boxed{\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u}$$

$$\boxed{\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u.}$$

例6 求不定积分 $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x.$

解　由万能置换公式 $u=\tan\frac{x}{2}$,

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u.$$

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u$$

$$=\int \frac{2u+1+u^2-1-u^2}{(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u$$

$$=\int\frac{(1+u)^2-(1+u^2)}{(1+u)(1+u^2)}\mathrm{d}u=\int\frac{1+u}{1+u^2}\mathrm{d}u-\int\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u$$

$$=\arctan u+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)-\ln|1+u|+C$$

$$\because\quad u=\tan\frac{x}{2}$$

$$=\frac{x}{2}+\ln|\sec\frac{x}{2}|-\ln|1+\tan\frac{x}{2}|+C.$$

例7 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

解 $u=\tan\frac{x}{2}$, $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$, $dx=\frac{2du}{1+u^2}$,

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4}du$$

$$= \frac{1}{8}[-\frac{1}{3u^3}-\frac{3}{u}+3u+\frac{u^3}{3}]+C$$

$$= -\frac{1}{24\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3}-\frac{3}{8\tan\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{24}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^3+C.$$

另解　　修改万能置换公式，令 $u=\tan x$

$$\sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\qquad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2},$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x}=\int\frac{1}{\left(\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)^4}\cdot\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{1+u^2}{u^4}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{3u^3}-\frac{1}{u}+C=-\frac{1}{3}\cot^3 x-\cot x+C.$$

再解 可以不用万能置换公式.

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x = \int \csc^2 x(1+\cot^2 x)\mathrm{d}x$$

$$= \int \csc^2 x\mathrm{d}x + \int \cot^2 x \boxed{\csc^2 x\mathrm{d}x} = -\mathrm{d}(\cot x)$$

$$= -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C.$$

注意：“万能置换”并非最佳置换方法，因此在三角有理式的积分中，应优先考虑其它技巧性的方法.

例8 求不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{\sin 3x+\sin x} \mathrm{d}x.$

解 $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin 3x+\sin x}\mathrm{d}x=\int \frac{1+\sin x}{2\sin 2x\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{1+\sin x}{4\sin x\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin x\cos^2 x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}(\cos x) + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4\cos x} + \frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4}\tan x + C.$$

例9 求不定积分 $\int \frac{1}{4+5\cos x}\mathrm{d}x.$

解 作变换 $u=\tan\frac{x}{2}$，得 $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$， $\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$

则 原式 $=2\int\frac{\mathrm{d}u}{9-u^2}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u+3}{u-3}\right|+C.$

回代，得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{4+5\cos x}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+3}{\tan\frac{x}{2}-3}\right|+C.$$

3、特殊变换

根据三角有理式 $R(\sin x,\cos x)$ 的特殊性，介绍几个特殊的积分变换公式.

（1） 若三角有理式 $R(\sin x,\cos x)$ 为 $\sin x$ 的奇函数，即

$$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$$

则作变换 $u=\cos x$.

例10 求不定积分 $\int \frac{\cos^2 x \sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x.$

解 作变换 $u = \cos x$，得

$$原式 = -\int \frac{u^2}{1+u^2} \mathrm{d}u = \arctan u - u + C.$$

回代，得

$$\int \frac{\cos^2 x \sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x = \arctan \cos x - \cos x + C.$$

（2） 若三角有理式 $R(\sin x, \cos x)$ 为 $\cos x$ 的奇函数，即

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

则作变换 $u = \sin x$.

例11 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x.$

解 作变换 $u = \sin x$，得

$$\text{原式}=\int\frac{1-u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u=\int\frac{(\frac{1}{u^2}-1)\mathrm{d}u}{\frac{1}{u^2}+u^2}=\int\frac{\mathrm{d}(u+\frac{1}{u})}{2-(u+\frac{1}{u})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\mathrm{d}[\frac{1}{\sqrt{2}}(u+\frac{1}{u})]}{1-[\frac{1}{\sqrt{2}}(u+\frac{1}{u})]^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+u+\frac{1}{u}}{\sqrt{2}-u-\frac{1}{u}}\right|+C.$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin x+\sin^2 x}{1-\sqrt{2}\sin x+\sin^2 x}\right|+C.$$

（3）若三角有理式 $R(\sin x, \cos x)$ 为 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的偶函数，即

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

则作变换 $u = \tan x$.

例12 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^4 x} \mathrm{d}x.$

解 作变换 $u = \tan x$，得

$$\sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

原式 $= \int (\frac{1}{u^2} + 3 + 2u^2)\mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^3 + 3u - \frac{1}{u} + C.$

回代，得

$$\int \frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^4 x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\tan^3 x + 3\tan x - \cot x + C.$$

注意：任意多元函数均可分解为关于某个变量的一个奇函数和一个偶函数的代数和形式.

（4） 若 $R(\sin x, \cos x)$ 为任意三角有理式时，先作代换 $x = 2t$，则

$$R(\sin x, \cos x) = R(2\sin t\cos t, 2\cos^2 t - 1)$$

为 $\sin t, \cos t$ 的偶函数，然后，再作变换 $u = \tan t$.

例13 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{4+5\cos x}\mathrm{d}x.$

解 先作变换 $x = 2t$，得

$$原式 = \int \frac{2\mathrm{d}t}{4+5\cos 2t}.$$

再作变换 $u = \tan t$，得

$$\cos 2t = \frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2},$$

则上式简化后变为

$$原式 = 2\int \frac{\mathrm{d}u}{9-u^2} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u+3}{u-3}\right| + C.$$

回代，得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4+5\cos x} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+3}{\tan\frac{x}{2}-3}\right| + C.$$

3　简单无理式积分法

讨论类型

$$R(x,\sqrt[n]{ax+b}),\quad R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right).$$

解决方法　作代换去掉根号.

例14 求不定积分 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x$

解 令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t \Rightarrow \frac{1+x}{x} = t^2,$

$$x = \frac{1}{t^2 - 1}, \qquad \mathrm{d}x = -\frac{2t\mathrm{d}t}{\left(t^2-1\right)^2},$$

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\mathrm{d}x=-\int\left(t^2-1\right)t\frac{2t\mathrm{d}t}{\left(t^2-1\right)^2}=-2\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{t^2-1}$$

$$=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln|x|\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-2\ln|\sqrt{1+x}-\sqrt{x}|+C.$$

例15 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x.$

解 令 $t^6 = x+1 \Rightarrow 6t^5\mathrm{d}t = \mathrm{d}x,$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x = \int \frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\mathrm{d}t}{t+1}$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\sqrt[6]{x+1}$$

$$- 6\ln(\sqrt[6]{x+1}+1) + C.$$

说明： 无理函数去根号时, 取根指数的**最小公倍数**.

例16 求不定积分 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1}}$.

解 先对分母进行有理化

$$\text{原式} = \int \frac{x(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})\mathrm{d}x}{(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+1})(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})}$$

$$= \int (\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1})\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int \sqrt{3x+1}\mathrm{d}(3x+1) - \frac{1}{2}\int \sqrt{2x+1}\mathrm{d}(2x+1)$$

$$= \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

5 小结与思考题

有理式分解成部分分式之和的积分.

（注意：先化为真分式！）

三角有理式的积分（万能置换公式）.

（注意：万能置换慎用！）

简单无理式的积分.

思考题

将分式分解成部分分式之和时应注意什么？

思考题解答

分解后的部分分式必须是最简分式.

课堂练习题

一、 填空题：

1. $\int \frac{3}{x^3+1}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x$，其中

$A=$_____, $B=$_____, $C=$_____;

2. $\int \frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x-1)} = \int\left[\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}\right]\mathrm{d}x$,

其中 $A=$_____, $B=$_____, $C=$_____;

3、计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$，可用万能代换 $\sin x=$_____, $\mathrm{d}x=$_____;

4、计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax+b}+m}$，令 $t=$_____, $x=$_____, $\mathrm{d}x=$_____.

二、求下列不定积分：

1. $\int \frac{(x^4+1)\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x-1)}$； 2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\tan x}$；

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{5\cos^2 x-4}$； 4. $\int \frac{\sqrt{x(1+x)}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$；

5. $\int \frac{1+x^4}{1+x^6}\mathrm{d}x$； 6. $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\mathrm{d}x$；

7. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$； 8. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$；

9. $\displaystyle\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{(1+x^8)^2}$；

10. $\displaystyle\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{1+\sin x}$；

11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$；

12. $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$；

13. $\displaystyle\int [\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^2\mathrm{d}x$；

14. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x$；

15. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$；

16. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

课堂练习题答案

一、1. $1, -1, 2$； 2. $-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$；

3. $\frac{2u}{1+u^2}, \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$； 4. $\sqrt{ax+b}$, $\frac{t^2-b}{a}$, $\frac{2t}{a}\mathrm{d}t$.

二、1. $x+\frac{1}{2}x^2-\arctan x+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{1+x^2}}+C$;

2. $\frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}|-\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C$ ；

3. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2\tan x}{1-2\tan x}\right|+C$ ；

4. $\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{4}{15}x^{5/2}+\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}-\frac{4}{15}(1+x)^{5/2}+C$;

5. $\arctan x+\frac{1}{3}\arctan x^3+C$；

6. $\ln(x+\sin x)+C$；

7. $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$；

8. $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln(\sec x+\tan x)+C$；

9. $\frac{x^4}{8(1+x^8)}+\frac{1}{8}\arctan x^4+C$；

10. $x+\sec x-\tan x+C$；

11. $\ln \dfrac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C$；

12. $\dfrac{xe^x}{e^x+1}-\ln(1+e^x)+C$；

13. $x[\ln x+\sqrt{1+x^2})]^2-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C$；

14. $\dfrac{1}{4}(\arcsin x)^2+\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\dfrac{1}{4}x^2+C$；

15. $\dfrac{1}{2}(\sin x-\cos x)+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\cos x}{1+\sqrt{2}\sin x}+C$；

16. $2\arctan\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}+C$.

6　积分表的使用法

（1）常用积分公式汇集成的表称为**积分表**.

（2）积分表是按照被积函数的类型来排列的.

（3）求积分时，可根据被积函数的类型直接或经过简单变形后，查得所需结果.

（4）不定积分公式表见附录.

例16　求 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(3x+4)^2}$.　（含有 $ax+b$ ）

在积分表（一）中查得公式 7.

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{(ax+b)^2} = \frac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right] + C$$

现在 $a=3,\quad b=4$ 于是

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{(3x+4)^2} = \frac{1}{9}\left[\ln|3x+4| + \frac{4}{3x+4}\right] + C.$$

例17 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{5-4\cos x}$. （含有三角函数）

在积分表（十一）中查得此类公式有两个

$\because a=5,\quad b=-4\quad a^2>b^2$ 选公式 105.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

将 $a=5,\quad b=-4$ 代入得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{5-4\cos x}=\frac{2}{3}\arctan\left(3\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

说明: 初等函数在其定义域内原函数一定存在，

但原函数不一定都是初等函数.

如，$\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$; $\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$; $\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$;

$\int \sin x^2\mathrm{d}x$; $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}}$; $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$;… …

课堂练习题

利用积分表计算下列不定积分：

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-9}}$.

2. $\displaystyle\int \sqrt{2x^2+9}\,\mathrm{d}x$.

3. $\displaystyle\int x\arcsin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

4. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x$.

5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1-x)}$.

6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

7. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2-2}\,\mathrm{d}x$.

8. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$.

课堂练习题答案

1. $\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-9}\right|+C.$

2. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+9}+\frac{9\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+9}+C.$

3. $(\frac{x^2}{2}-1)\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}+C.$

4. $-\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{13}(2\sin 3x+3\cos 3x).$ 5. $-\frac{1}{x}-\ln\left|\frac{1-x}{x}\right|+C.$

6. $\arccos\frac{1}{|x|}+C.$ 7. $\frac{x(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}{4}-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-2})+C.$

8. $\sqrt{(1-x)(1+x)}+2\arcsin\sqrt{\frac{x+1}{2}}+C.$