第四章 不定积分

第三讲： 分部积分法

1. 分部积分法

问题 $\int x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = ?$

解决思路 利用两个函数乘积的求导法则.

设函数$u = u(x)$和$v = v(x)$具有连续导数,

$$(uv)' = u'v + uv', \qquad uv' = (uv)' - u'v,$$

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x, \quad \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

分部积分公式

例1 求不定积分 $\int x\cos x\mathrm{d}x$.

解一 令 $u=\cos x$, $x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)=\mathrm{d}v$

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\cos x+\frac{1}{2}\int x^2\sin x\mathrm{d}x$$

显然，u 选择不当，积分更难进行.

解二 令 $u=x$, $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)=\mathrm{d}v$

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=x\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x$$

$$=x\sin x+\cos x+C.$$

例2　求不定积分 $\int e^x \cosh x dx$.

解一　令 $u = \cosh x,\ e^x dx = de^x,\ v = e^x$,

$$\int e^x \cosh x dx = e^x \cosh x - \int e^x \sinh x dx$$

$$= e^x \cosh x - e^x \sinh x + \int e^x \cosh x dx.$$

显然， u 选择不当，出现不良循环.

解二　令 $u = e^x, \cosh x dx = d(\sinh x) = dv$

$$\int e^x \cosh x dx = e^x \sinh x - \int e^x \sinh x dx$$

$$= e^x \sinh x - e^x \cosh x + \int e^x \cosh x dx.$$

显然， u 选择不当，出现不良循环.

解三 $\int e^x \cosh x dx = \int e^x \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) dx$

$$= \frac{1}{2}\int e^x (e^x + e^{-x}) dx = \frac{1}{2}\int (e^{2x} + 1) dx$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}e^{2x} + x) + C = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2x) + C.$$

例3 求不定积分 $\int x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x.$

解 令 $u=x,\quad \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mathrm{e}^{x}=\mathrm{d}v,$

$$\int x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^{x}-\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}(x-1)+C.$$

例32 求不定积分 $I_n=\int x^{n}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x.$

解 令 $u=x^{n},\quad \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mathrm{e}^{x}=\mathrm{d}v,$

$$I_n=\int x^{n}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=x^{n}\mathrm{e}^{x}-n\int x^{n-1}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x.$$

$$I_n=x^{n}\mathrm{e}^{x}-nI_{n-1},\quad I_{n-1}=x^{n-1}\mathrm{e}^{x}-(n-1)I_{n-2},$$

$$I_n = x^n \mathrm{e}^x - n[x^{n-1}\mathrm{e}^x - (n-1)I_{n-2}]$$

$$= x^n \mathrm{e}^x - nx^{n-1}\mathrm{e}^x + n(n-1)I_{n-2}$$

$$I_n = \mathrm{e}^x \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

$$= \frac{n!}{n!} x^n \mathrm{e}^x - \frac{n!}{(n-1)!} x^{n-1}\mathrm{e}^x + \frac{n!}{(n-2)!} I_{n-2}$$

$$= \mathrm{e}^x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} x^{n-k} + \frac{(-1)^n n!}{0!} I_0,$$

总结： 若被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就考虑设幂函数为u，使其降幂一次(假定幂指数是正整数)

例4　求不定积分 $\int x\arctan x\mathrm{d}x.$

解　令 $u=\arctan x$，　$x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\dfrac{x^2}{2}=\mathrm{d}v$

$$\int x\arctan x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\mathrm{d}(\arctan x)$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\int\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C.$$

$$=\frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x-\frac{1}{2}x+C.$$

例5 求不定积分 $\int x^3 \ln x \mathrm{d}x$.

解 $u=\ln x$, $x^3\mathrm{d}x=\mathrm{d}\frac{x^4}{4}=\mathrm{d}v$,

$$\int x^3 \ln x \mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C.$$

总结：若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u.

例6 求不定积分 $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$.

解 $\boxed{\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x} = x\sin(\ln x) - \int x\mathrm{d}[\sin(\ln x)]$

$$= x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + \int x\mathrm{d}[\cos(\ln x)]$$

$$= x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] - \boxed{\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x}$$

$$\therefore \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

例7　求不定积分 $\int e^x \sin x dx$.

解 $\boxed{\int e^x \sin x dx} = \int \sin x de^x$

$= e^x \sin x - \int e^x d(\sin x)$

$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x$

$= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x d\cos x)$

$= e^x (\sin x - \cos x) - \boxed{\int e^x \sin x dx}$ 注意循环形式

$\therefore \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$

例8 求不定积分 $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

解 $\because \quad \left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$

$$\therefore \quad \int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \arctan x \,\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}(\arctan x)$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}} \quad 令\ x = \tan t$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \int \sec t\mathrm{d}t$$

$$= \ln|\sec t + \tan t| + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

例9 求不定积分 $\int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

解 原式 $=\int \ln(1+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}(1+\sqrt{1+x^2})$

$=(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\int \mathrm{d}(1+\sqrt{1+x^2})$

$=(1+\sqrt{1+x^2})[\ln(1+\sqrt{1+x^2})-1]+C.$

例10 求不定积分 $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.$

解 原式 $= \int \frac{(x+1-1)\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{1+x} - \int \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{(1+x)^2}$$

$$= \int \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{1+x} - \left[-\frac{\mathrm{e}^x}{1+x} + \int \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{d}x}{1+x}\right] = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x} + C.$$

例 11 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}，求不定积分

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x.$$

解 $\because \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$, $\therefore \int f(x)\mathrm{d}x = e^{-x^2} + C$,

两边同时对 x 求导, 得 $f(x) = -2xe^{-x^2}$.

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}f(x) = xf(x) - \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$= -2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + C.$$

2　小结与思考题

合理选择 u，正确使用分部积分公式

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x; \qquad \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

选择u的有效方法:LIATE选择法

L----对数函数；　　I----反三角函数；

A----代数函数；　　T----三角函数；

E----指数函数；　　哪个在前哪个选作u.

思考题

在接连几次应用分部积分公式时，应注意什么？

思考题解答

注意前后几次所选的 u 应为同类型函数.

例: $\int e^x \cos x dx$

第一次时若选 $u = \cos x$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

第二次时仍应选 $u = \sin x$

课堂练习题

一、 填空题：

1、 计算$\int x^2 \ln x\mathrm{d}x$， 可设$u=$________，$\mathrm{d}v=$_________；

2、计算$\int \mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$，可设$u=$_______，$\mathrm{d}v=$_________；

3、计算$\int x^2 \arctan x\mathrm{d}x$，可设$u=$_______ ，$\mathrm{d}v=$_______；

4、计算$\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$，可设$u=$__________，$\mathrm{d}v=$__________.

二、　求下列不定积分（分部积分法）：

1、 $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} \mathrm{d}x$;

2、 $\int \mathrm{e}^x \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x\right) \mathrm{d}x$;

3、 $\int \ln(1+x^2) \mathrm{d}x$;

4、 $\int \frac{1}{x} \ln \ln x \mathrm{d}x$.

三、已知$\dfrac{\sin x}{x}$是$f(x)$的一个原函数，求$\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

四、设$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$， $f(x)$可微，且$f(x)$的反函数$f^{-1}(x)$存在，则

$$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x = xf^{-1}(x) - F\left[f^{-1}(x)\right] + C.$$

课堂练习题答案

一、1、$\ln x$, $x^2\mathrm{d}x$ ； 2、e^{-x}, $\cos x\mathrm{d}x$ 或 $\cos x$ ， $\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ ；

3、$\arctan x$, $x^2\mathrm{d}x$ ； 4、$x,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

二、1、$x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{2}\arctan^2 x+C$;

2、$\mathrm{e}^x\arcsin x+C$; 3、$x\ln(1+x^2)+2\arctan x-2x+C$;

4、$\ln x\ln\ln x-\ln x+C$.

三、$\cos x-\dfrac{2\sin x}{x}+C$.

四、提示：1、求导检验；2、分布积分法， $x=f[f^{-1}(x)]$.