第四章 不定积分

第二讲： 换元积分法

一、 换元积分法

1、第一类换元积分法

问题 $\int \cos 2x\mathrm{d}x \overset{?}{=} \sin 2x + C,$

解决方法 利用复合函数，设置中间变量.

过程 令 $t = 2x \quad \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t,$

$$\int \cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

在一般情况下：

设 $F'(u)=f(u)$, 则 $\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C.$

如果 $u=\varphi(x)$（可微）

$\because \quad \mathrm{d}F[\varphi(x)]=f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$

$\therefore \quad \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=F[\varphi(x)]+C$

$=[\int f(u)\mathrm{d}u]_{u=\varphi(x)}$ 由此可得换元法定理

定理1 设 $f(u)$ 具有原函数，$u=\varphi(x)$ 可导，

则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}$$

第一类换元公式（**凑微分法**）

说明： 使用此公式的关键在于将

$$\int g(x)\mathrm{d}x \text{ 化为 } \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

观察重点不同，所得结论不同.

例1　求不定积分 $\int \sin 2x\mathrm{d}x.$

解（一）$\int \sin 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin 2x\mathrm{d}(2x)$

$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C;$

解（二）$\int \sin 2x\mathrm{d}x = 2\int \sin x\cos x\mathrm{d}x$

$= 2\int \sin x\mathrm{d}(\sin x) = \sin^2 x + C;$

解（三）$\int \sin 2x\mathrm{d}x = 2\int \sin x\cos x\mathrm{d}x$

$= -2\int \cos x\mathrm{d}(\cos x) = -\cos^2 x + C.$

例2 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+2x}$.

解 $$\frac{1}{3+2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+2x}\cdot(3+2x)',$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{3+2x}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{3+2x}\cdot(3+2x)'\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln|3+2x|+C.$$

一般地 $$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=ax+b}$$

例3 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)} = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{1+2\ln x}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+2\ln x)}{1+2\ln x}$

$u = 1+2\ln x$

$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|1+2\ln x| + C.$

例4 求不定积分 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(1+x)^3}$.

解 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(1+x)^3} = \int \frac{x+1-1}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$

$$= \int [\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}]\mathrm{d}(1+x)$$

$$= -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2} + C = -\frac{1+2x}{2(1+x)^2} + C.$$

例5 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}, \quad (a \neq 0).$

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{x^2}{a^2}}$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

例6 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-8x+25}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-8x+25} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-4)^2+9}$

$$= \frac{1}{3^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x-4}{3}\right)}{\left(\frac{x-4}{3}\right)^2+1}$$

$$= \frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C.$$

例7 求不定积分 $\int (1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx.$

解 $\because \left(x+\frac{1}{x}\right)' = 1-\frac{1}{x^2},$

$$\therefore \int (1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

$$= \int e^{x+\frac{1}{x}}d(x+\frac{1}{x}) = e^{x+\frac{1}{x}} + C.$$

例8　求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}}$.

原式 $=\int \frac{[\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}]\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-1}\right)}$

$$=\frac{1}{4}\int \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}\int \sqrt{2x+3}\,\mathrm{d}(2x+3)-\frac{1}{8}\int \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}(2x-1)$$

$$=\frac{1}{12}\left(\sqrt{2x+3}\right)^3-\frac{1}{12}\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+C.$$

例9　求不定积分 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x \mathrm{d}x$.

解 $\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x \mathrm{d}x = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \mathrm{d}(\sin x)$

$$= \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x)^2 \mathrm{d}(\sin x)$$

$$= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) \mathrm{d}(\sin x)$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

说明： 当被积函数是三角函数相乘时，拆开奇次项去凑微分.

例10 求不定积分 $\int \cos 3x \cos 2x \mathrm{d}x$.

解 $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$,

$$\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 5x),$$

$$\int \cos 3x \cos 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C.$$

例11　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}$.

解

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\arcsin\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)}{\arcsin\frac{x}{2}} = \ln\left|\arcsin\frac{x}{2}\right| + C.$$

例12　求不定积分 $\int x^x(1+\ln x)\mathrm{d}x$.

解　$\int x^x(1+\ln x)\mathrm{d}x$

$$=\int \mathrm{e}^{x\ln x}(1+\ln x)\mathrm{d}x$$

$$=\int \mathrm{e}^{x\ln x}\mathrm{d}(x\ln x)$$

$$=\mathrm{e}^{x\ln x}+C=x^x+C.$$

例13 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x+\sin x}$

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x+\sin x}=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}(1+\tan\frac{x}{2})}=\int \frac{\mathrm{d}\ (1+\tan\frac{x}{2})}{1+\tan\frac{x}{2}}$$

$$=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

例14　求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} = \int \frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

$= \int \left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

$= \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x} = x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C.$

另解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} = \int \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}} = -\int \frac{\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{-x})}{1+\mathrm{e}^{-x}} = -\ln(1+\mathrm{e}^{-x})+C.$

例15 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int \frac{(1-\cos x)\mathrm{d}x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

$= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^2 x}$

$= -\cot x + \frac{1}{\sin x} + C = \tan\frac{x}{2} + C.$

另解: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2 x/2} = \int \frac{\mathrm{d}(x/2)}{\cos^2 x/2} = \tan\frac{x}{2} + C.$

例16 求不定积分 $\int \csc x \mathrm{d}x$.

解 $\int \csc x \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1-\cos^2 x} \qquad (u = \cos x)$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C.$$

另解：$\int \csc x \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}}$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\csc x - \cot x| + C.$$

（使用了三角函数恒等变形）

类似地，$\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C.$

例17 设 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$, 求 $f(x)$.

解 令 $u=\sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x=1-u$,

$$f'(u)=1-u,$$

$$f(u)=\int(1-u)\mathrm{d}u=u-\frac{1}{2}u^2+C,$$

$$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+C.$$

2、第二类换元积分法

问题 $\int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx = ?$

解决方法 改变中间变量的设置方法.

过程 令 $x=\sin t \Rightarrow dx=\cos t\,dt$,

$$\int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx = \int(\sin t)^5\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt$$

$$=\int \sin^5 t\cos^2 t\,dt = \cdots\cdots$$

（应用"凑微分"即可求出结果）

定理 2　设$x=\psi(t)$是单调的、可导的函数，并且$\psi'(t)\neq 0$，又设$f[\psi(t)]\psi'(t)$具有原函数，

则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\overline{\psi}(x)}$$

其中$\overline{\psi}(x)$是$x=\psi(t)$的反函数.

证　设$\Phi(t)$为$f[\psi(t)]\psi'(t)$的原函数,

令 $F(x)=\Phi[\overline{\psi}(x)]$， 则

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=f[\psi(t)]\psi'(t)\cdot\frac{1}{\psi'(t)}$$

$$=f[\psi(t)]=f(x).$$

说明$F(x)$为$f(x)$的原函数,

$$\therefore\quad\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C=\Phi[\overline{\psi}(x)]+C,$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\overline{\psi}(x)}$$

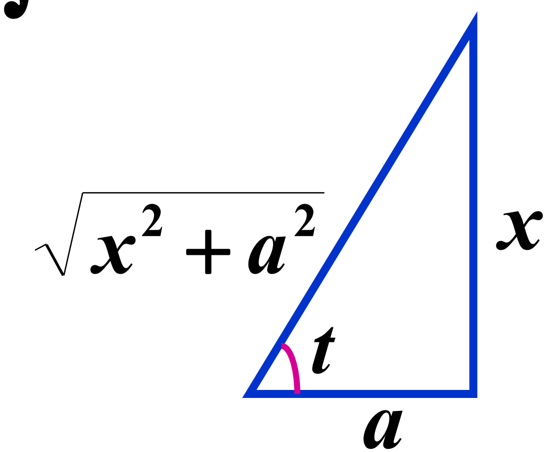
第二类积分换元公式

例18 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}, \quad (a>0).$

解 令 $x = a\tan t \Rightarrow \mathrm{d}x = a\sec^2 t\mathrm{d}t \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2 t\mathrm{d}t}{a\sec t} = \int \sec t\mathrm{d}t$$

$$= \ln|\sec t + \tan t| + C_1$$



$$= \ln\left|\sqrt{x^2+a^2} + x\right| + C.$$

其中$C = C_1 - \ln a.$

例19 求不定积分 $\int x^3\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $x=2\sin t \quad \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t \quad t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

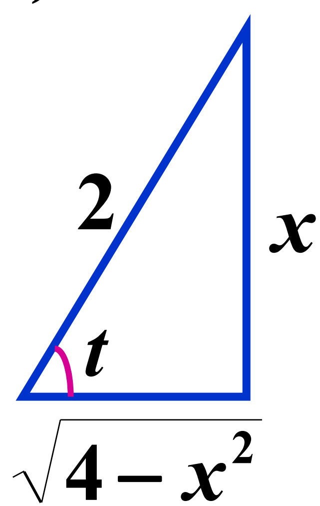
$$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\int(2\sin t)^3\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=32\int\sin^3 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=32\int\sin t(1-\cos^2 t)\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=-32\int(\cos^2 t-\cos^4 t)\mathrm{d}\cos t$$

$$=-32\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{1}{5}\cos^5 t\right)+C$$

$$=-\frac{4}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^5+C.$$



另解： $\int x^3\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x^2$

$$=\frac{1}{2}\int (x^2-4+4)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x^2$$

$$=\frac{1}{2}\int \sqrt{(4-x^2)^3}\,\mathrm{d}(4-x^2)\quad -2\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}(4-x^2)$$

$$=\frac{1}{5}\sqrt{(4-x^2)^5}-\frac{4}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}+C.$$

$$=-\frac{1}{15}(3x^2+8)\sqrt{(4-x^2)^3}+C.$$

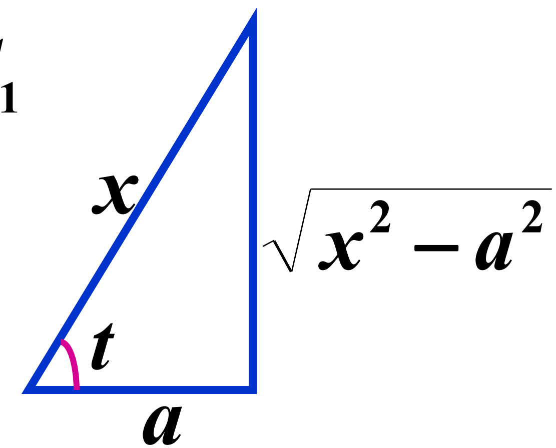
例20 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}, \quad (a>0).$

解 令$x = a\sec t$ $\mathrm{d}x = a\sec t\tan t\mathrm{d}t$ $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t$$

$$= \int \sec t\mathrm{d}t = \ln|\sec t+\tan t|+C_1$$

$$= \ln|\sqrt{x^2-a^2}+x|+C.$$



其中$C = C_1 - \ln a.$

说明(1) 以上几例所使用的均为三角代换.

三角代换的目的是化掉根式.

一般规律如下：当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2 - x^2}$ 可令 $x = a\sin t$;

(2) $\sqrt{a^2 + x^2}$ 可令 $x = a\tan t$;

(3) $\sqrt{x^2 - a^2}$ 可令 $x = a\sec t$.

说明(2) 积分中为了化掉根式除采用三角代换外还可用**双曲代换：** $\because \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

$\therefore x = a\sinh t, \quad x = a\cosh t$ 也可以化掉根式.

例21 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

解 令 $x = a\sinh t \qquad \mathrm{d}x = a\cosh t\,\mathrm{d}t$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a\cosh t}{a\cosh t}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t + C$$

$$= \operatorname{ar\,sinh}\frac{x}{a} + C = \ln\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)+C.$$

说明(3) 积分中为化掉根式是否一定采用三角代换（或双曲代换）并不是绝对的，需根据被积函数的情况来定.

例22 求不定积分 $\int \frac{x^5 \mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.（三角代换很繁琐）

解 设 $t=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2=t^2-1,\quad x\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t,$

$$\int \frac{x^5 \mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t} t \mathrm{d}t = \int \left(t^4 - 2t^2 + 1\right) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t + C$$

$$= \frac{1}{15}(8 - 4x^2 + 3x^4)\sqrt{1+x^2} + C.$$

例23 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$.

解 令 $t = \sqrt{1+\mathrm{e}^x} \Rightarrow \mathrm{e}^x = t^2 - 1,$

$$x=\ln\left(t^2-1\right),\qquad \mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}=\int\frac{2\mathrm{d}t}{t^2-1}=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\ln\left(\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1\right)-x+C.$$

说明(4) 当分母的阶较高时，用**倒代换** $x=\dfrac{1}{t}$.

例24 求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^7+2)}$.

解 设 $x=\frac{1}{t}$ $\Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^7+2)} = \int \frac{t}{\left(\frac{1}{t}\right)^7+2}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -\int \frac{t^6\mathrm{d}t}{1+2t^7} = -\frac{1}{14}\ln|1+2t^7|+C$$

$$= -\frac{1}{14}\ln|2+x^7|+\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

例25　求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2+1}}$,（分母较高阶）.

解　令 $x=\frac{1}{t} \Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^4\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -\int \frac{t^3\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{t^2\mathrm{d}t^2}{\sqrt{1+t^2}}$$

$(u=t^2)$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u}}\quad=\frac{1}{2}\int\frac{1-1-u}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+u}}-\sqrt{1+u}\right)\mathrm{d}(1+u)$$

$$=\sqrt{1+u}-\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+u}\right)^3+C$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+C.$$

$$=\frac{1}{3x^3}(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}+C.$$

说明(5) 当被积函数含有两种或两种以上的根式 $\sqrt[k]{x},\cdots,\sqrt[l]{x}$ 时，可采用令 $x=t^n$（其中 n 为各根指数的最小公倍数）

例26 求不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

解 令 $x=t^6 \Rightarrow dx=6t^5dt$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}dt = \int \frac{6t^2}{1+t^2}dt$$

$$=6\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=6[t-\arctan t]+C=6\sqrt[6]{x}-6\arctan\sqrt[6]{x}+C.$$

例27 求不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1+x}}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1+x}}=\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{1+x})^2}{1+\sqrt{1+x}}=2\int\frac{\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}$

$$=2\int(1-\frac{1}{1+\sqrt{1+x}})\mathrm{d}\sqrt{1+x}=2\sqrt{1+x}-2\ln(1+\sqrt{1+x})+C.$$

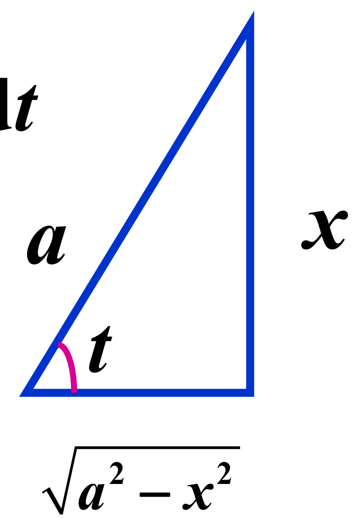
例28 求不定积分 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$，（$a > 0$）.

解 作代换： $x = a\sin t$， $dx = a\cos t\,dt$，则

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,(a\cos t\,dt)$$

$$= a^2 \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}a^2 \int (1 - \cos 2t)\,dt$$

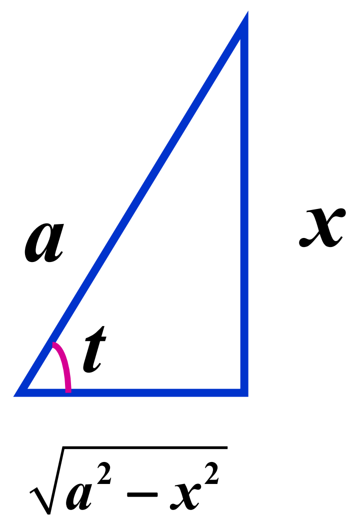
$$= \frac{1}{2}a^2\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$



$$=\frac{1}{2}a^2(t-\sin t\cos t)+C$$

$$=\frac{1}{2}a^2(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a})+C$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+C.$$



基本积分表(II)

(16) $$\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln\cos x + C;$$

(17) $$\int \cot x \mathrm{d}x = \ln\sin x + C;$$

(18) $$\int \sec x \mathrm{d}x = \ln(\sec x + \tan x) + C;$$

(19) $$\int \csc x \mathrm{d}x = \ln(\csc x - \cot x) + C;$$

(20) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C;$$

(21) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + C;$$

(22) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + C;$$

(23) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|} + C,$$

(24) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a}) + C,$$

(25) $$\int \sqrt{x^2+a}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a}) + C.$$

3　小结与思考题

两类积分换元法：

（一）凑微分

（二）三角代换、双曲代换、倒代换、根式代换

基本积分表(II)

思考题

求积分 $\int (x\ln x)^p(\ln x+1)\mathrm{d}x.$

思考题解答

$$\because \mathrm{d}(x\ln x)=(1+\ln x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore \int (x\ln x)^p(\ln x+1)\mathrm{d}x=\int (x\ln x)^p\mathrm{d}(x\ln x)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(x\ln x)^{p+1}}{p+1}+C, & p\neq -1\\ \ln(x\ln x)+C, & p=-1\end{cases}$$

课堂练习题

一、 填空题：

1、 若 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则 $\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) =$ ______；

2、 求 $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x\ (a > 0)$ 时，可作变换______，然后求积；

3、 求不定积分 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ 时，可先令 $x =$ ______；

4、 $\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} =$ ______ $\mathrm{d}(\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2})$；

5、 $\int \dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t =$ ______.

二、 求下列不定积分（第一类换元法）：

1、$\int e^{2x^2+\ln x}\mathrm{d}x$；

2、$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}$；

3、$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+5e^x}$；

4、$\int \frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$；

5、$\int \frac{\cos\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

6、$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$.

三、 求下列不定积分（第二类换元法）：

1、$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{3/2}}$； 2、$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

3、$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9x^2-6x+7}}$； 4、$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$.

5、设 $I_n=\int \tan^n x\mathrm{d}x$, $(n\geq 2)$，求证：

$$I_n=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}$$，并求 $\int \tan^5 x\mathrm{d}x$.

课堂练习题答案

一、1、$F[\varphi(x)]+C$；　2、$x=a\sec t$ 或 $x=a\csc t$；

3、$\sqrt{t}$ 或 t^{-1}；　4、-2；　5、$-2\cos\sqrt{t}+C$.

二、1、$\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$；　2、$2\sqrt{1+\tan x}+C$；

3、$x-\ln(1+5e^x)+C$；　4、$-\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)+C$；

5、$-2\tan\frac{\sqrt{x}}{2}+C$；　6、$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+C$.

三、1、$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$；　2、$\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}x+C$；

3、$\ln(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+7})+C$；　4、$\frac{x}{x-\ln x}+C$.

5、$I_n=\int \tan^n x\mathrm{d}x=\int \tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}.$$

$$I_5=\int \tan^5 x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C.$$