第四章 不定积分

第一讲： 不定积分的定义及性质

4.1　原函数

如果在区间I内，可导函数$F(x)$的导函数为$f(x)$，即$\forall x\in I$，都有

$$F'(x)=f(x)，或者\quad \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

那么函数$F(x)$就称为$f(x)$或$f(x)\mathrm{d}x$在区间I内

$f(x)\mathrm{d}x$在区间I内原函数.

如　$(\sin x)'=\cos x$　　$\sin x$是$\cos x$的原函数.

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$, $\ln x$是$\dfrac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$内的原函数.

原函数存在定理：

如果函数$f(x)$在区间I内连续，那么在区间I内存在可导函数$F(x)$，使$\forall x \in I$，都有

$$F'(x) = f(x).$$

简而言之：连续函数一定有原函数.

问题： (1) 原函数是否唯一？

(2) 若不唯一它们之间有什么联系？

如 $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x + C)' = \cos x$,

（C为任意常数）.

关于原函数的说明：

（1）若 $F'(x) = f(x)$，则对于任意常数 C，

$F(x)+C$都是$f(x)$的原函数.

（2）若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，

则 $F(x)-G(x)=C$ （C为任意常数）.

证 $\because$ $\left[F(x)-G(x)\right]'=F'(x)-G'(x)$

$=f(x)-f(x)=0$

$\therefore$ $F(x)-G(x)=C$

（C为任意常数）

4.2　不定积分

在区间 I 内，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 内的**不定积分**，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

积分号　被积函数　被积表达式　积分变量　任意常数

例1 求不定积分 $\int x^5 \mathrm{d}x.$

解 $\because \left(\dfrac{x^6}{6}\right)' = x^5, \quad \therefore \int x^5 \mathrm{d}x = \dfrac{x^6}{6} + C.$

例2 求不定积分 $\int \dfrac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x.$

解 $\because \quad (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2},$

$$\therefore \quad \int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C.$$

例3 设曲线通过点（1, 2），且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍，求此曲线方程.

解 设曲线方程为 $y = f(x)$, 根据题意知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x,$$

即 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数.

$$\because \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C, \qquad \therefore f(x) = x^2 + C,$$

由曲线通过点（1,2） $\Rightarrow C = 1,$

所求曲线方程为: $y = x^2 + 1.$

由不定积分的定义可知：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x),$$

$$\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

$$\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C.$$

结论： 微分运算与不定积分运算“**互逆**”.

基本积分表:

实例 $$\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^{\mu} \Rightarrow \int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C.$$

$(\mu \neq -1)$

启示 能否根据求导公式得出积分公式?

结论： 既然积分运算和微分运算是互逆的，因此可以根据求导公式得出积分公式.

基本积分表(I)

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ （k是常数）；

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$;

(3) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C$;

说明： $x > 0, \Rightarrow \int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C,$

$x < 0,\ [\ln(-x)]' = \dfrac{1}{-x}(-x)' = \dfrac{1}{x},$

$\Rightarrow \int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(-x) + C,\ \therefore \int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C,$

简写为 $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C.$

(4) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C;$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C;$

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C;$

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C;$

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C;$

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C;$

$$(10)\quad \int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C;$$

$$(11)\quad \int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C;$$

$$(12)\quad \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C;$$

$$(13)\quad \int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$(14)\quad \int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C;$$

$$(15)\quad \int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + C.$$

例4 求不定积分 $\int x^2\sqrt{x}\mathrm{d}x.$

解 $\int x^2\sqrt{x}\mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x$

根据积分公式（2） $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C.$$

4.3 不定积分的几何意义

因为 $f(x)$ 的原函数 $y=F(x)$ 的图形称为函数 $f(x)$ 的积分曲线，所以不定积分 $y=F(x)+C$ 表示一个积分曲线族. 它是由函数 $f(x)$ 的某个 $y=F(x)$ 沿 y 轴平移 C 单位而形成.

因此，积分曲线在同一点处的切线斜率均为 $f(x)$，这些积分曲线也称为“互相平行”.

例 5　已知自由落体运动的加速度为 g，初速度为 v_0，起点为 s_0，试求

（1） 速度函数 v 与时间 t 的关系 $v=v(t)$；

（2） 速度函数 s 与时间 t 的关系 $s=s(t)$.

解（1）　已知速度函数对时间的导数为加速度

由于 $v'=g$，所以

$$v=v(t)=\int g\mathrm{d}t=gt+C_1.$$

又因 $v(0)=v_0$，所以 $C_1=v_0$，于是

$$v=gt+v_0.$$

（2）已知路程函数对时间的导数为速度，

由于 $s' = v = gt + v_0$，所以

$$s = s(t) = \int (gt + v_0)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C_2$$

又因 $s(0) = s_0$，所以 $C_2 = s_0$，于是

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 .$$

4.4　不定积分的性质

(1)　$\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x;$

证　$\because \left[\int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x\right]'$

$$= \left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]' \pm \left[\int g(x)\mathrm{d}x\right]' = f(x) \pm g(x).$$

$\therefore$ 等式成立.

（此性质可推广到有限多个函数之和的情况）

(2) $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x.$

(k是常数，$k \neq 0$)

例6 求不定积分 $\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x.$

解 $\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$

$$= 3\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= 3\arctan x - 2\arcsin x + C$$

例7 求不定积分 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$

$= \int \left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$= \arctan x + \ln x + C.$

例8 求不定积分 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} \mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} \mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)} \mathrm{d}x$

$$= \int \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{x} + \arctan x + C.$$

例9　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x.$

解　$$\int \frac{1}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(2\cos^2 x-1)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan x + C.$$

说明： 以上几例中的被积函数都需要进行恒等变形，才能使用基本积分表.

例 10　已知一曲线$y=f(x)$在点$(x,f(x))$处的切线斜率为$\sec^2 x+\sin x$，且此曲线与y轴的交点为(0,5)，求此曲线的方程.

解　$\because \quad \dfrac{dy}{dx}=\sec^2 x+\sin x,$

$$\therefore \quad y=\int\left(\sec^2 x+\sin x\right)dx$$

$$=\tan x-\cos x+C,$$

$\because \quad y(0)=5, \qquad \therefore \quad C=6,$

所求曲线方程为 $y=\tan x-\cos x+6.$

例11 求函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{2}x+1, & x<0, \\ 1, & x=0, \\ e^x, & x>0, \end{cases}$$

的不定积分.

解

$$\int f(x)dx=\begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^2+x+C_1, & x<0, \\ C, & x=0, \\ e^x+C_2, & x>0. \end{cases}$$

由原函数的连续性可知：

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+x+C_1\right)=C=\lim_{x\to 0^+}(\mathrm{e}^x+C_2),$$

即 $C_1=C=C_2+1,$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+x+C, & x<0,\\ C, & x=0,\\ \mathrm{e}^x+C-1, & x>0.\end{cases}$$

4.5 小结与思考题

原函数的概念：$F'(x)=f(x)$

不定积分的概念：$\int f(x)dx=F(x)+C$

基本积分表(I)

求微分与求积分的“互逆”关系

不定积分的性质

思考题

符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否存在原函数？为什么？

思考题解答

不存在.

假设有原函数 $F(x)=\begin{cases} x+C, & x>0 \\ C, & x=0 \\ -x+C, & x<0 \end{cases}$

但$F(x)$在$x=0$处不可微，　故假设错误.

所以 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 内不存在原函数.

结论：　每一个含有第一类间断点的函数都没有原函数.

课堂练习题

一、 填空题：

1、一个连续函数有____________个原函数，其中任意两个的差是一个____________；

2、$f(x)$的____________称为$f(x)$的不定积分；

3、由 $F'(x)=f(x)$ 可知，在积分曲线族 $y=F(x)+C$ (C是任意常数)上横坐标相同的点处作切线，这些切线彼此是____________的；

4、若 $f(x)$ 在某区间上____________，则在该区间上

$f(x)$ 的原函数一定存在.

5、$\int x^3\sqrt{x}\,dx =$ _________；6、$\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx =$ _________；

7、$\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} =$ ________；8、$\int (2x^2-2x+3)dx =$ ________；

9、$\int (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x^3}+1)dx =$ ____________.

二、一曲线通过点 $(2,5)$，且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的立方，求该曲线的方程 .

三、 求下列不定积分：

1、$\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

2、$\displaystyle\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{2^x}\mathrm{d}x$

3、$\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

4、$\displaystyle\int \frac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$

5、$\displaystyle\int (1-\frac{1}{x})\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

6、$\displaystyle\int \frac{x^2+\sin^2 x}{x^2+1}\sec^2 x\mathrm{d}x$

课堂练习题答案

一、1、无穷多, 常数；2、全体原函数；3、平行；

4、连续；5、$\dfrac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+C$；6、$\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$；

7、 $-2x^{-\frac{1}{2}}+C$；　　8、$\dfrac{2}{3}x^{3}-x^{2}+3x+C$；

9、 $\dfrac{6}{11}x^{\frac{11}{6}}-\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+C$.

二、$y=\frac{1}{4}x^4+1$；

三、1、$x-2\arctan x+C$；　　2、$\frac{2(1.5)^x}{\ln 3-\ln 2}-5x+C$；

3、$\frac{x-\sin x}{2}+C$；　　4. $-\cot x-\tan x+C$；

5、$\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C$；　　6、$\tan x-\arctan x+C$.