

第三章 微分中值定理与导数应用

第四讲：曲率

4.1 弧微分

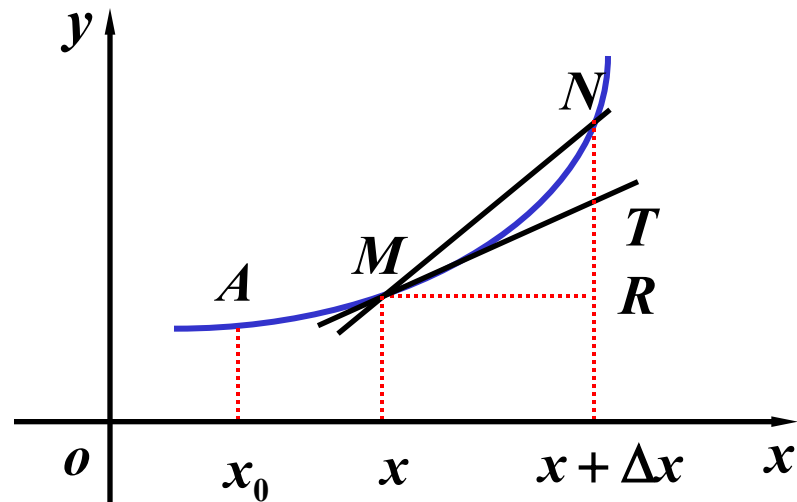
设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有连续导数.

基点: $A(x_0, y_0)$,

$M(x, y)$ 为任意一点.

规定: (1) 曲线的正向与 x 增大的方向一致;

(2) $|\widehat{AM}| = s$, 当 $\widehat{AM}$ 的方向与曲线正向一致时, s 取正号, 相反时, s 取负号.



单调增函数: $s = s(x)$.

设 $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$, 如图,

$$|MN| \leq |\widehat{MN}| \leq |MT| + |NT|$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,

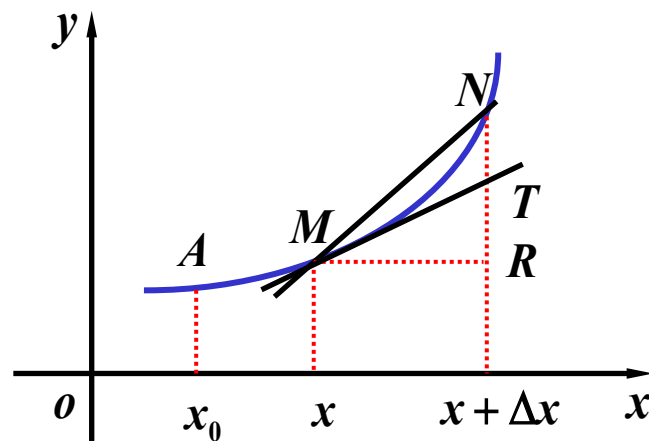
$$|MN| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} |\Delta x| \rightarrow \sqrt{1 + y'^2} |dx|,$$

$$|\widehat{MN}| = |\Delta s| \rightarrow |ds|, \quad |MT| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2} |dx|,$$

$$|NT| = |\Delta y - dy| \rightarrow 0, \quad \text{故 } |ds| = \sqrt{1 + y'^2} |dx|.$$

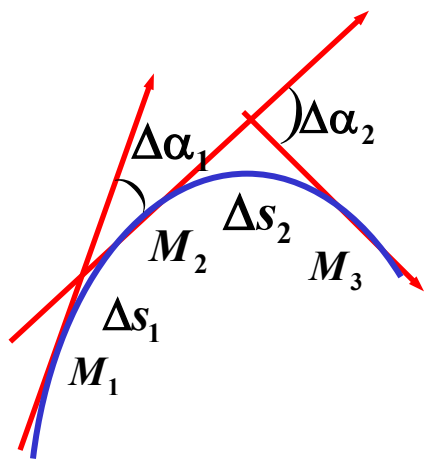
弧微分公式

$$\because s = s(x) \text{ 为单调增函数, 故 } ds = \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

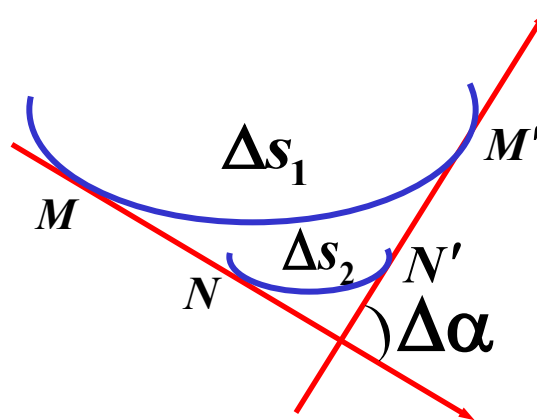


4.2 曲率

曲率是描述曲线局部性质（弯曲程度）的量。



弧段弯曲程度
越大转角越大



转角相同弧段越
短弯曲程度越大

设曲线 C 是光滑的,

M_0 是基点. $|\widehat{MM'}| = |\Delta s|$,

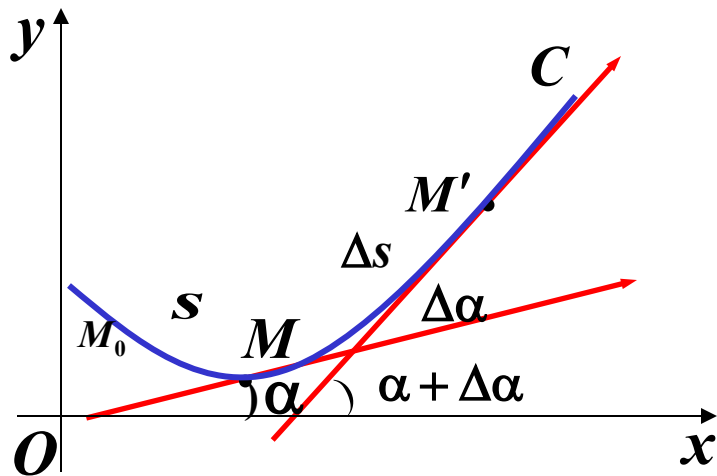
$M \rightarrow M'$ 切线转角为 $|\Delta\alpha|$.

弧段 $\widehat{MM'}$ 的平均曲率为 $\bar{k} = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$.

曲线 C 在点 M 处的曲率 $k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$

在 $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$ 存在的条件下,

$$k = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|.$$



注意： (1) 直线的曲率处处为零；

(2) 圆上各点处的曲率等于半径的倒数,且半径越小曲率越大.

4. 3. 曲率的计算公式

设 $y = f(x)$ 二阶可导, $\because \tan \alpha = y'$, 有 $\alpha = \arctan y'$,

$$d\alpha = \frac{y''}{1 + y'^2} dx,$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

如, 任意一个圆的曲率都处处相等, 且等于其半径的倒数.

$$\text{设} \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \text{二阶可导,} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

$$k = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}.$$

例20 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上哪一点的曲率最大？

解 $y' = 2ax + b, \quad y'' = 2a,$

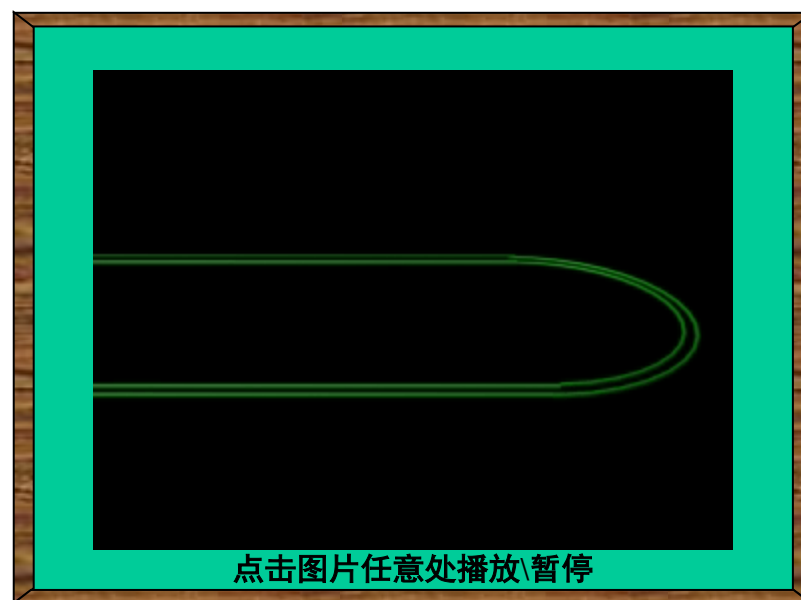
$$\therefore k = \frac{|2a|}{[1 + (2ax + b)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

显然, 当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, k 最大.

又 $\because (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$ 为抛物线的顶点,

$\therefore$ 抛物线在顶点处的曲率最大.

例21 铁轨由直道转入圆弧弯道时, 若接头处的曲率突然改变, 容易发生事故, 为了行驶平稳, 往往在直道和弯道之间接入一段缓冲段(如图), 使曲率连续地由零过渡到 $\frac{1}{R}$ (R 为圆弧轨道的半径).



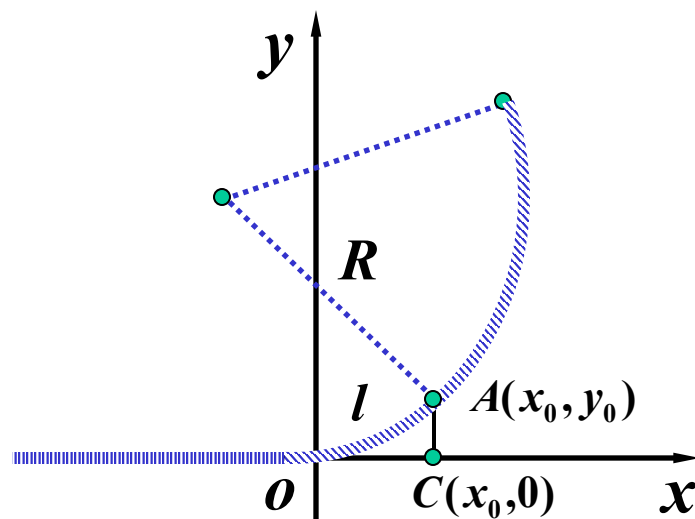
通常用三次抛物线 $y = \frac{1}{6Rl}x^3$, $x \in [0, x_0]$. 作为

缓冲段 OA , 其中 l 为 OA 的长度, 验证缓冲段 OA 在始端 O 的曲率

为零, 并且当 $\frac{l}{R}$ 很小

($\frac{l}{R} \ll 1$) 时, 在终端

A 的曲率近似为 $\frac{1}{R}$.



证 如图所示:

x 的负半轴表示直道,

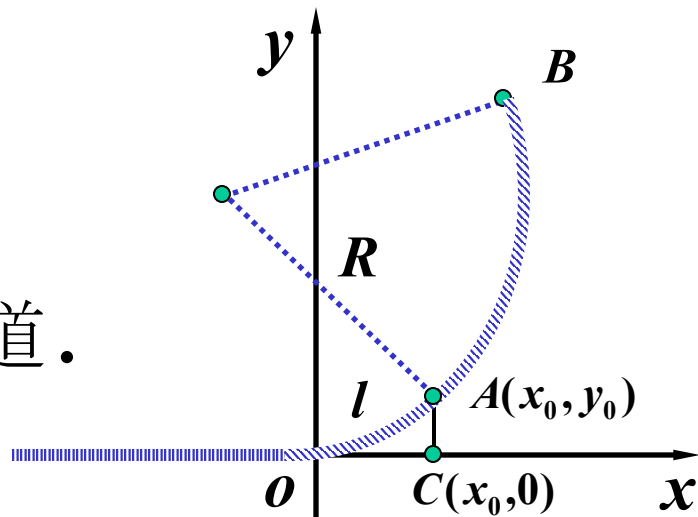
$\widehat{OA}$ 是缓冲段, $\widehat{AB}$ 是圆弧轨道.

在缓冲段上,

$$y' = \frac{1}{2Rl} x^2, \quad y'' = \frac{1}{Rl} x.$$

在 $x = 0$ 处, $y' = 0, y'' = 0$, 故缓冲始点的曲率 $k_0 = 0$.

实际要求 $l \approx x_0$,



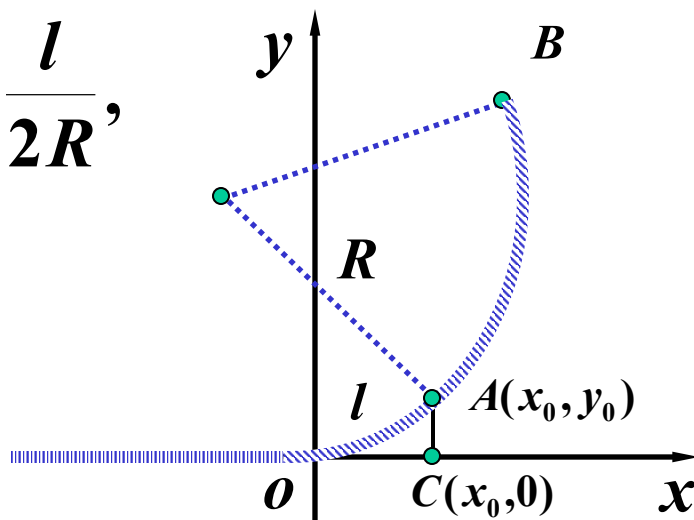
$$\text{有 } y'|_{x=x_0} = \frac{1}{2Rl} x_0^2 \approx \frac{1}{2Rl} l^2 = \frac{l}{2R},$$

$$y''|_{x=x_0} = \frac{1}{Rl} x_0 \approx \frac{1}{Rl} l = \frac{1}{R},$$

故在终端 A 的曲率为

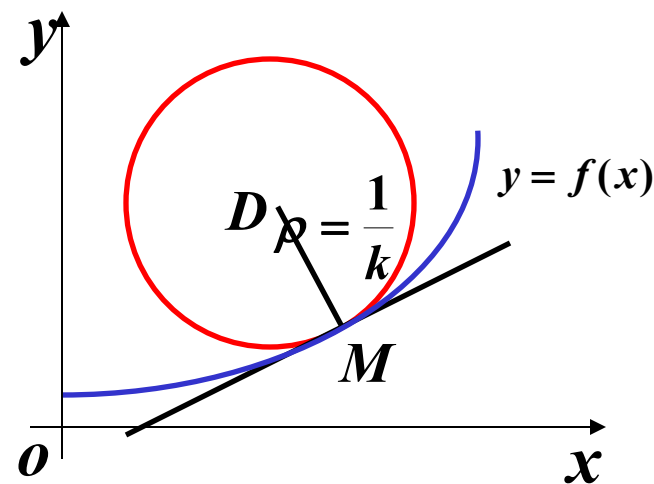
$$k_A = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\bigg|_{x=x_0} \approx \frac{\frac{1}{R}}{(1+\frac{l^2}{4R^2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$\because \frac{l}{R} \ll 1, \quad \text{略去二次项 } \frac{l^2}{4R^2}, \quad \text{得 } k_A \approx \frac{1}{R}.$$



4.4 曲率圆与曲率半径

设曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x, y)$ 处的曲率为 $k (k \neq 0)$. 在点 M 处的曲线的法线上, 在凹的一侧取一点 D , 使 $|DM| = \frac{1}{k} = \rho$. 以 D 为圆心, ρ 为半径



作圆(如图), 称此圆为曲线在点 M 处的曲率圆.

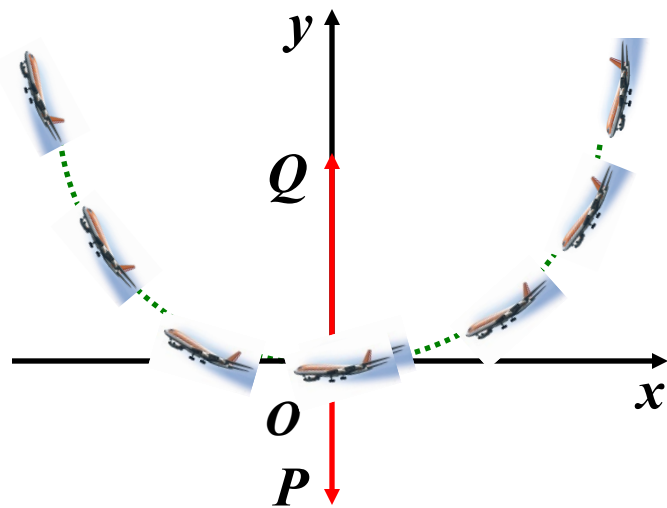
D ——— 曲率中心, ρ ——— 曲率半径.

注意：1. 曲线上一一点处的曲率半径与曲线在该点处的曲率互为倒数，即 $\rho = \frac{1}{k}, k = \frac{1}{\rho}$.

2. 曲线上一一点处的曲率半径越大, 曲线在该点处的曲率越小(曲线越平坦); 曲率半径越小, 曲率越大(曲线越弯曲).

3. 曲线上一一点处的曲率圆弧可近似代替该点附近曲线弧(称为曲线在该点附近的二次近似).

例22 飞机沿抛物线 $y = \frac{x^2}{4000}$
(单位为米)俯冲飞行,在原
点 O 处速度为 $v = 400$ 米/秒,
飞行员体重 $P = 70$ 千克.求
俯冲到原点时,飞行员对座
椅的压力 Q .



解 如图,受力分析 $F = Q - P$,

视飞行员在点 O 作匀速圆周运动, $\therefore F = \frac{mv^2}{\rho}$.

O 点处抛物线轨道的曲率半径

$$y'|_{x=0} = \frac{x}{2000}|_{x=0} = 0, \quad y''|_{x=0} = \frac{1}{2000}.$$

得曲率为 $k|_{x=x_0} = \frac{1}{2000}$. 曲率半径为 $\rho = 2000$ 米.

$$\therefore F = \frac{70 \times 400^2}{2000} = 5600(\text{牛}) \approx 571.4(\text{千克力}),$$

$$\begin{aligned} \therefore Q &\approx 70(\text{千克力}) + 571.4(\text{千克力}), \\ &= 641.5(\text{千克力}). \end{aligned}$$

即:飞行员对座椅的压力为641.5千克力.

4.5 小结与思考题

运用微分学的理论,研究曲线和曲面的性质的数学分支——微分几何学.

基本概念: 弧微分, 曲率, 曲率圆, 曲率半径.

曲线弯曲程度的描述——曲率;

曲线弧的(二次)近似代替——曲率圆(弧).

注: 当 $|y'| \ll 1$ 时, $k \approx |y''|$.

思考题

椭圆 $x = 2\cos t, y = 3\sin t$ 上哪些点处曲率最大?

思考题解答

$$\begin{aligned} k &= \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{6}{(4\sin^2 t + 9\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6}{(4 + 5\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

要使 k 最大, 必有 $(4 + 5\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}$ 最小,

$$\Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{此时 } k \text{ 最大,}$$

课堂练习题

一、 填空题：

- 1、 曲率处处为零的曲线为_____； 曲率处处相等的曲线为_____.
- 2、 抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 在 $(2, -1)$ 处的曲率为_____； 曲率半径为_____.
- 3、 曲线 $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 在 $(0, 0)$ 处的曲率为_____.

二、 曲线弧 $y = \sin x$ ($0 < x < \pi$) 上哪一点处的曲率半径最小？ 求出该点处的曲率半径.

三、 曲线上曲率最大的点称为此曲线的顶点， 试求指数曲线 $y = e^x$ 的顶点， 并求在该点处的曲率半径.

课堂练习题答案

一、 1、 直线， 圆； 2 、 $2, \frac{1}{2}$ ； 3、 0.

二、 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 处曲率半径有最小值 1.

三. $(-\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{\sqrt{2}}), \rho = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$