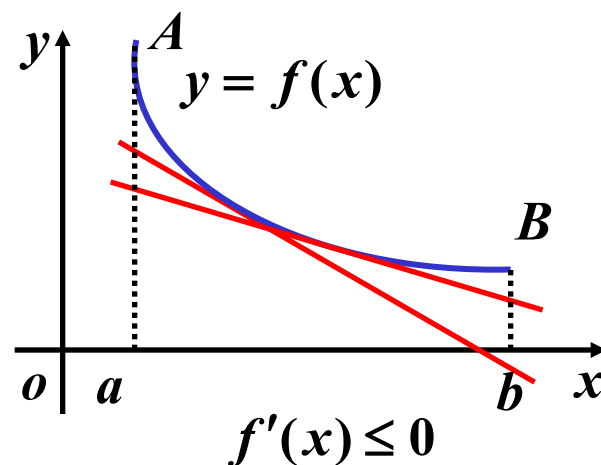
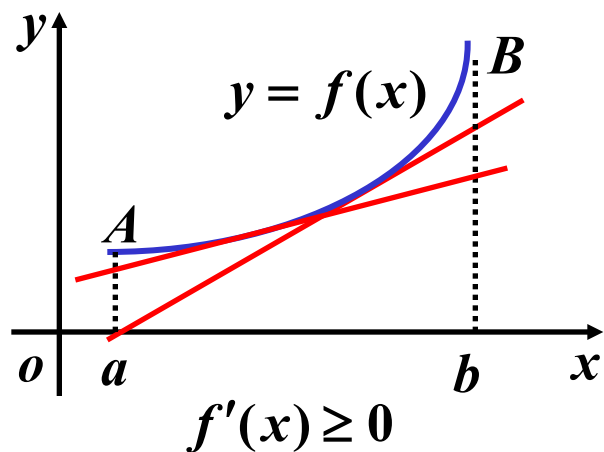


# 第三章 微分中值定理与导数应用

## 第三讲：导数的应用

# 3.1 函数单调性的判别法



引理 设  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导.

若在  $(a, b)$  内

1、  $f'(x) > 0$  , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调增加;

2、  $f'(x) < 0$  , 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调减少.

证  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 用拉氏定理得,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

其中  $x_1 < \xi < x_2$ .

$\because x_2 - x_1 > 0$ , 所以, 在 $(a,b)$ 内,

(1)  $f'(x) > 0$ , 则  $f'(\xi) > 0$ ,  $\therefore f(x_2) > f(x_1)$ .

$\therefore y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

(2)  $f'(x) < 0$ , 则  $f'(\xi) < 0$ ,  $\therefore f(x_2) < f(x_1)$ .

$\therefore y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.



例1 讨论函数  $y = e^x - x - 1$  的单调性.

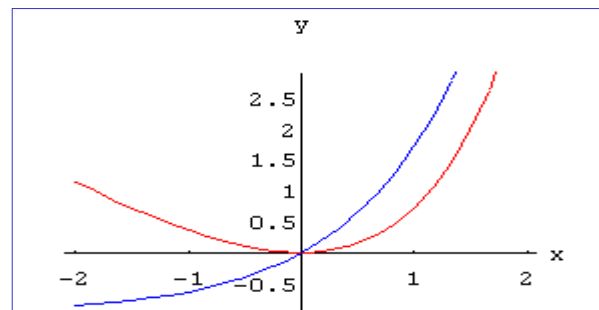
解  $\because y' = e^x - 1$ , 且  $D = (-\infty, +\infty)$ .

在  $(-\infty, 0)$  内,  $y' < 0$ ,

$\therefore$  函数单调减少

在  $(0, +\infty)$  内,  $y' > 0$ ,

$\therefore$  函数单调增加.



**注意:**函数的单调性是一个区间上的性质, 要用导数在这一区间上的符号来判定, 而不能用一点处的导数符号来判别一个区间上的单调性.

**单调区间求法:**

**问题:**函数在定义区间上不是单调的, 但在各个部分区间上单调.

若函数在其定义域的某个区间内是单调的, 则该区间称为函数的单调区间.

导数等于零的点和不可导点是单调区间的可能分界点.

**方法:** 用方程  $f'(x)=0$  的根及  $f'(x)$  不存在的点来划分函数  $f(x)$  的定义区间, 然后判断区间内导数的符号.

**例2** 确定函数  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  的单调区间.

**解**  $\because D: (-\infty, +\infty)$ .

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

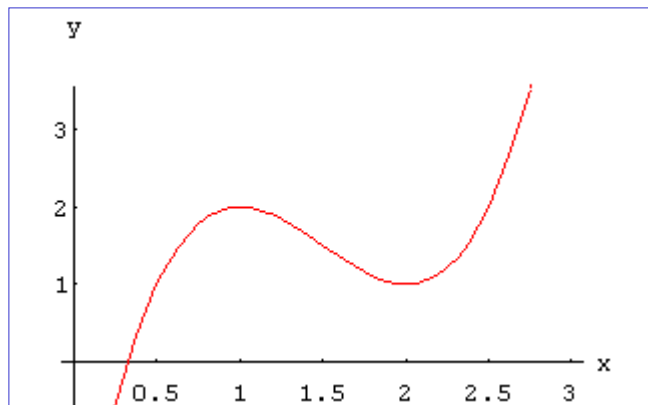
解方程  $f'(x) = 0$  得,  $x_1 = 1, x_2 = 2$ .

当  $-\infty < x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $\therefore$  在  $(-\infty, 1]$  上单调增加 ;

当  $1 < x < 2$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $\therefore$  在  $[1, 2]$  上单调减少 ;

当  $2 < x < +\infty$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $\therefore$  在  $[2, +\infty)$  上单调增加 ;

单调区间为  $(-\infty, 1]$ ,  $[1, 2]$ ,  $[2, +\infty)$ .



**例3** 确定函数  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  的单调区间.

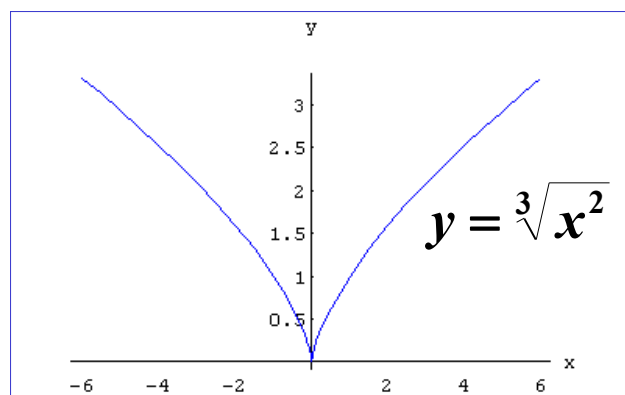
**解**  $\because D : (-\infty, +\infty)$ .  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ ,  $(x \neq 0)$

当 $x = 0$ 时,导数不存在.

当 $-\infty < x < 0$ 时,  $f'(x) < 0$ ,  $\therefore$  在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少 ;

当 $0 < x < +\infty$ 时,  $f'(x) > 0$ ,  $\therefore$  在 $[0, +\infty)$ 上单调增加 ;

单调区间为  $(-\infty, 0]$ ,  $[0, +\infty)$ .



**注意:** 区间内个别点导数为零不影响区间的单调性.

如,  $y = x^3$ ,  $y'|_{x=0} = 0$ , 但在  $(-\infty, +\infty)$  上单调增加.

**例4** 当  $x > 0$  时, 试证  $x > \ln(1+x)$  成立.

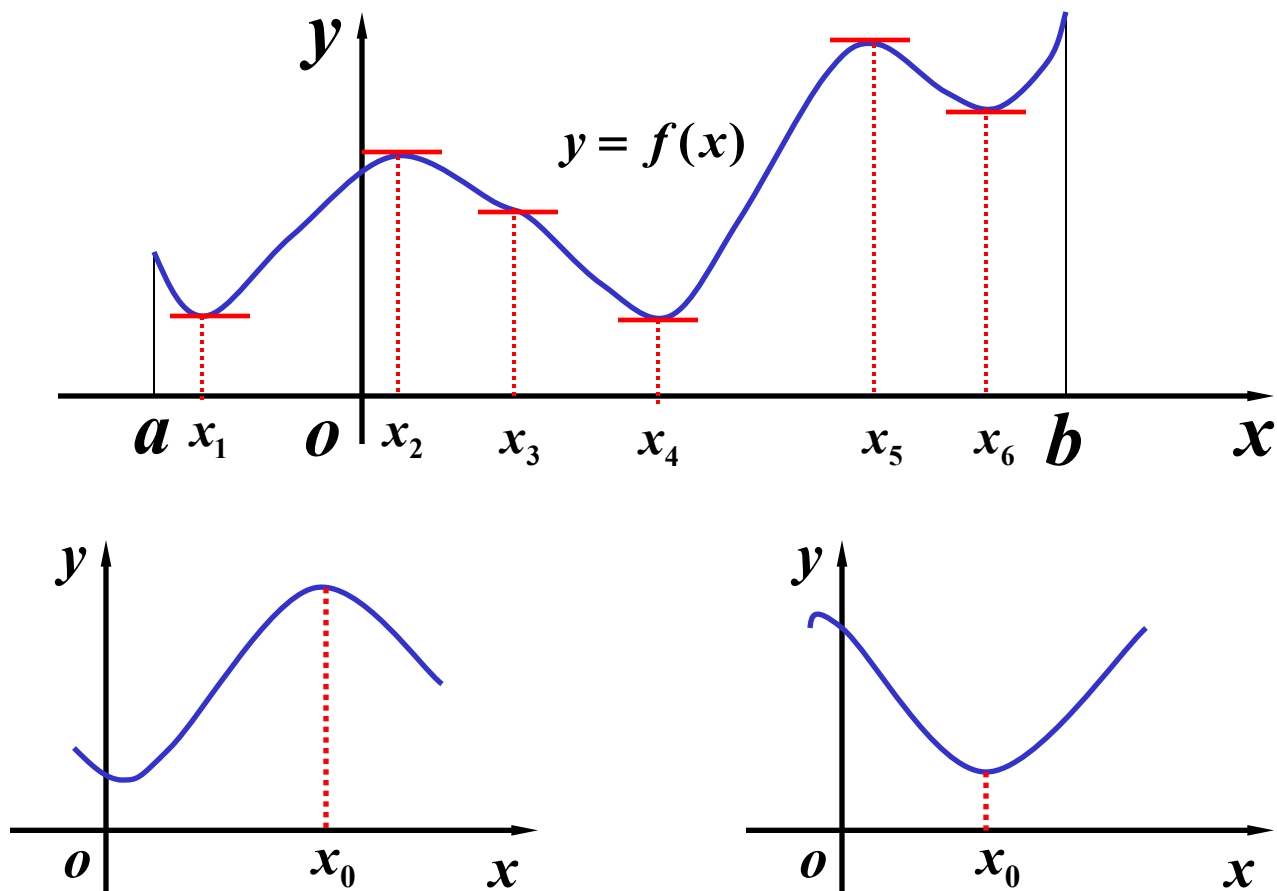
**证** 设  $f(x) = x - \ln(1+x)$ , 则函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 在  $(0, +\infty)$  内可导, 且  $f'(x) = \frac{x}{1+x} > 0$ .

$\therefore$  在  $[0, +\infty)$  上单调增加;  $\because f(0) = 0$ ,  $\therefore$  当  $x > 0$  时,

$x - \ln(1+x) = f(x) > f(0) = 0$ , 即  $x > \ln(1+x)$ .



## 3.2 函数的极值及求法





## 极值的定义:

设函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内有定义, 且  $x_0 \in (a, b)$

若存在  $x_0$  的某邻域, 对其中异于  $x_0$  的任意点  $x$  均有

$$f(x) < f(x_0)$$

则称  $f(x_0)$  为  $f(x)$  的一个极大值.

若存在  $x_0$  的某邻域, 对其中异于  $x_0$  的任意点  $x$  均有

$$f(x) > f(x_0)$$

则称  $f(x_0)$  为  $f(x)$  的一个极小值.

函数的极大值与极小值统称为极值,使函数取得极值的点称为极值点.

使函数  $f(x)$  的导数为零的点(即方程  $f'(x) = 0$  的实根)叫做函数  $f(x)$  的驻点.

**函数  $f(x)$  的驻点和导数不存在的点叫做函数  $f(x)$  的临界点.**

## 函数极值的求法:

**定理 (必要条件)** 设  $f(x)$  在点  $x_0$  处具有导数, 且在  $x_0$  处取得极值, 那末必定  $f'(x_0) = 0$ .

**注意:** 可导函数  $f(x)$  的极值点必定是它的驻点, 但函数的驻点却不一定 是极值点.

如,  $y = x^3$ ,  $y'|_{x=0} = 0$ , 但  $x = 0$  不是极值点.

## 定理 (第一充分条件)

设函数  $f(x)$  在临界点  $x_0$  的某去心邻域内可导,  
且  $f'(x) \neq 0$ , 若

(1) 当  $x < x_0$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x > x_0$  时,  $f'(x) < 0$ ,

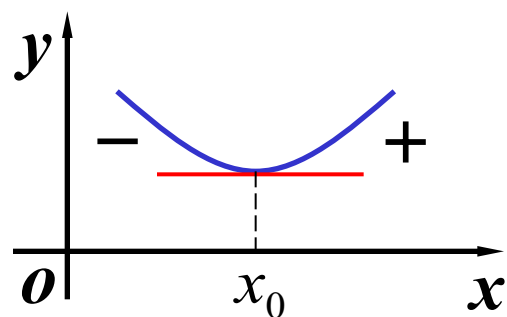
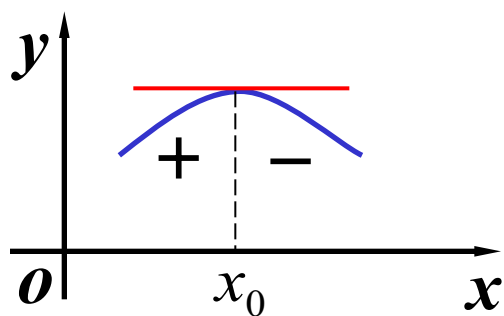
则  $f(x_0)$  为极大值.

(2) 当  $x < x_0$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x > x_0$  时,  $f'(x) > 0$ ,

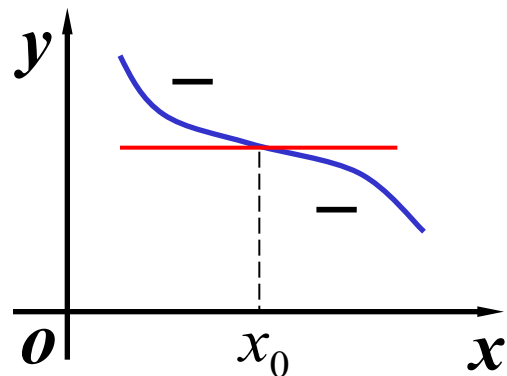
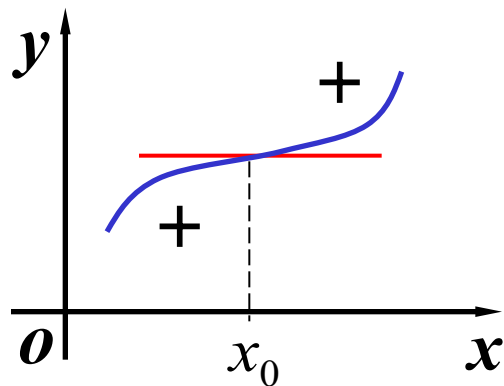
则  $f(x_0)$  为极小值.

(3) 当  $f'(x)$  在点  $x_0$  的两侧同号时,  $f(x)$  在  $x_0$  无极值.

如图所示:



(是极值点情形)



(非极值点情形)

## 求函数极值的步骤:

- (1) 求导函数  $f'(x)$ ;
- (2) 求全部临界点;
- (3) 检查临界点附近  $f'(x)$  的符号, 求极值点;
- (4) 求出所有的极大值和极小值.

例 5 求出函数  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  的极值.

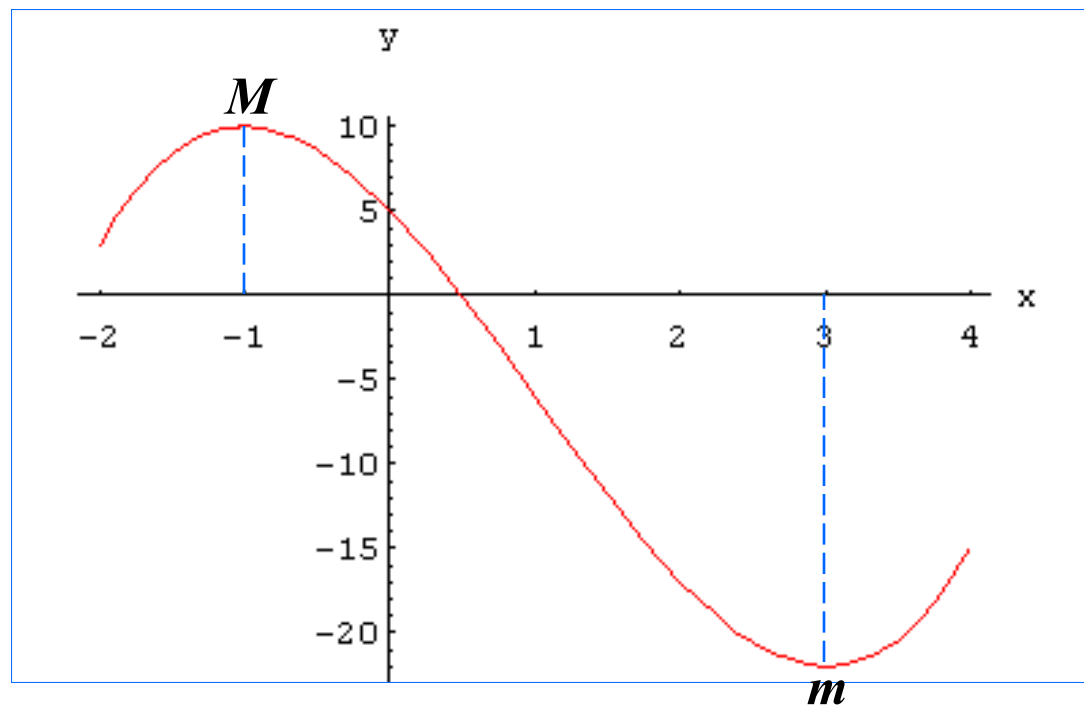
解  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x_1 = -1, x_2 = 3$ . 列表讨论

| $x$     | $(-\infty, -1)$ | $-1$ | $(-1, 3)$ | $3$ | $(3, +\infty)$ |
|---------|-----------------|------|-----------|-----|----------------|
| $f'(x)$ | +               | 0    | -         | 0   | +              |
| $f(x)$  | ↑               | 极大值  | ↓         | 极小值 | ↑              |

极大值  $f(-1) = 10$ , 极小值  $f(3) = -22$ .

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  图形如下





**例6** 求出函数  $f(x) = 1 - (x - 2)^{\frac{2}{3}}$  的极值.

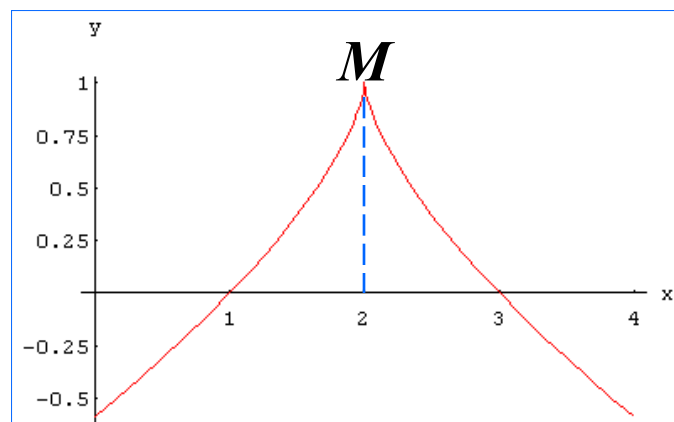
**解** 
$$f'(x) = -\frac{2}{3}(x - 2)^{-\frac{1}{3}} \quad (x \neq 2)$$

当  $x = 2$  时,  $f'(x)$  不存在. 但函数  $f(x)$  在该点连续.

当  $x < 2$  时,  $f'(x) > 0$ ;

当  $x > 2$  时,  $f'(x) < 0$ .

$\therefore f(2) = 1$  为  $f(x)$  的极大值.



**注意:** 函数的不可导点也可能是函数的极值点.

## 定理(第二充分条件)

设  $f(x)$  在  $x_0$  处二阶可导, 且  $f'(x_0) = 0$ , 则

- (1) 当  $f''(x_0) < 0$  时,  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极大值;
- (2) 当  $f''(x_0) > 0$  时,  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极小值;
- (3) 当  $f''(x_0) = 0$  时, 不确定.

证 (1)  $\because f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} < 0,$

故  $f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)$  与  $\Delta x$  异号,

当  $\Delta x < 0$  时, 有  $f'(x_0 + \Delta x) > f'(x_0) = 0,$

当  $\Delta x > 0$  时, 有  $f'(x_0 + \Delta x) < f'(x_0) = 0,$

所以, 函数  $f(x)$  在  $x_0$  处取得极大值.

类似证 (2) .

**例7** 求出函数  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 20$  的极值.

**解**  $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x+4)(x-2)$

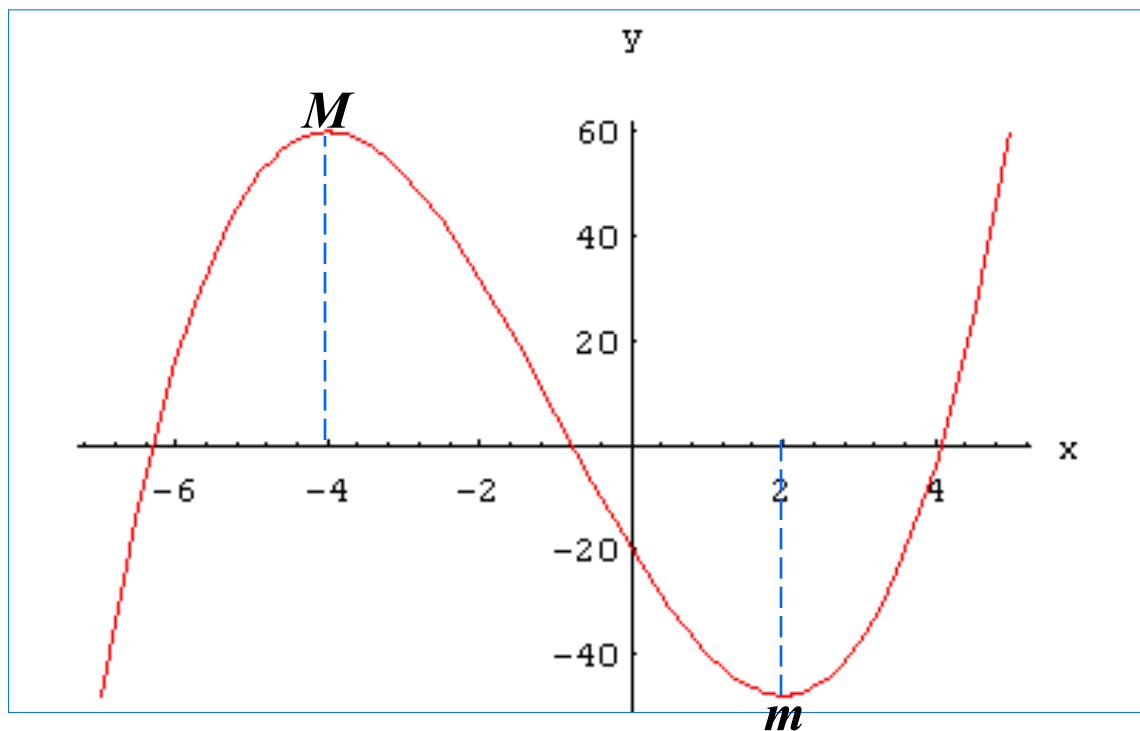
令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = 2$ .

$$\because f''(x) = 6x + 6,$$

$$\because f''(-4) = -18 < 0, \quad \text{故极大值 } f(-4) = 60,$$

$$f''(2) = 18 > 0, \quad \text{故极小值 } f(2) = -48.$$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 20$  图形如下



**注意：** 当  $f''(x_0)=0$  时，  $f(x)$  在点  $x_0$  处不一定取得极值，此时，仍需用第一充分条件判别。

## 3.3 小结与思考题

单调性的判别是拉格朗日中值定理的重要应用.

定理中的区间换成其它有限或无限区间, 结论仍然成立.

利用函数的单调性可以确定某些方程实根的个数和证明不等式.

**极值是函数的局部性概念:**极大值可能小于极小值,极小值可能大于极大值.

函数的极值必在**临界点**取得.

**判别法** { 第一充分条件;  
第二充分条件. (注意使用条件)

## 思考题

若  $f'(0) > 0$ ，是否能断定  $f(x)$  在原点的充分小的邻域内单调递增？



## 思考题解答

不能断定. 例  $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + 2 \cdot \Delta x \cdot \sin \frac{1}{\Delta x}) = 1 > 0$$

$$\text{但 } f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$$\text{当 } x_k = \frac{1}{(2k + \frac{1}{2})\pi} \text{ 时, } f'(x_k) = 1 + \frac{4}{(2k + \frac{1}{2})\pi} > 0$$

$$\text{当 } x_k = \frac{1}{2k\pi} \text{ 时, } f'(x_k) = -1 < 0$$

注意  $k$  可以任意大, 故在  $x_0 = 0$  点的任何邻域内,  $f(x)$  都不单调递增.



## 思考题

下命题正确吗？

如果  $x_0$  为连续函数  $f(x)$  的极小值点，那么必存在  $x_0$  的某个邻域，在此邻域内  $f(x)$  在  $x_0$  的左侧下降，而在  $x_0$  的右侧上升.

## 思考题解答

不正确.

$$\text{例 } f(x) = \begin{cases} 2 + x^2(2 + \sin \frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

当  $x \neq 0$  时,  $f(x) - f(0) = x^2(2 + \sin \frac{1}{x}) > 0$

于是  $x = 0$  为  $f(x)$  的极小值点.

当  $x \neq 0$  时,

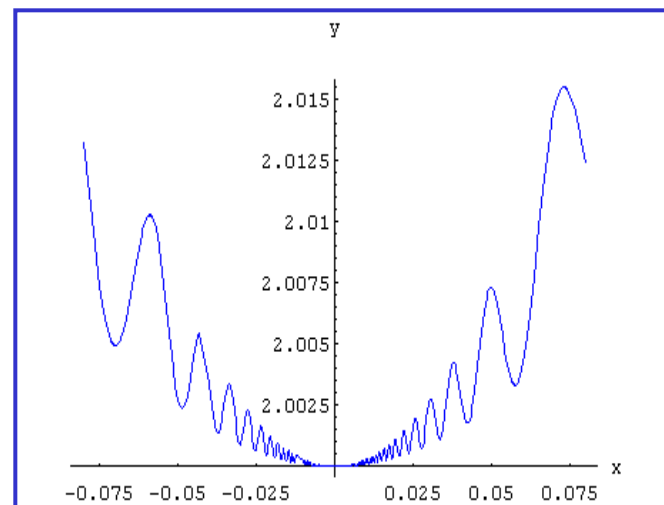
$$f'(x) = 2x(2 + \sin \frac{1}{x}) - \cos \frac{1}{x}$$

当  $x \rightarrow 0$  时,

$2x(2 + \sin \frac{1}{x}) \rightarrow 0$ ,  $\cos \frac{1}{x}$  在  $-1$  和  $1$  之间振荡

因而  $f(x)$  在  $x = 0$  的两侧都不单调.

故命题不成立.



## 课堂练习题

### 一、 填空题：

1、 函数  $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$  单调区间为\_\_\_\_\_.

2、 函数  $y = \frac{2x}{1+x^2}$  在区间  $[-1, 1]$  上单调\_\_\_\_\_,  
在\_\_\_\_\_上单调减.

3、 函数  $y = x^2 - \ln x^2$  的单增区间为\_\_\_\_\_,  
单减区间为\_\_\_\_\_.

二、 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上可导, 且  $0 < f(x) < 1$ . 又对于  $(0,1)$  内的一切  $x$ ,  $f'(x) \neq 1$ . 证明:  $f(x) = x$  在  $(0,1)$  内有惟一实根.

三、 证明: 当  $x > 0$  时,  $e^x - 1 > (1+x)\ln(1+x)$ .

四、 设  $f(x)$  在  $[a,b]$  上连续, 在  $(a,b)$  内  $f''(x) > 0$ , 试证明对于  $[a,b]$  上任意两点  $x_1, x_2$  有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

## 课堂练习题答案

- 一、 1、  $(-\infty, -1], [2, +\infty)$  单调增加,  $[-1, 2]$  单调减少;  
2、 增加,  $(-\infty, -1], [1, +\infty)$ ;  
3、  $(-\infty, -1], [-1, 0), (0, 1], [1, +\infty)$ ;  $(-\infty, -1], (0, 1]$ .
- 二、 提示: 1、 利用零点定理证明根的存在性;  
2、 利用罗尔定理证明根的惟一性.
- 三、 提示: 两次利用单调性.



四、提示、设  $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ .

(1) 利用拉氏中值定理:

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f'(\xi_1) < f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

(2) 利用泰劳公式: ( $i = 1, 2$ )

$$f(x_i) = f(x_0) + f'(x_0)(x_i - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi_i)(x_i - x_0)^2$$

## 课堂练习题

### 一、 填空题:

1、 极值反映的是函数的 \_\_\_\_\_ 性质.

2、 若  $y = f(x)$  在  $x = x_0$  可导, 则它在  $x_0$  处有极值的必要条件为\_\_\_\_\_.

3、  $y = 3 - 2(x - 1)^{\frac{2}{3}}$  的极值点为\_\_\_\_\_;

$y = 3 - 2(x + 1)^{\frac{1}{3}}$  的极值为 \_\_\_\_\_.

4、 设  $f(x) = \begin{cases} x^{3x}, & x > 0 \\ x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$ , 则  $x =$  \_\_\_\_\_ 时,  $y =$  \_\_\_\_\_ 为极小值; 当  $x =$  \_\_\_\_\_ 时,  $y =$  \_\_\_\_\_ 为极大值.

二、求下列函数的极值：

1、 方程  $e^{x^2 y} + y = 0$  所确定的函数  $y = f(x)$ ;

2、 
$$y = \begin{cases} e^{x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

三、设  $f(x)$  是具有二阶导函数的偶函数，且  $f''(x) \neq 0$ ,

证明：  $x = 0$  为函数  $f(x)$  的极值点.

## 课堂练习题答案

一、1、局部；

2、 $f'(x_0) = 0$ ；

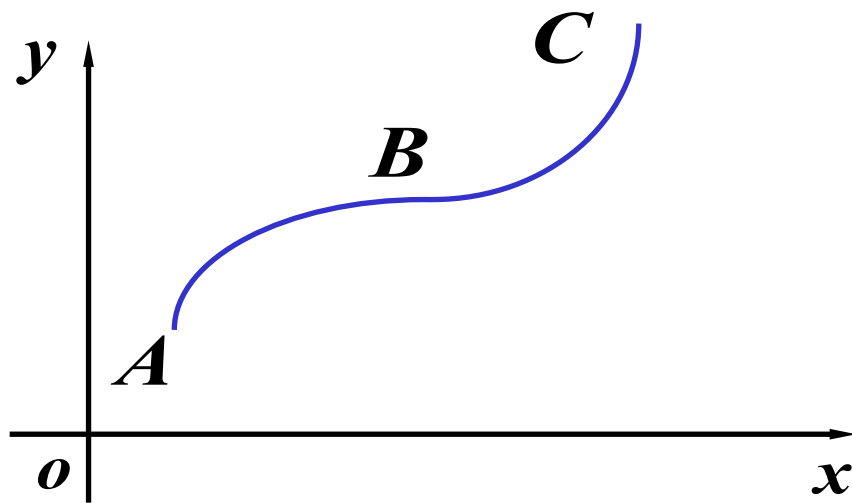
3、1, 无；

4、 $e^{-1}, e^{-3e^{-1}}, 0, 1$ .

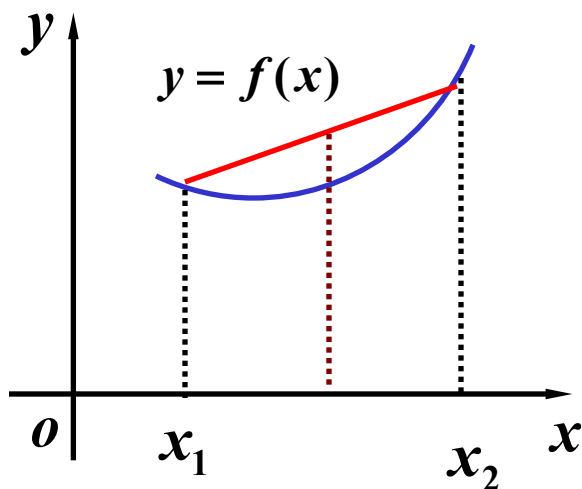
二、1、极小值  $y(0) = -1$ ； 2、极小值  $y(0) = 0$ .

## 3.4 曲线的凹凸性及其判别法

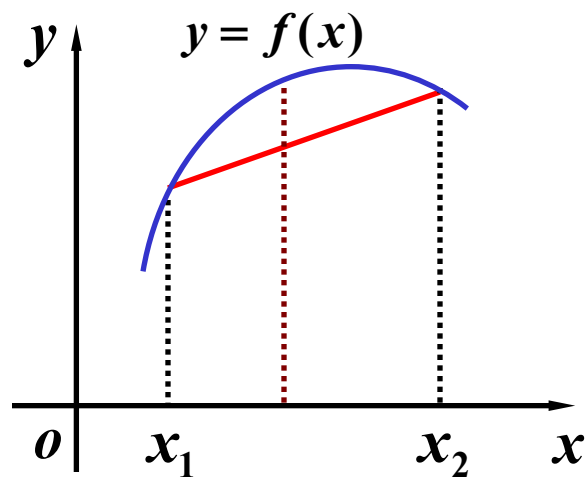
问题：如何研究曲线的弯曲方向？



## 曲线凹凸的特点:



图形上任意弧段位于所张弦的下方



图形上任意弧段位于所张弦的上方

## 凹凸弧的定义:

设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续, 若对  $(a, b)$  内的任意两点  $x_1, x_2$ , 恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

则称  $f(x)$  在  $(a, b)$  内的图形为凹弧;

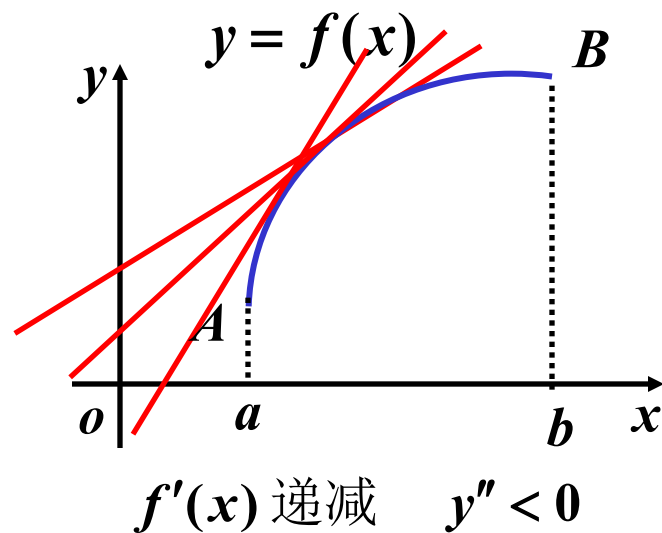
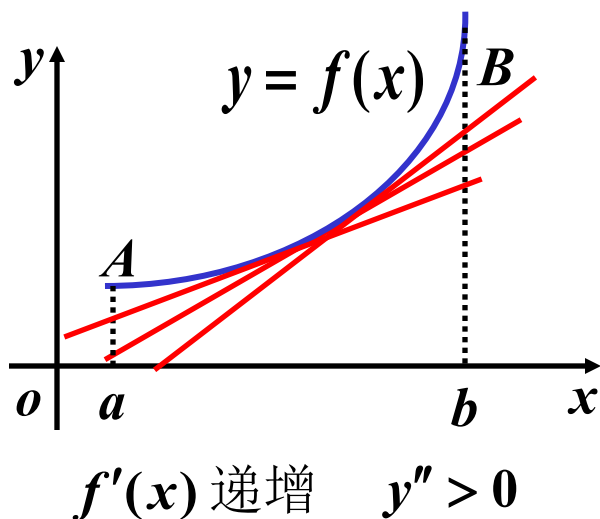
若对  $(a, b)$  内的任意两点  $x_1, x_2$ , 恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

则称  $f(x)$  在  $(a, b)$  内的图形为凸弧.

若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且在  $(a, b)$  内的图形是凹(凸)的, 则称  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的图形是凹(凸)弧.

### 曲线凹凸的判定:





## 判别法:

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  内连续, 在  $(a, b)$  内二阶可导,  
若在  $(a, b)$  内

(1)  $f''(x) > 0$ , 则  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的凹弧;

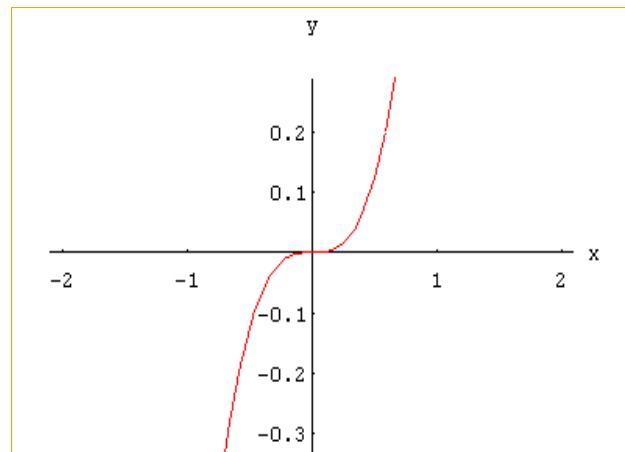
(2)  $f''(x) < 0$ , 则  $f(x)$  为  $[a, b]$  上的凸弧.

**例 8** 判断曲线  $y = x^3$  的凹凸性.

**解**  $\because y' = 3x^2, y'' = 6x,$

当  $x < 0$  时,  $y'' < 0,$

$\therefore$  曲线在  $(-\infty, 0]$  为凸的;



当  $x > 0$  时,  $y'' > 0, \therefore$  曲线在  $[0, +\infty)$  为凹的;

**注意:** 点  $(0,0)$  是曲线由凸变凹的分界点.

## 曲线的拐点及其求法

连续曲线上凹凸弧的分界点称为曲线的**拐点**.

**注意:** 拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

拐点的求法:

### 1、必要条件

若  $f(x)$  在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内存在二阶导数, 则

$(x_0, f(x_0))$  为拐点的必要条件是  $f''(x_0) = 0$ .

## 2、第一充分条件

设 $f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域内二阶可导且  $f''(x_0) = 0$ ,

- (1) 若在 $x_0$ 两侧 $f''(x)$ 异号,则点 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点;
- (2) 若在 $x_0$ 两侧 $f''(x)$ 同号,则点 $(x_0, f(x_0))$ 非拐点.

## 3、第二充分条件

设  $f(x)$  在  $x_0$  的邻域内三阶可导且 $f''(x_0) = 0$ ,

$f'''(x_0) \neq 0$ ,则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线  $y = f(x)$ 的拐点.

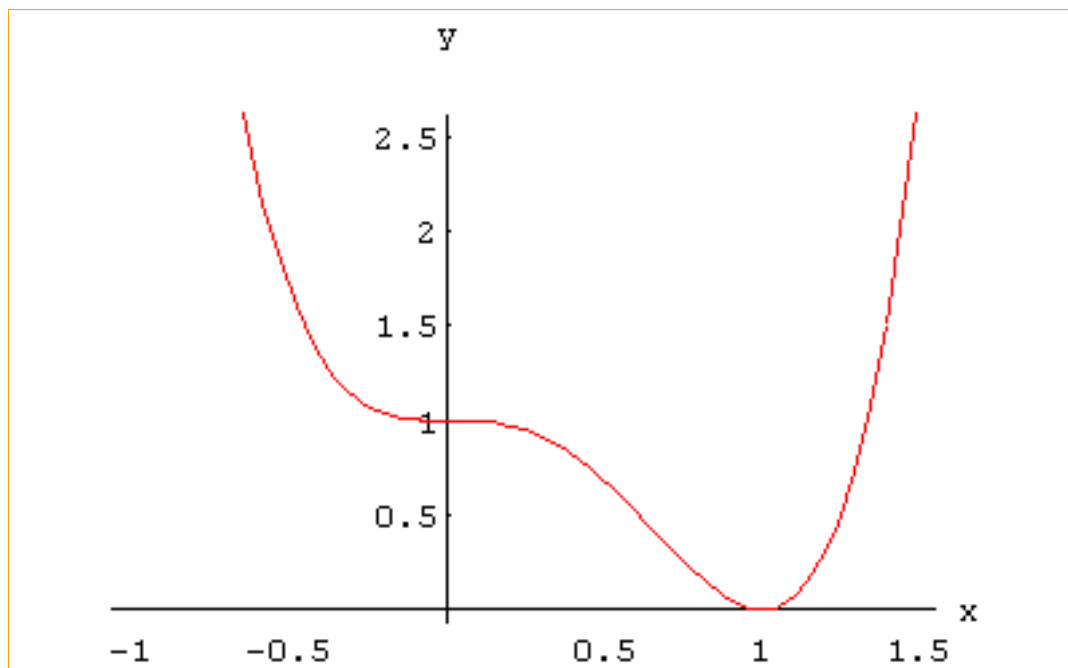
**例9** 求曲线  $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$  的拐点及凹凸的区间.

**解**  $\because D : (-\infty, +\infty)$

$$y' = 12x^3 - 12x^2, \quad y'' = 36x(x - \frac{2}{3}).$$

$$\text{令 } y'' = 0, \quad \text{得 } x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}.$$

| $x$      | $(-\infty, 0)$ | $0$         | $(0, \frac{2}{3})$ | $\frac{2}{3}$                          | $(\frac{2}{3}, +\infty)$ |
|----------|----------------|-------------|--------------------|----------------------------------------|--------------------------|
| $f''(x)$ | +              | <b>0</b>    | -                  | <b>0</b>                               | +                        |
| $f(x)$   | 凹              | 拐点<br>(0,1) | 凸                  | 拐点<br>( $\frac{2}{3}, \frac{11}{27}$ ) | 凹                        |



凹凸区间为  $(-\infty, 0]$ ,  $[0, \frac{2}{3}]$ ,  $[\frac{2}{3}, +\infty)$ .

**例10** 求曲线  $y = \sin x + \cos x$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) 的拐点.

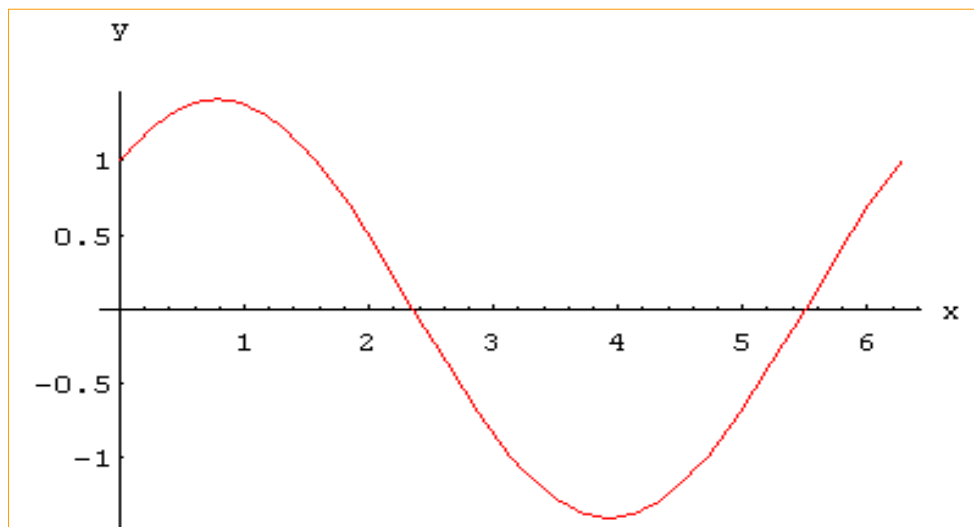
**解**  $y' = \cos x - \sin x$ ,  $y'' = -\sin x - \cos x$ ,

$$y''' = -\cos x + \sin x.$$

令  $y'' = 0$ , 得  $x_1 = \frac{3\pi}{4}$ ,  $x_2 = \frac{7\pi}{4}$ .

$$f'''(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2} \neq 0, \quad f'''(\frac{7\pi}{4}) = -\sqrt{2} \neq 0,$$

$\therefore$  在  $[0, 2\pi]$  内曲线有拐点为  $(\frac{3\pi}{4}, 0)$ ,  $(\frac{7\pi}{4}, 0)$ .



**注意：**若  $f''(x_0)$  不存在, 点  $(x_0, f(x_0))$  也可能是连续曲线  $y = f(x)$  的拐点.



**例11** 求曲线  $y = \sqrt[3]{x}$  的拐点.

**解** 当  $x \neq 0$  时,  $y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ,  $y'' = -\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ ,

$x = 0$  是不可导点,  $y', y''$  均不存在.

但在  $(-\infty, 0)$  内,  $y'' > 0$ , 曲线在  $(-\infty, 0]$  上是凹的;

在  $(0, +\infty)$  内,  $y'' < 0$ , 曲线在  $[0, +\infty)$  上是凸的.

$\therefore$  点  $(0, 0)$  是曲线  $y = \sqrt[3]{x}$  的拐点.



## 3.5 小结与思考题

曲线的弯曲方向——凹凸性;

凹凸性的判定.

改变弯曲方向的点——拐点;

拐点的求法1, 2.

## 思考题

设  $f(x)$  在  $(a, b)$  内二阶可导, 且  $f''(x_0) = 0$ , 其中  $x_0 \in (a, b)$ , 则  $(x_0, f(x_0))$  是否一定为曲线  $f(x)$  的拐点? 举例说明.

## 思考题解答

因为  $f''(x_0) = 0$  只是  $(x_0, f(x_0))$  为拐点的必要条件, 故  $(x_0, f(x_0))$  不一定是拐点.

例  $f(x) = x^4 \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad f''(0) = 0$

但  $(0,0)$  并不是曲线  $f(x)$  的拐点.



## 课堂练习题

### 一、 填空题:

- 1、 若函数  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  可导, 则曲线  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内为凹弧的充要条件是\_\_\_\_\_.
- 2、 曲线上\_\_\_\_\_的点称为曲线的拐点 .
- 3、 曲线  $y = \ln(1 + x^2)$  的拐点为\_\_\_\_\_.
- 4、 曲线  $y = \ln(1 + x)$  拐点为\_\_\_\_\_.

二、利用函数图形的凹凸性，证明不等式：

$$2(x^2 + y^2) > (x + y)^2, \quad (x \neq y).$$

三、试决定  $y = k(x^2 - 3)^2$  中  $k$  的值，使曲线在拐点处的法线通过原点 .

## 课堂练习题答案

一、1、在 $(a,b)$ 内,  $f'(x)$  递增或  $f''(x) > 0$  ;

2、凹凸部分的分界点; 3、 $(-1, \ln 2)$ ,  $(1, \ln 2)$  ;

4、不存在.

二、 $\because f(x) = x^2$  且为凹弧,  $\therefore f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$ .

三、 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{8}$ .

## 3.6 函数的图形的描绘

### 1、渐近线

当曲线  $y = f(x)$  上的一个动点  $P$  沿此曲线移向无穷远时, 如果点  $P$  到某定直线  $L$  的距离趋向于零, 那么直线  $L$  称为曲线  $y = f(x)$  的渐近线.



## 水平渐近线

(平行于  $x$  轴的渐近线)

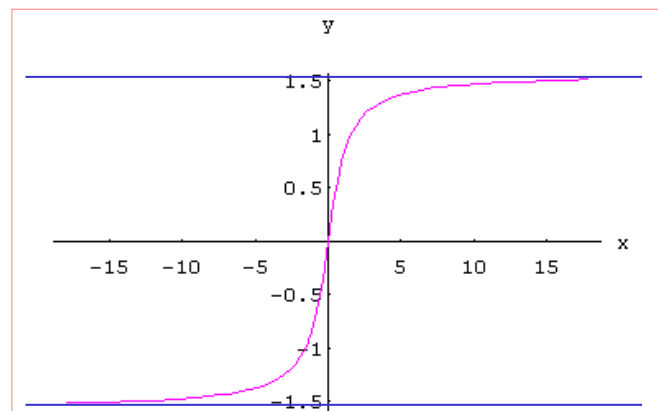
如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  ( $b$  为常数)

那么  $y = b$  就是  $y = f(x)$  的一条水平渐近线.

如,  $y = \arctan x$ ,

有水平渐近线两条:

$$y = \frac{\pi}{2}, \quad y = -\frac{\pi}{2}.$$



## 铅直渐近线

(垂直于  $x$  轴的渐近线)

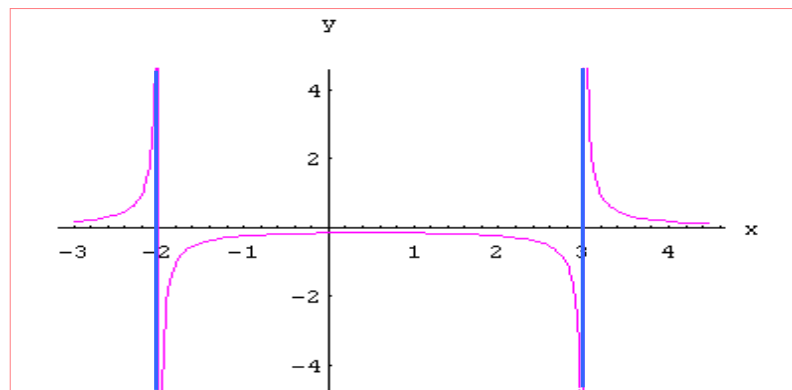
如果  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$

那么  $x = x_0$  就是  $y = f(x)$  的一条铅直渐近线.

如,  $y = \frac{1}{(x+2)(x-3)},$

有铅直渐近线两条:

$$x = -2, \quad x = 3.$$



## 斜渐近线

如果  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

或  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  ( $a, b$  为常数)

那么  $y = ax + b$  就是  $y = f(x)$  的一条斜渐近线.

斜渐近线求法:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b.$$

那么  $y = ax + b$  就是曲线  $y = f(x)$  的一条斜渐近线.

**注意:** 如果 (1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  不存在;

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$  存在, 但  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$  不存在,

可以断定  $y = f(x)$  不存在斜渐近线.

**例12** 求  $f(x) = \frac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$  的渐近线.

**解**  $D : (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$

$$\because \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty,$$

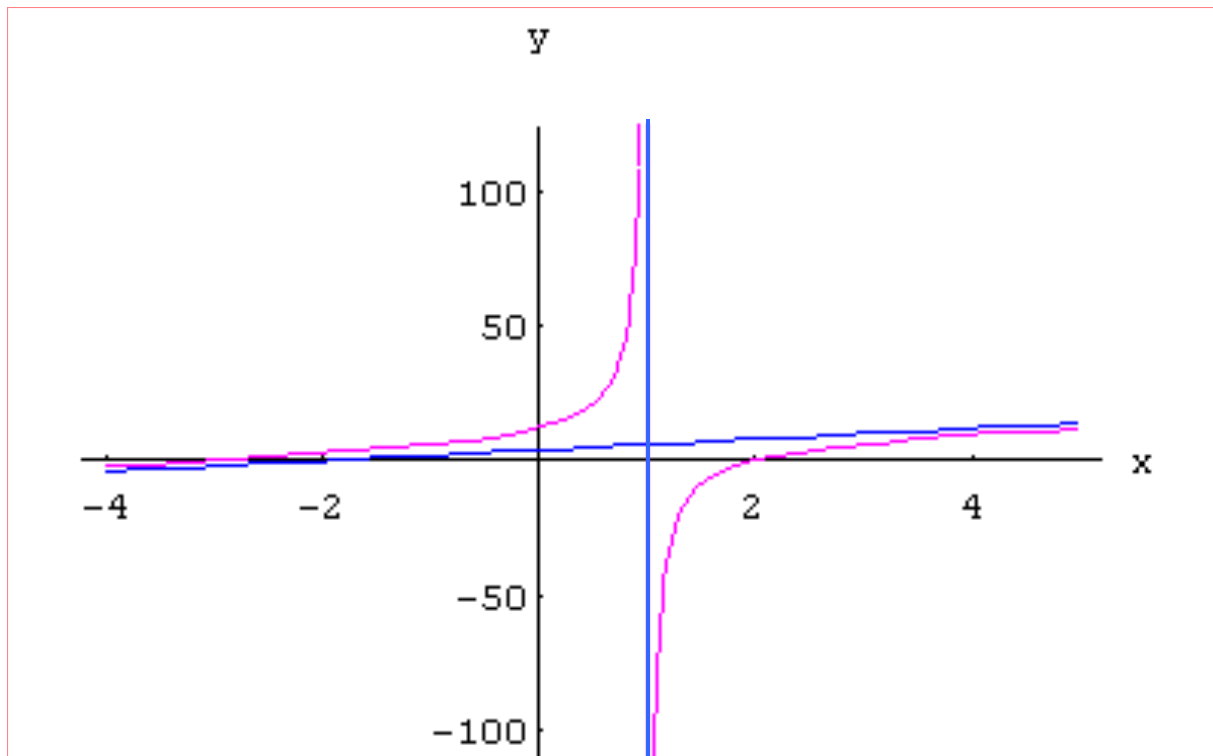
$\therefore x = 1$  是曲线的铅直渐近线.

$$\text{又 } \because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x-2)(x+3)}{x(x-1)} = 2,$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2(x-2)(x+3)}{x-1} - 2x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x-2)(x+3) - 2x(x-1)}{x-1} = 4, \end{aligned}$$

$\therefore y = 2x + 4$  是曲线的一条斜渐近线.

$f(x) = \frac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$  的两条渐近线如图



## 2、函数图形的描绘

利用函数特性描绘函数图形，步骤如下：

- 第一步** 确定函数  $y = f(x)$  的定义域,对函数进行奇偶性、周期性、曲线与坐标轴交点等性态的讨论, 求出函数的一阶导数  $f'(x)$  和二阶导数  $f''(x)$ ;
- 第二步** 求出方程  $f'(x)=0$  和  $f''(x)=0$  在函数定义域内的全部实根, 用这些根同函数的间断点或导数不存在的点把函数的定义域划分成几个部分区间.

**第三步** 确定在这些部分区间内  $f'(x)$  和  $f''(x)$  的符号，并由此确定函数的增减性与极值及曲线的凹凸性与拐点（可列表进行讨论）；

**第四步** 确定函数图形的水平、铅直渐近线、斜渐近线以及其他变化趋势；

**第五步** 描出与方程  $f'(x)=0$  和  $f''(x)=0$  的根对应的曲线上的点，有时还需要补充一些点，再综合前四步讨论的结果画出函数的图形。



## 作图举例:

**例13** 作函数  $f(x) = \frac{4(x+1)}{x^2} - 2$  的图形.

**解**  $D: x \neq 0$ , 非奇非偶函数, 且无对称性.

$$f'(x) = -\frac{4(x+2)}{x^3}, \quad f''(x) = \frac{8(x+3)}{x^4}.$$

令  $f'(x) = 0$ , 得驻点  $x = -2$ ,

令  $f''(x) = 0$ , 得特殊点  $x = -3$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{4(x+1)}{x^2} - 2 \right] = -2$ , 得水平渐近线  $y = -2$ ;

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{4(x+1)}{x^2} - 2 \right] = +\infty,$$

得铅直渐近线  $x = 0$ .

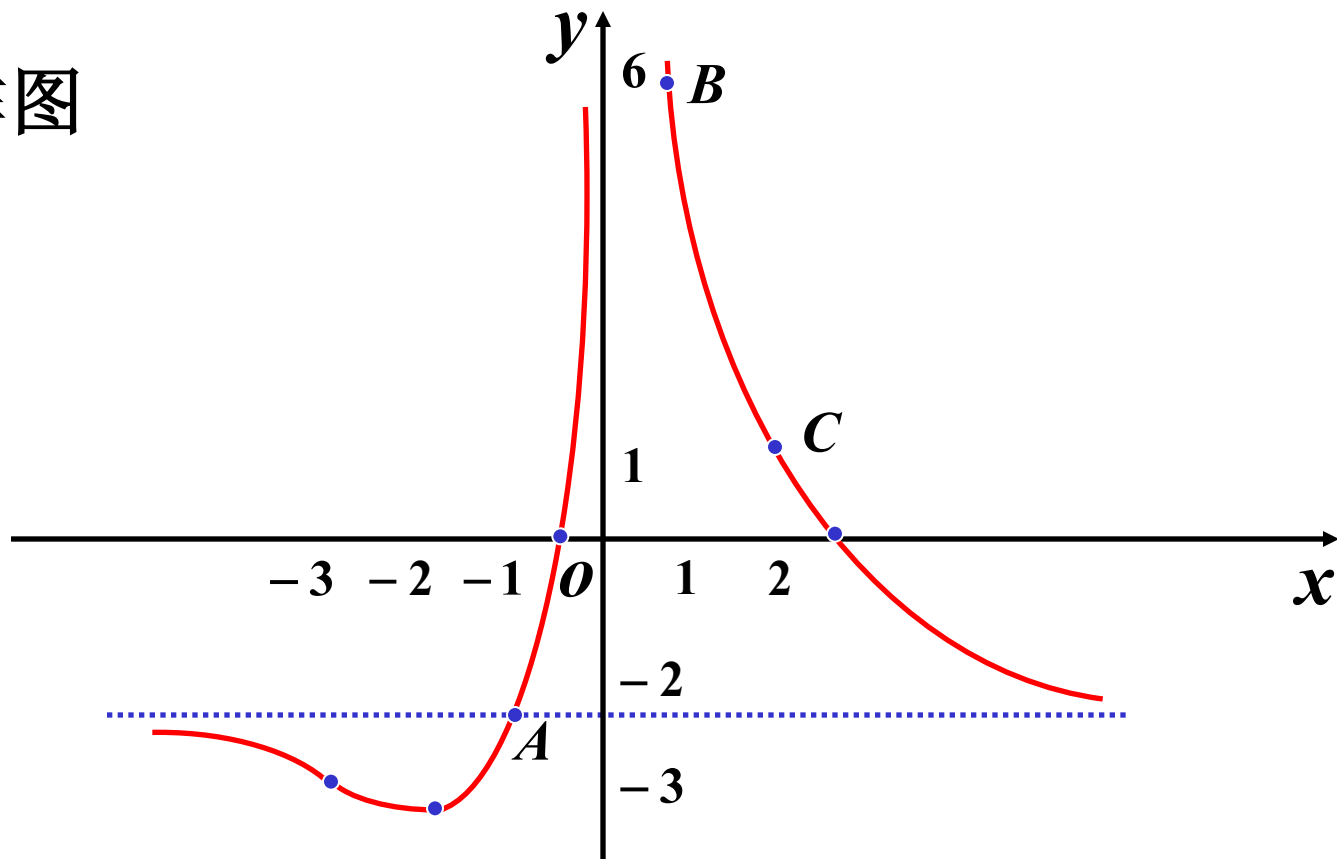
列表确定函数升降区间,凹凸区间及极值点和拐点:

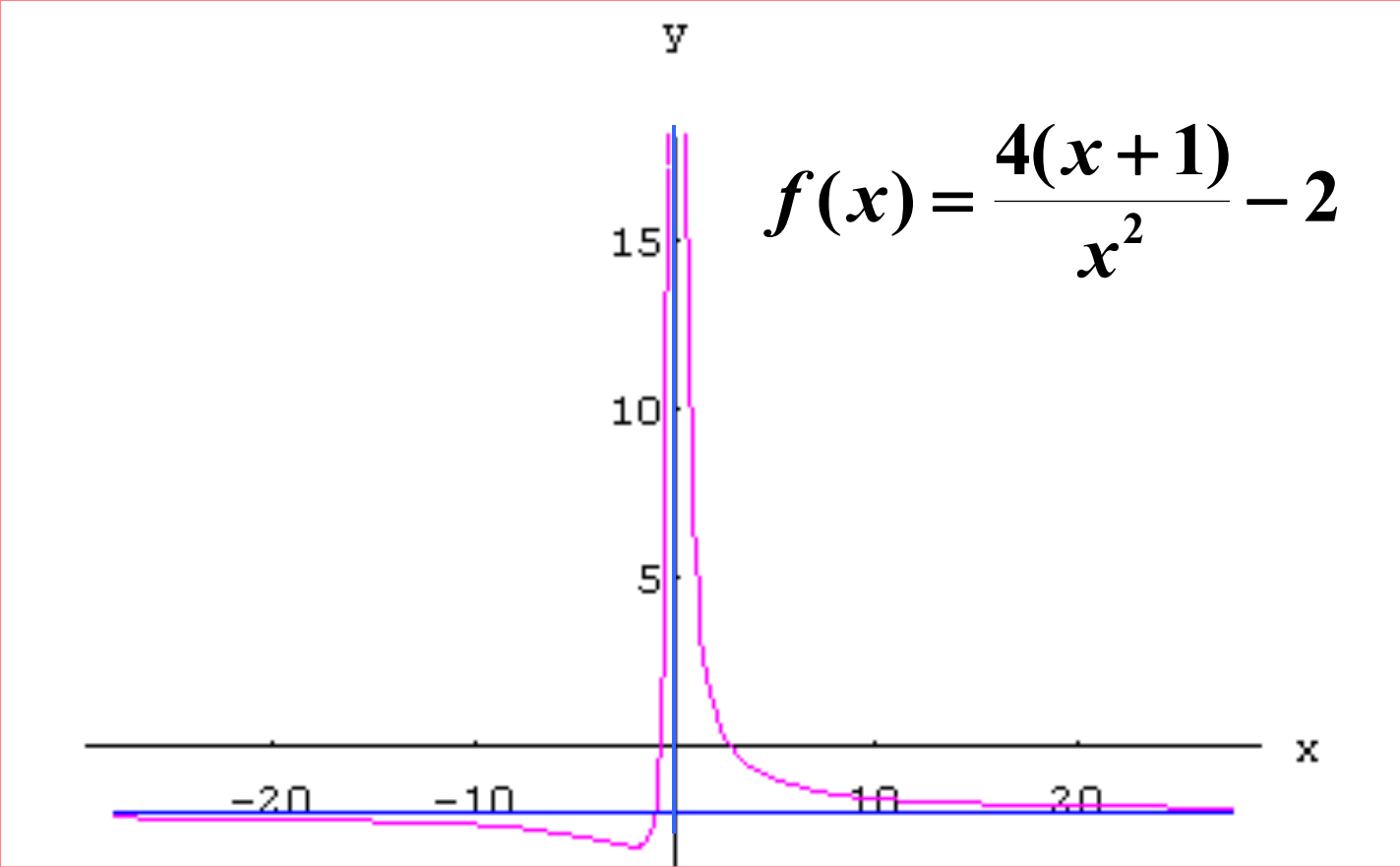
| $x$      | $(-\infty, -3)$                                                                     | $-3$                        | $(-3, -2)$                                                                          | $-2$        | $(-2, 0)$                                                                             | $0$ | $(0, +\infty)$                                                                        |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $f'(x)$  | —                                                                                   | —                           | —                                                                                   | 0           | +                                                                                     | 不存在 | —                                                                                     |
| $f''(x)$ | —                                                                                   | 0                           | +                                                                                   | +           | +                                                                                     |     | +                                                                                     |
| $f(x)$   |  | 拐点<br>$(-3, -\frac{26}{9})$ |  | 极小值<br>$-3$ |  | 间断点 |  |

补充点：  $(1-\sqrt{3},0)$ ,  $(1+\sqrt{3},0)$ ;

$A(-1,-2)$ ,  $B(1,6)$ ,  $C(2,1)$ .

作图





例14 作函数  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  的图形.

解  $D : (-\infty, +\infty)$ ,  $W : 0 < \varphi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4$ .

偶函数, 图形关于  $y$  轴对称.

$$\varphi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \varphi''(x) = -\frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

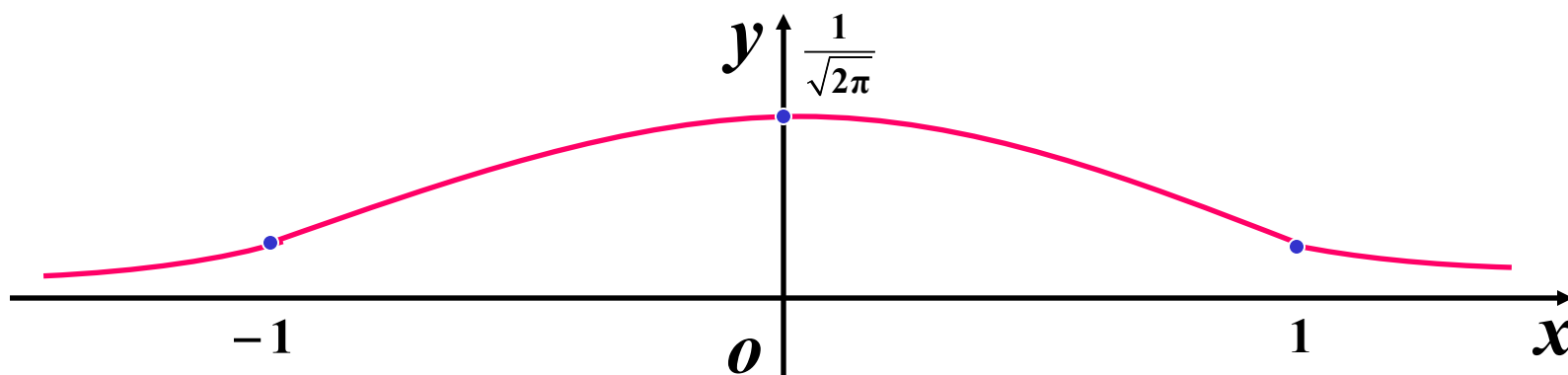
令  $\varphi'(x) = 0$ , 得驻点  $x = 0$ ,

令  $\varphi''(x) = 0$ , 得特殊点  $x = -1, x = 1$ .

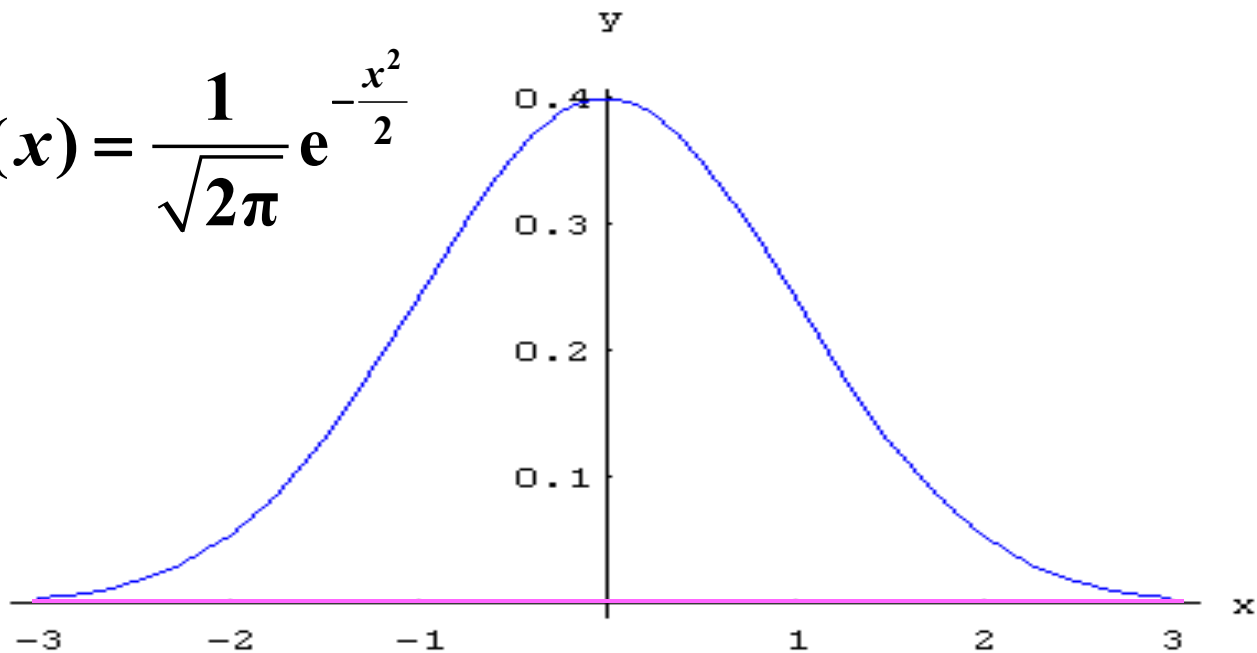
$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ , 得水平渐近线  $y = 0$ .

列表确定函数升降区间,凹凸区间及极值点与拐点:

| $x$            | $(-\infty, -1)$                                                                   | $-1$                                  | $(-1, 0)$                                                                         | $0$                            | $(0, 1)$                                                                            | $1$                                  | $(1, +\infty)$                                                                      |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $\varphi'(x)$  | +                                                                                 | +                                     | +                                                                                 | 0                              | -                                                                                   | -                                    | -                                                                                   |
| $\varphi''(x)$ | +                                                                                 | 0                                     | -                                                                                 | -                              | -                                                                                   | 0                                    | +                                                                                   |
| $\varphi(x)$   |  | 拐点<br>$(-1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$ |  | 极大值<br>$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ |  | 拐点<br>$(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$ |  |



$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



**例15** 作函数  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$  的图形.

**解**  $D: (-\infty, +\infty)$ , 无奇偶性及周期性.

$$f'(x) = (3x + 1)(x - 1), \quad f''(x) = 2(3x - 1).$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \quad \text{得驻点 } x = -\frac{1}{3}, \quad x = 1.$$

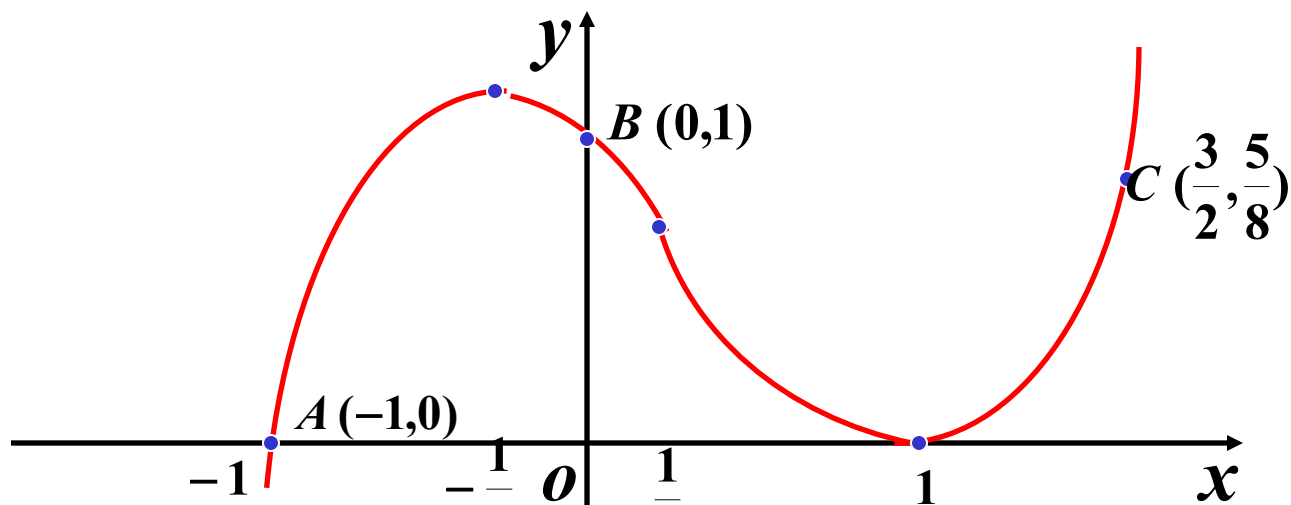
$$\text{令 } f''(x) = 0, \quad \text{得特殊点 } x = \frac{1}{3}.$$

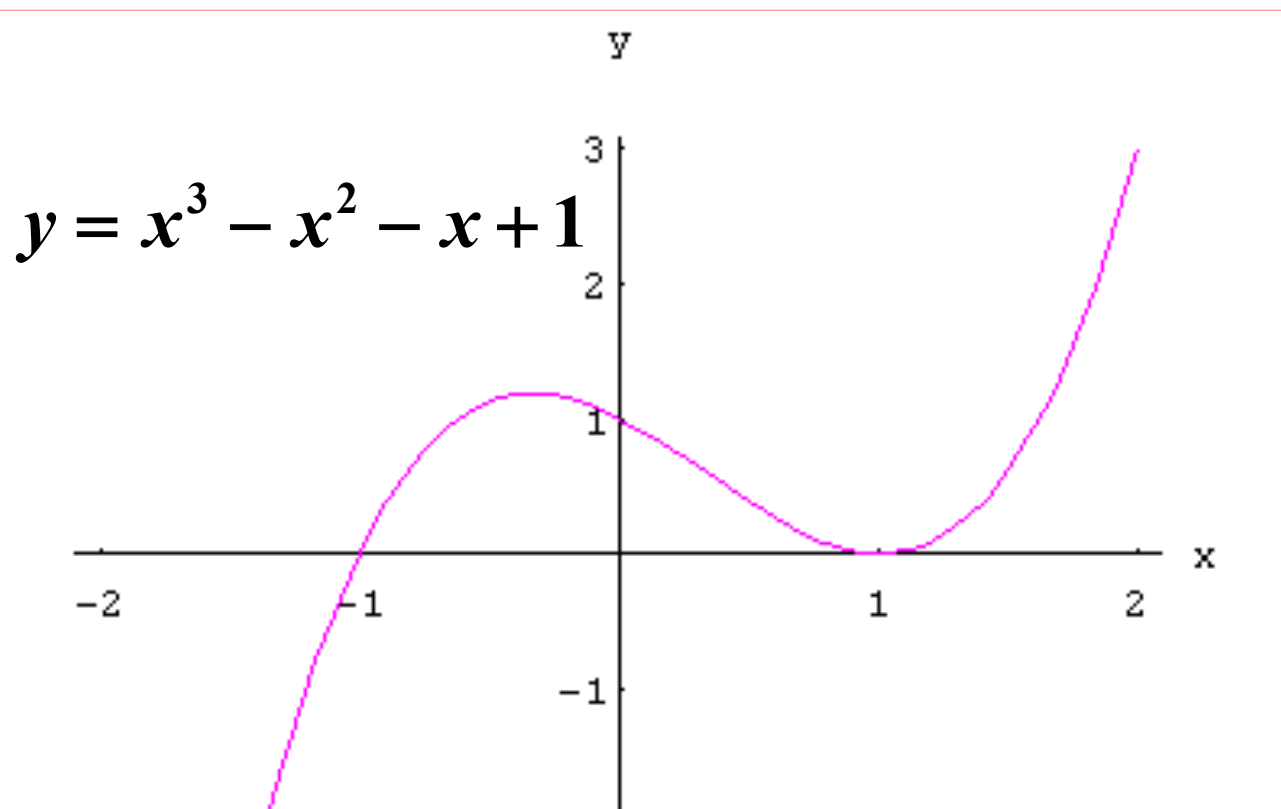
$$\text{补充点: } A(-1, 0), \quad B(0, 1), \quad C\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right).$$

列表确定函数升降、凹凸区间及极值点与拐点:



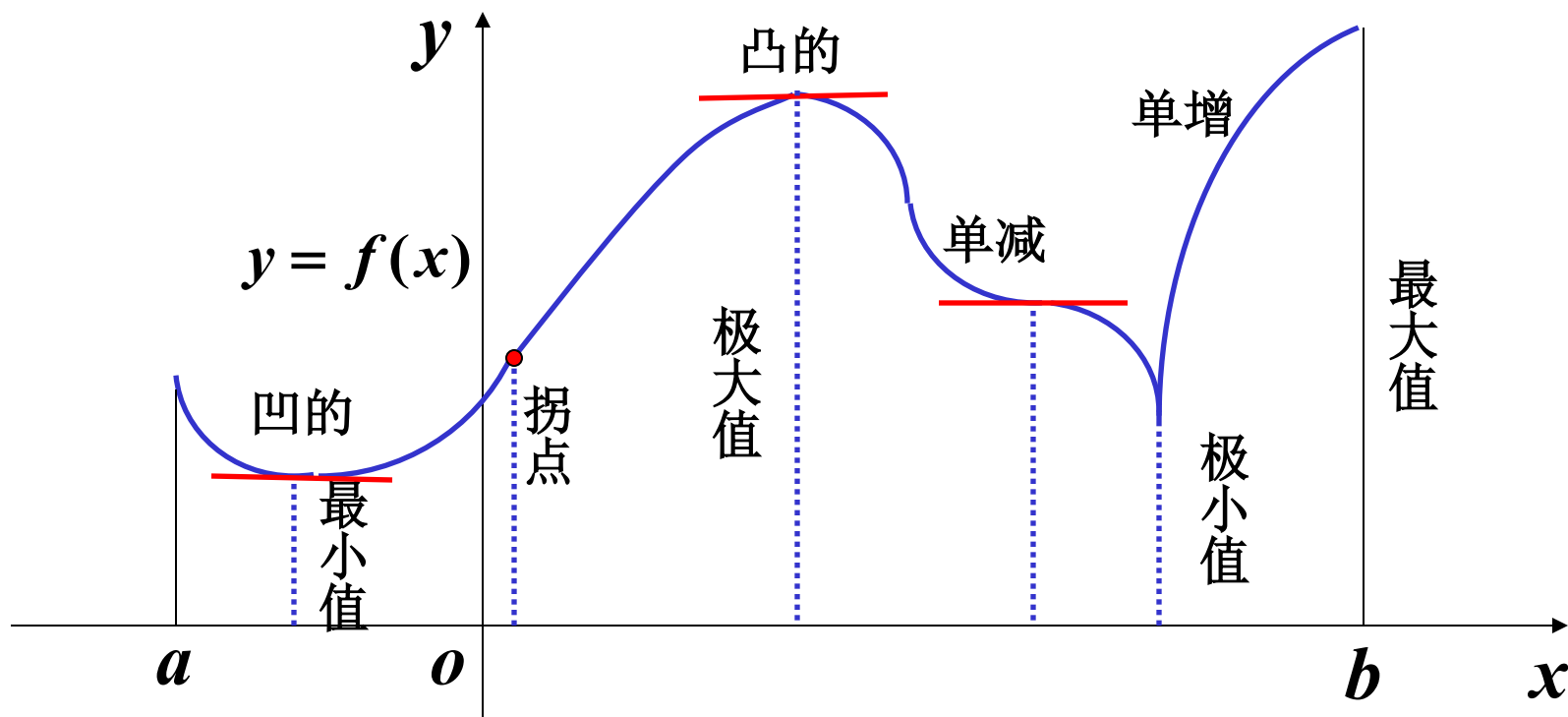
| $x$      | $(-\infty, -\frac{1}{3})$                                                         | $-\frac{1}{3}$         | $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$                                                     | $\frac{1}{3}$                        | $(\frac{1}{3}, 1)$                                                                  | $1$        | $(1, +\infty)$                                                                      |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $f'(x)$  | +                                                                                 | 0                      | -                                                                                 |                                      | -                                                                                   | 0          | +                                                                                   |
| $f''(x)$ | -                                                                                 |                        | -                                                                                 |                                      | +                                                                                   |            | +                                                                                   |
| $f(x)$   |  | 极大值<br>$\frac{32}{27}$ |  | 拐点<br>$(\frac{1}{3}, \frac{16}{27})$ |  | 极小值<br>$0$ |  |





## 3.7 小结与思考题

函数图形的描绘综合运用函数性态的研究,是导数应用的综合考察.



## 思考题

两坐标轴  $x = 0$ ,  $y = 0$  是否都是  
函数  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  的渐近线？

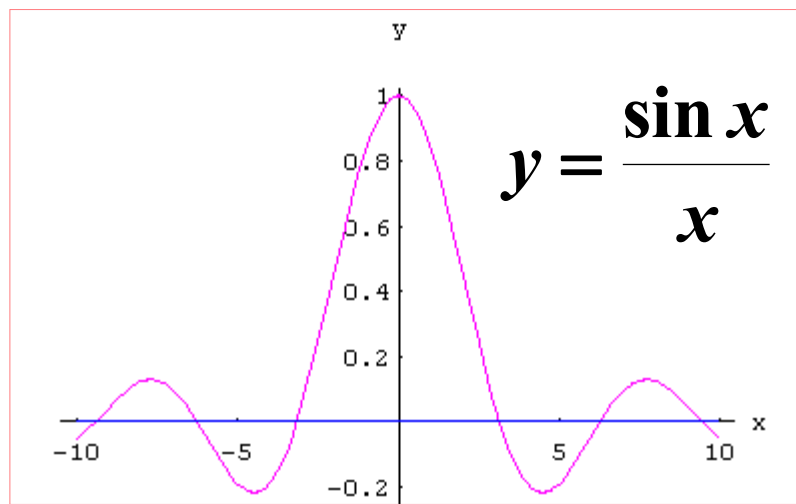
## 思考题解答

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$\therefore y = 0$  是其图象的水平渐近线.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq \infty$$

$\therefore x = 0$  不是其图象的渐近线.



## 课堂练习题

### 一、 填空题：

1、 曲线  $y = e^{\frac{1}{x}}$  的水平渐近线为\_\_\_\_\_；

2、 曲线  $y = \frac{1}{x-1}$  的水平渐近线为\_\_\_\_\_,  
铅直渐近线为\_\_\_\_\_.

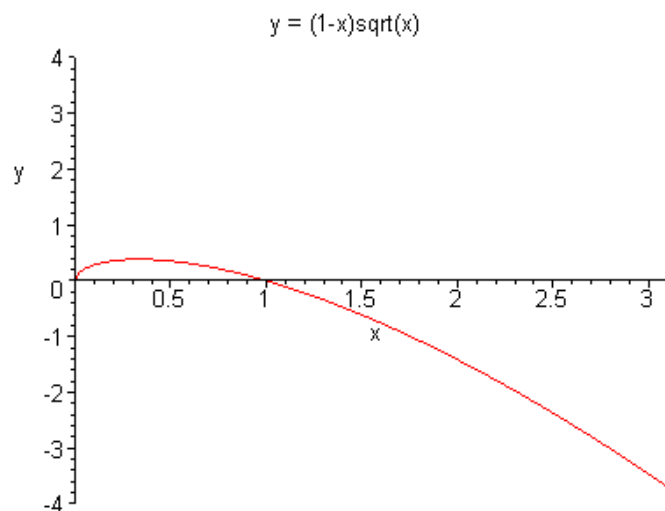
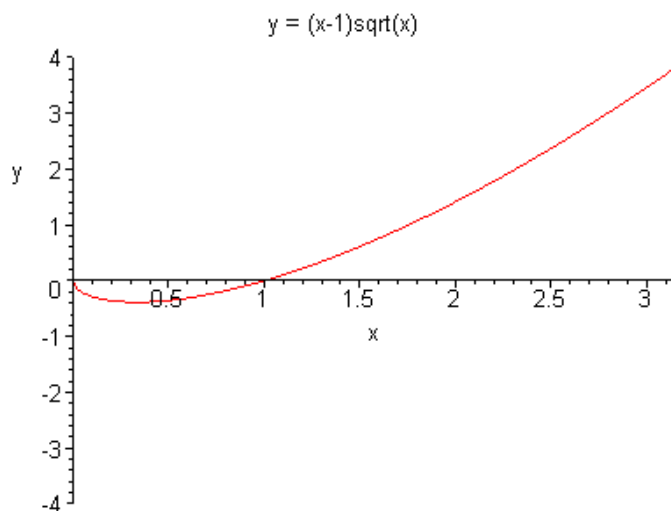
### 二、 描出下列函数的图形：

1、  $y^2 = x(x-1)^2$ ； 2、  $y = \ln \sin x$ ； 3、  $y = x + \frac{1}{x}$ .

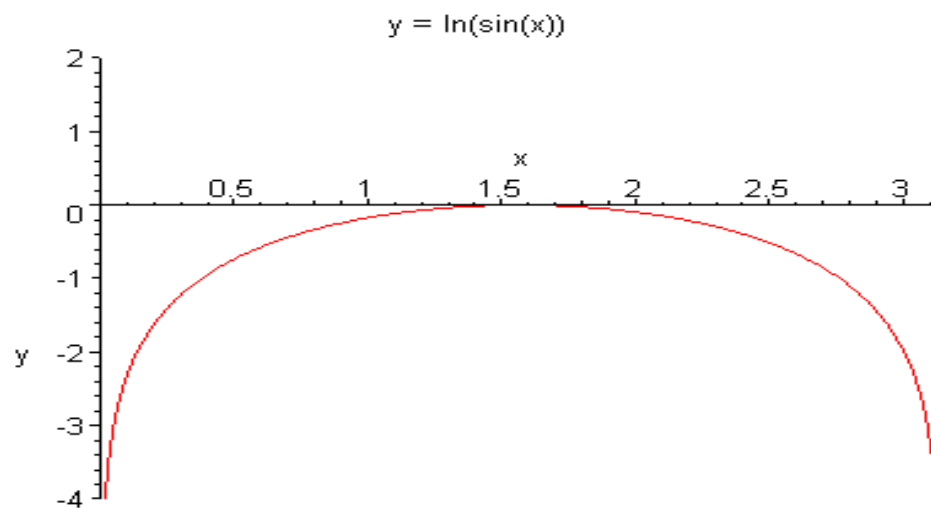
## 课堂练习题答案

一、 1、  $y = 1$ ;     2、  $y = 0, x = 1$ .

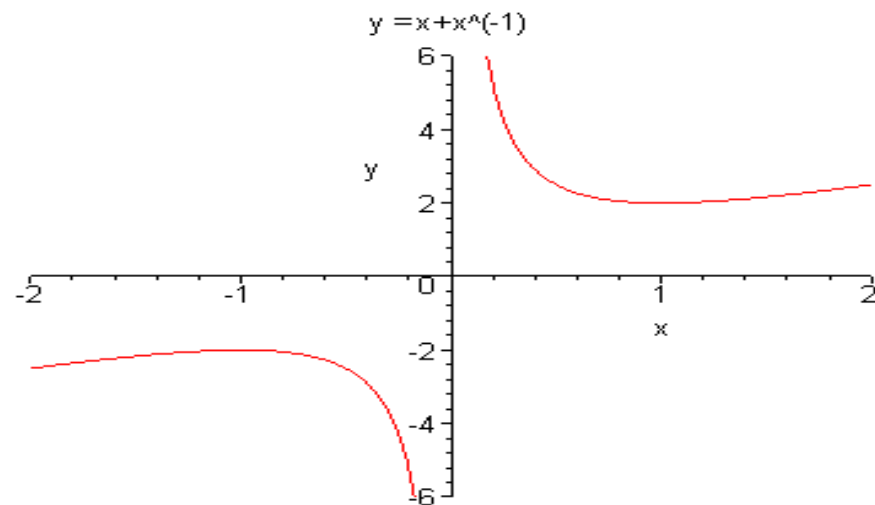
二、 1、



2、



3、

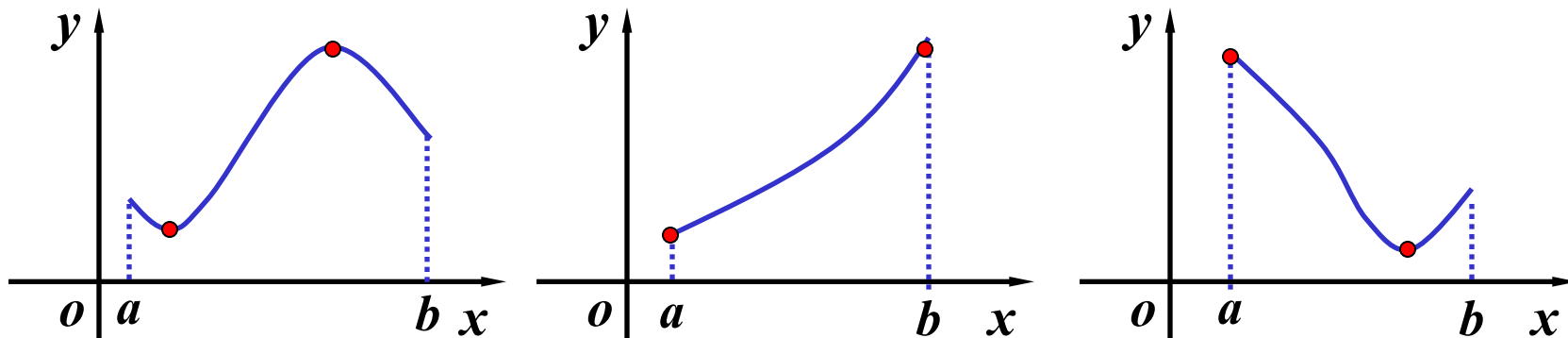




## 3.8 导数的应用

### 最值的求法:

若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 并且至多有有限个临界点, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值与最小值可用本节的方法求得.



## 求最值的步骤:

1. 求函数的临界点;
2. 求区间端点及临界点的函数值,比较大小,最大者即最大值,最小者即最小值.

**注意:**如果区间内只有一个极(大或小)值,则这个极(大或小)值就是最(大或小)值。

## 应用举例:

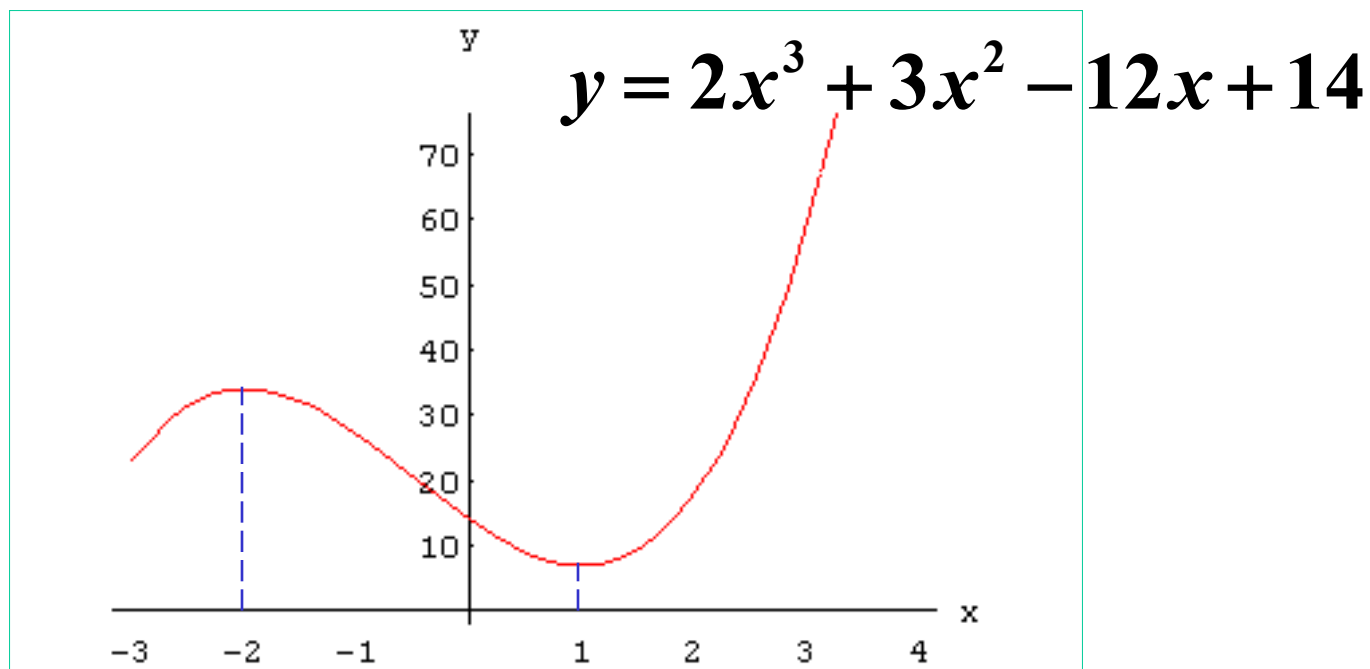
**例16** 求函数  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$  的在  $[-3, 4]$  上的最大值与最小值.

**解**  $\because f'(x) = 6(x+2)(x-1)$

解方程  $f'(x) = 0$ , 得  $x_1 = -2, x_2 = 1$ .

计算  $f(-3) = 23; \quad f(-2) = 34;$

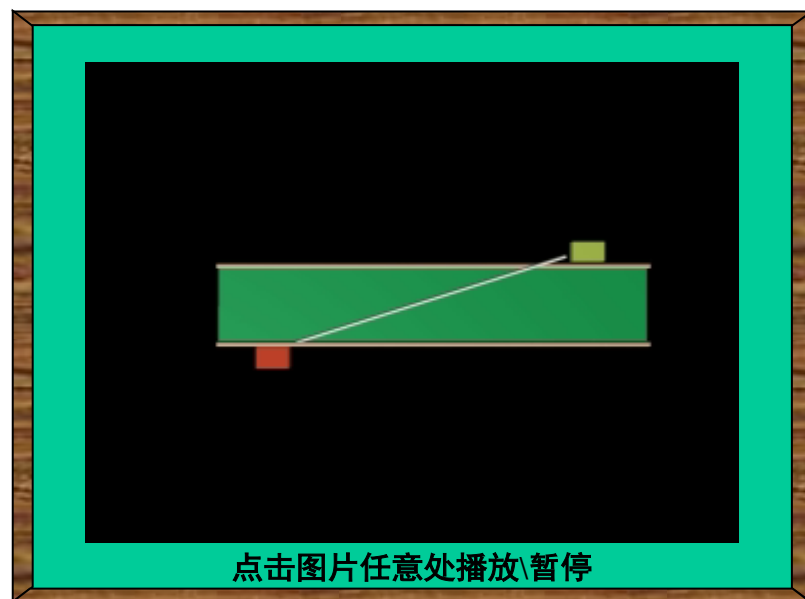
$f(1) = 7; \quad f(4) = 142;$



比较得 最大值  $f(4) = 142$ , 最小值  $f(1) = 7$ .

例17 一汽车从河的北岸A处以1千米/分钟的速度向正北行驶，同时一摩托车从河的南岸B处向正东追赶，速度为2千米/分钟.

问摩托车何时与汽车相距最近？



解 (1)建立两车相距函数关系:

设  $t$  为摩托车从  $B$  处出发起追赶的时间(分), 两车相距

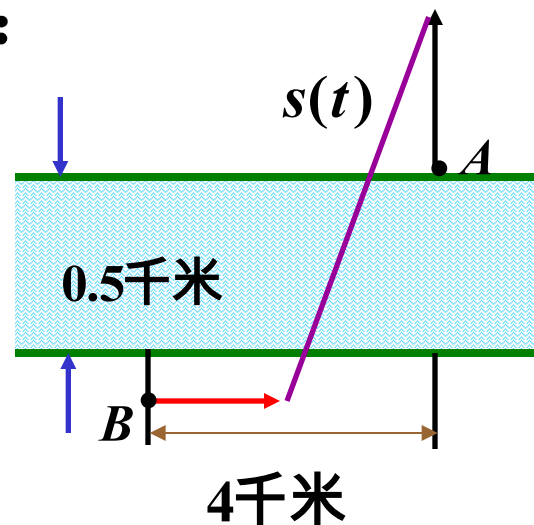
$$s(t) = \sqrt{(0.5 + t)^2 + (4 - 2t)^2}$$

(2) 求  $s = s(t)$  的最小值点.

$$s'(t) = \frac{5t - 7.5}{\sqrt{(0.5 + t)^2 + (4 - 2t)^2}}.$$

令  $s'(t) = 0$ , 得唯一驻点  $t = 1.5$ .

故摩托车从  $B$  处起追赶后 **1.5** 分钟距离最近.



## 实际问题求最值应注意：

- (1) 建立目标函数；
- (2) 求最值；

若目标函数只有唯一驻点，则该点的函数值即为所求的最大值或最小值.

**例18** 某房地产公司有50套公寓要出租，当租金定为每月1800元时，公寓会全部租出去，当租金每月增加100元时，就有一套公寓租不出去，而租出去的房子每月需花费200元的整修维护费．试问房租定为多少可获得最大收入？

**解** 设房租为每月 $x$ 元，租出去的房子有

$$50 - \left[ \frac{x - 1800}{100} \right] \text{ 套, 每月总收入为:}$$
$$R_0(x) = (x - 200) \left( 50 - \left[ \frac{x - 1800}{100} \right] \right) \text{ (元) .}$$



$$\text{令 } R(x) = (x - 200) \left( 68 - \frac{x}{100} \right)$$

$$R'(x) = \left( 68 - \frac{x}{100} \right) + (x - 200) \left( -\frac{1}{100} \right) = 70 - \frac{x}{50}.$$

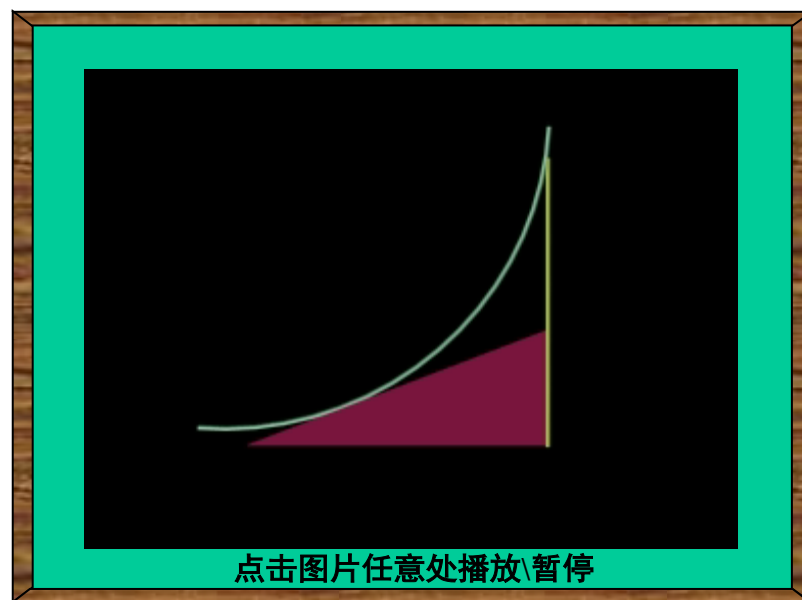
$$R'(x) = 0 \Rightarrow x = 3500 \quad (\text{唯一驻点})$$

故每月每套租金为3500元时收入最高。

最大收入为：

$$R(x) = (3500 - 200) \left( 68 - \frac{3500}{100} \right) = 108\,900 \text{ (元)}.$$

**例19** 由直线  $y = 0$ ,  $x = 8$  及抛物线  $y = x^2$  围成一个曲边三角形, 在曲边  $y = x^2$  上求一点, 使曲线在该点处的切线与直线  $y = 0$  及  $x = 8$  所围成的三角形面积最大.



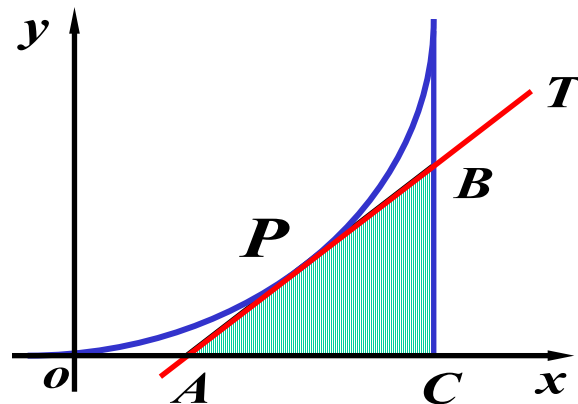
解 如图,

设所求切点为  $P(x_0, y_0)$ ,  
则切线  $PT$  为

$$y - y_0 = 2x_0(x - x_0),$$

$$\because y_0 = x_0^2, \therefore A\left(\frac{1}{2}x_0, 0\right), C(8, 0), B(8, 16x_0 - x_0^2)$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left(8 - \frac{1}{2}x_0\right)(16x_0 - x_0^2) \quad (0 \leq x_0 \leq 8)$$



$$\text{令 } S' = \frac{1}{4}(3x_0^2 - 64x_0 + 16 \times 16) = 0,$$

$$\text{解得 } x_0 = \frac{16}{3}, \quad x_0 = 16 \text{ (舍去).}$$

$$\because s''\left(\frac{16}{3}\right) = -8 < 0. \quad \therefore s\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{4096}{27} \text{ 为极大值.}$$

故  $s\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{4096}{27}$  为所有三角形中面积的最大者.

## 3.8 小结与思考题

注意最值与极值的区别.

最值是整体概念而极值是局部概念.

实际问题求最值的步骤.

## 思考题

若  $f(a)$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最值, 且  $f'(a)$  存在, 那么是否一定有  $f'(a) = 0$ ?

## 思考题解答

不成立. 因为最值点不一定是内点.

例  $y = f(x) = x \quad x \in [0,1]$

在  $x = 0$  有最小值, 但  $f'(0) = f'_+(0) = 1 \neq 0$ .

## 课堂练习题

### 一、 填空题:

1. 最值可在\_\_\_\_\_处取得.

2. 函数  $y = 2x^3 - 3x^2$  ( $0 \leq x \leq 5$ ) 的最大值为\_\_\_\_\_；最小值为\_\_\_\_\_.

3. 函数  $y = \sqrt{100 - x^2}$  在  $[0, 8]$  上的最大值为\_\_\_\_\_；最小值为\_\_\_\_\_.

二、 求函数  $y = x^2 - \frac{16}{x}$  ( $x < 0$ ) 的最小值.

三、 求数列  $\left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\}$  的最大项 .



## 课堂练习题答案

一、1、区间端点及临界点；

2、最大值  $y(5) = 175$ ， 最小值  $y(1) = -1$ ；

3、10, 6.

二、当  $x = -2$  时，函数有最小值 12.

三、数列  $\left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\}$  的第 3 项:  $\frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$ .