第三章 微分中值定理与导数应用

第二讲：泰勒中值公式

2.1 泰勒中值定理

一、问题的提出

1. 设$f(x)$在x_0处连续, 则有

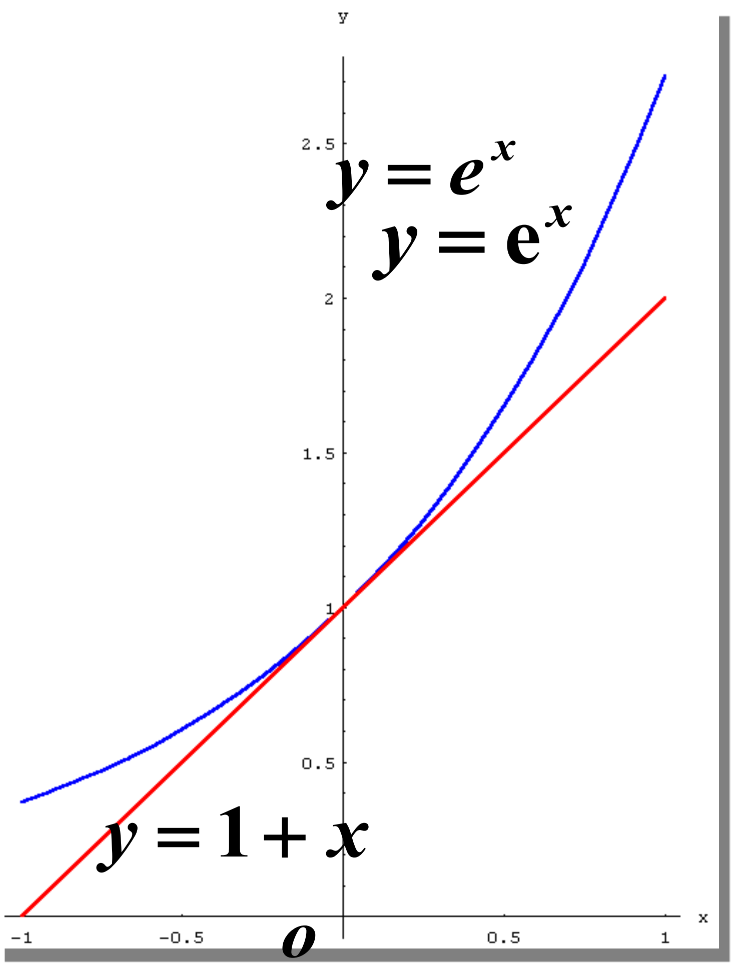
$$f(x)\approx f(x_0) \qquad [f(x)=f(x_0)+\alpha]$$

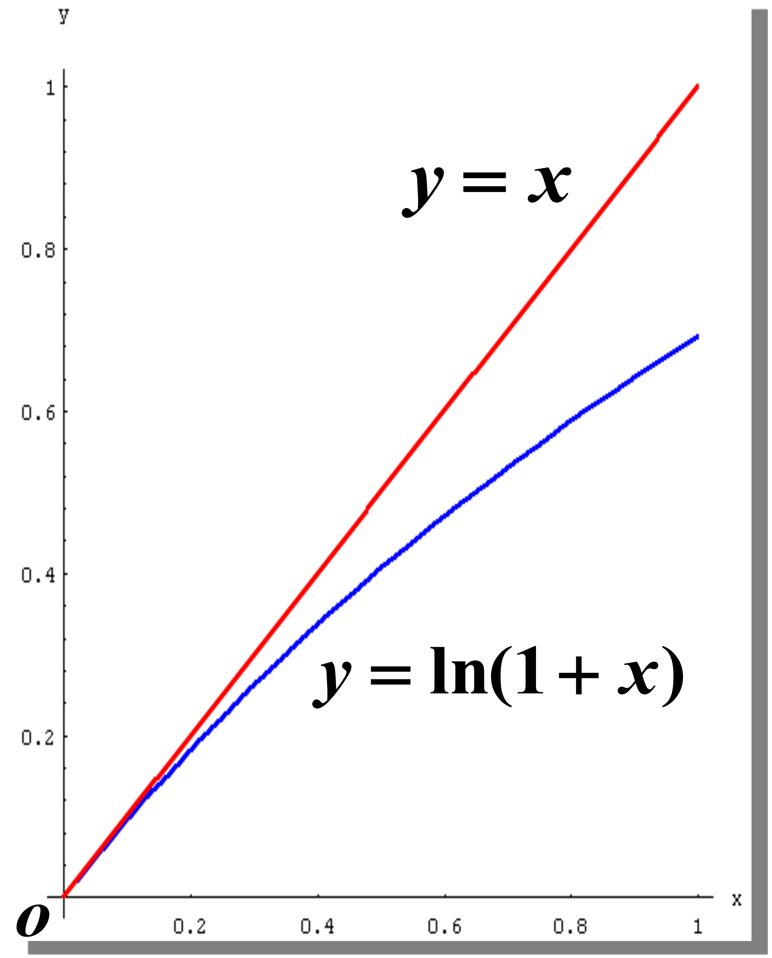
2. 设$f(x)$在x_0处可导, 则有

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

$$[f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)]$$

例如，当$|x|$很小时，$e^x \approx 1+x$，$\ln(1+x) \approx x$





不足： 1、精确度不高； 2、误差不能估计。

问题： 寻找函数$P(x)$, 使得$f(x)\approx P(x)$

误差 $R(x)=f(x)-P(x)$ 可估计

设函数$f(x)$在含有x_0的开区间(a,b)内具有直到$(n+1)$阶导数, $P(x)$为多项式函数

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

误差 $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$

二、P_n和R_n的确定

分析:

近似程度越来越好

1.若在x_0点相交

$$P_n(x_0)=f(x_0)$$

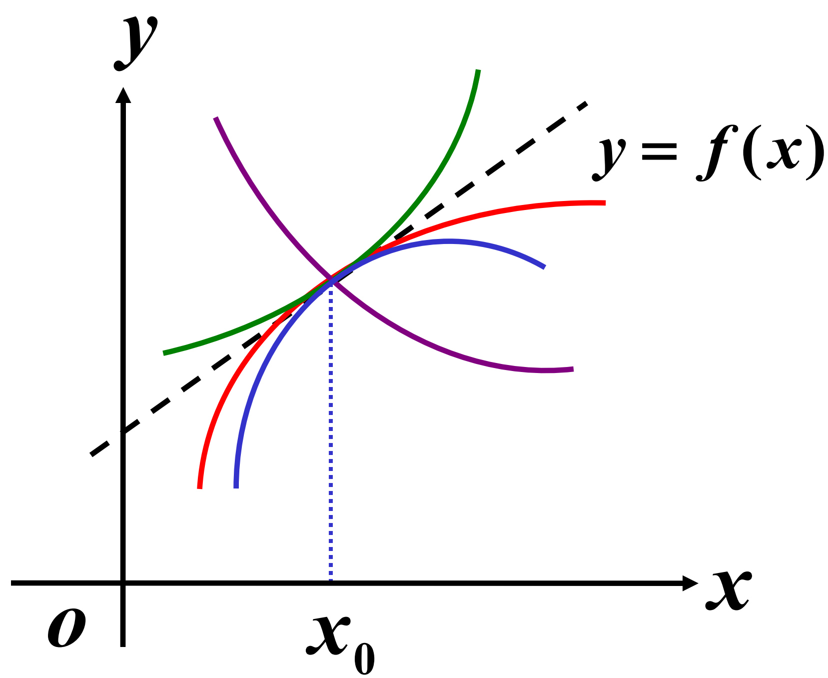
2.若有相同的切线

$$P_n'(x_0)=f'(x_0)$$

3.若弯曲方向相同

$$P_n''(x_0)=f''(x_0)$$

…… ……



假设 $P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)\quad k=0,1,2,\cdots,n$

$a_0=f(x_0),\quad 1\cdot a_1=f'(x_0),\quad 2!\cdot a_2=f''(x_0)$

$\cdots\quad\cdots,\ n!\cdot a_n=f^{(n)}(x_0)$

得 $a_k=\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)\qquad(k=0,1,2,\cdots,n)$

代入$P_n(x)$中得

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

三、泰勒中值公式

泰勒(Taylor)中值定理

若函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a,b)内具有直到$(n+1)$阶的导数, 则当x在(a,b)内时， $f(x)$可以表示为$(x-x_0)$的一个n次多项式与余项$R_n(x)$之和:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（$\xi$在$x_0$与$x$之间）.

证 由假设, $R_n(x)$在(a,b)内具有直到$(n+1)$阶导数, 且

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=R_n''(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$$

两函数$R_n(u)$及$(u-x_0)^{n+1}$在以x_0及x为端点的区间上满足柯西中值定理的条件, 得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0} = \frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}$$

(ξ_1在x_0与x之间)

二函数 $R_n'(u)$ 及 $(n+1)(u-x_0)^n$ 在以 x_0 及 ξ_1 为端点的区间上满足柯西中值定理的条件, 得

$$\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} = \frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}$$

$$= \frac{R_n''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2 - x_0)^{n-1}} \qquad (\xi_2\text{在}x_0\text{与}\xi_1\text{之间})$$

如此下去, 经过$(n+1)$次后, 得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

(ξ在x_0与ξ_n之间, 也在x_0与x之间)

$$\because \quad P_n^{(n+1)}(x) = 0, \qquad \therefore \quad R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

则由上式得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi\text{ 在 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间}).$$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

称为$f(x)$按$(x-x_0)$的幂展开的n次泰勒多项式;

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

称为$f(x)$按$(x-x_0)$的幂展开的n阶泰勒公式,

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间}).$$

拉格朗日型余项

当 $\left|f^{(n+1)}(x)\right| < M$ 时，$\left|R_n(x)\right| = \left|\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|$

$$\le \frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\right| <= \lim_{n\to\infty}\frac{M|x-x_0|}{(n+1)!} = 0$$

即 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$. 皮亚诺型余项

$$\therefore f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o[(x-x_0)^n]$$

注意:

1、当$n=0$时, 泰勒公式变成拉氏中值公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)\ ,$$

(ξ在x_0与x之间).

2、取$x_0=0$, ξ在0与x之间, 令$\xi=\theta x$, $(0<\theta<1)$

则拉氏余项: $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

四、麦克劳林(Maclaurin)公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$+o(x^n)$$

常用函数的麦克劳林公式:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \cdots + C_m^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\ (x\in\mathrm{R});$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!},\ (x\in\mathrm{R});$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k},\ (-1<x\le 1);$$

$$(1+x)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k,\ (|x|<1);$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k,\ (|x|<1);\ \mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!},\ (x\in\mathrm{R}).$$

五、简单的应用

例 17　求 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的 n 阶麦克劳林公式.

解　$\because \quad f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x,$

$\therefore \quad f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$

注意到 $f^{(n+1)}(\theta x)=\mathrm{e}^{\theta x}$　代入公式,得

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

由公式可知 $\mathrm{e}^{x} \approx 1+x+\dfrac{x^{2}}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{n}}{n!}$

估计误差: (设 $x>0$)

$$\left|R_{n}(x)\right|=\left|\frac{\mathrm{e}^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!}\right|<\frac{\mathrm{e}^{x}}{(n+1)!} x^{n+1}(0<\theta<1).$$

$$x=1, \quad \mathrm{e} \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

其误差 $\left|R_{n}\right|<\dfrac{\mathrm{e}}{(n+1)!}<\dfrac{3}{(n+1)!}.$

例 18　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解　$\because\quad e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2!}x^4+o(x^4)$

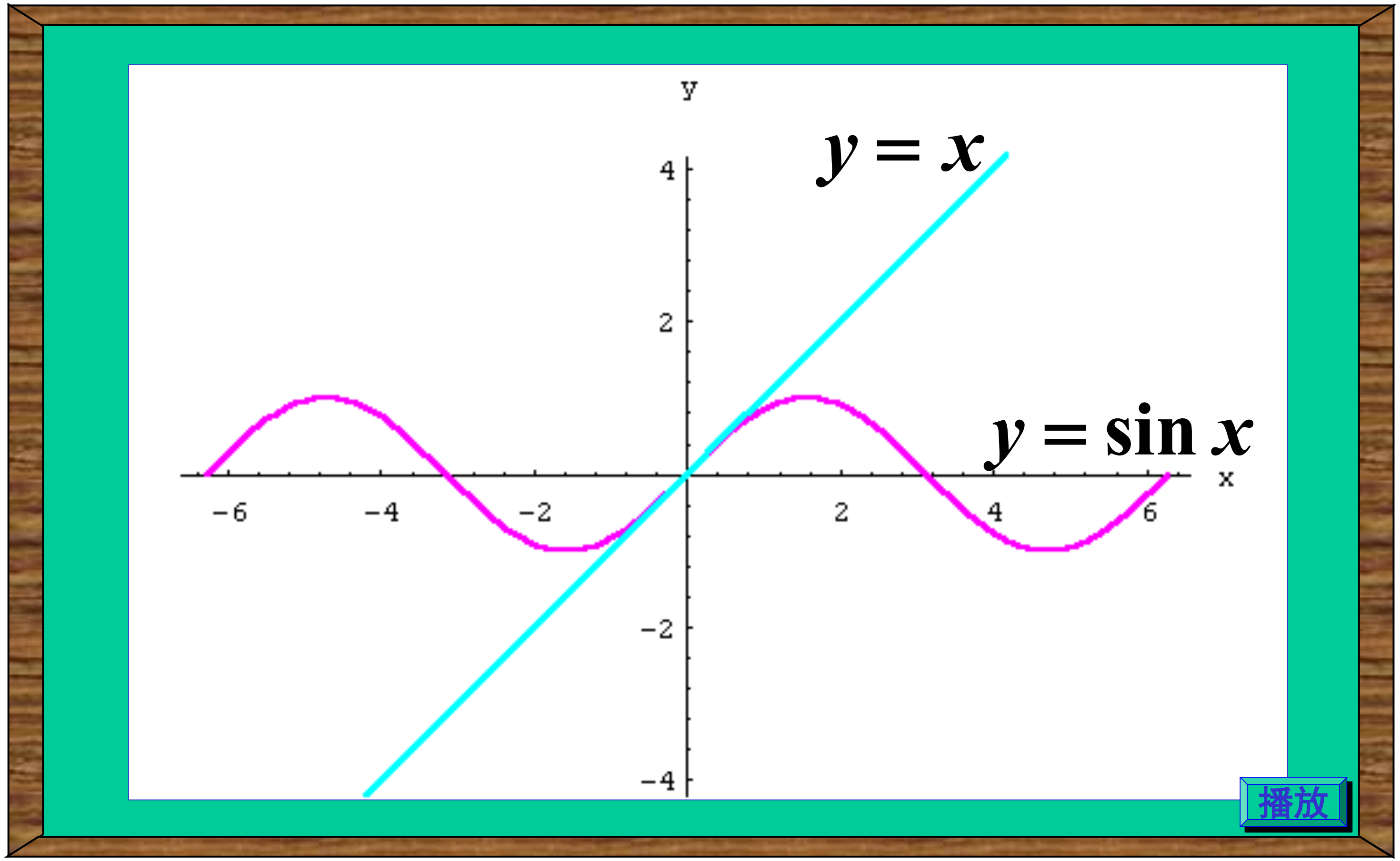
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$$

$$\therefore\quad e^{x^2}+2\cos x-3=(\frac{1}{2!}+2\cdot\frac{1}{4!})x^4+o(x^4)$$

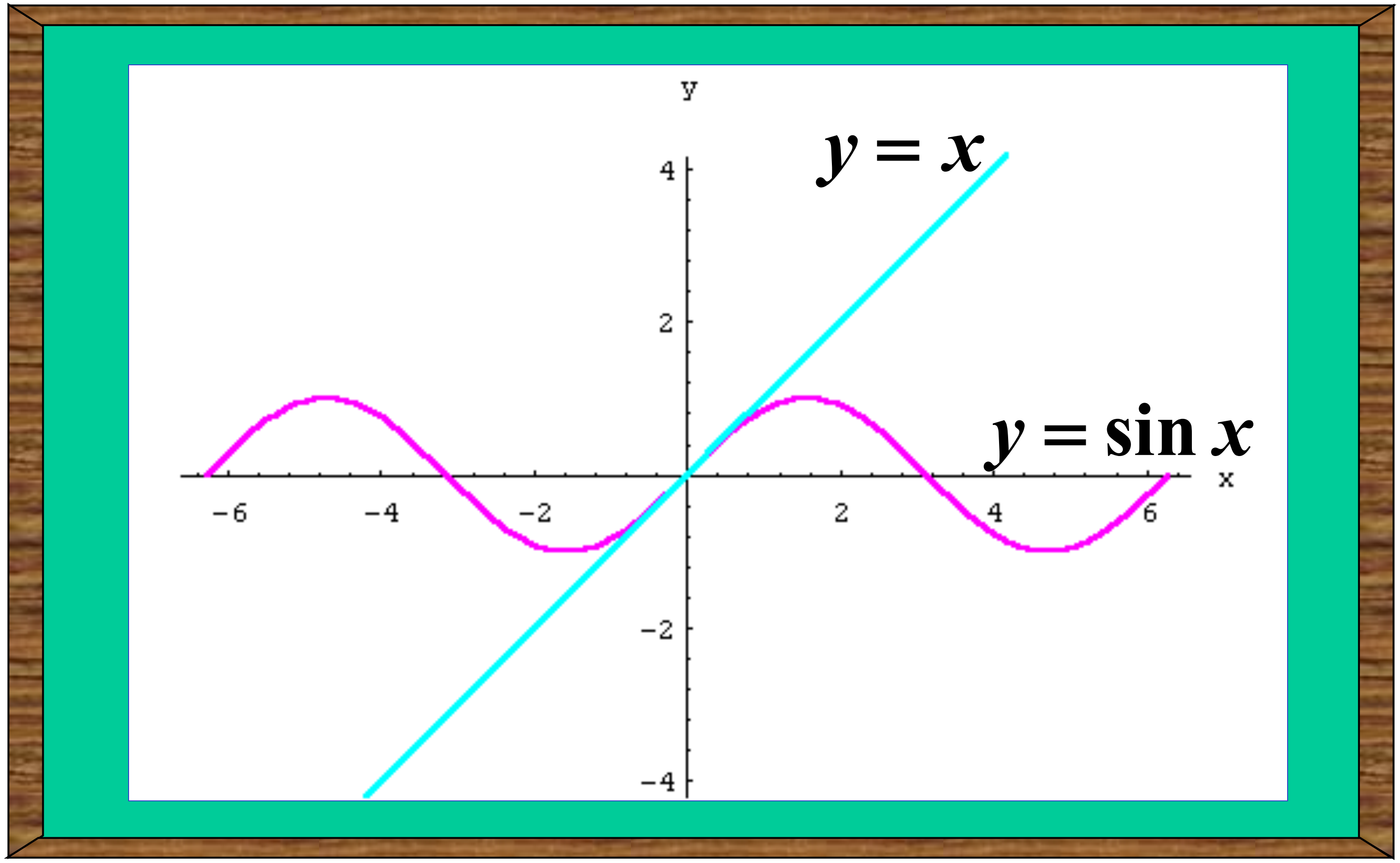
$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{7}{12}$$

2.3.4 小结与思考题

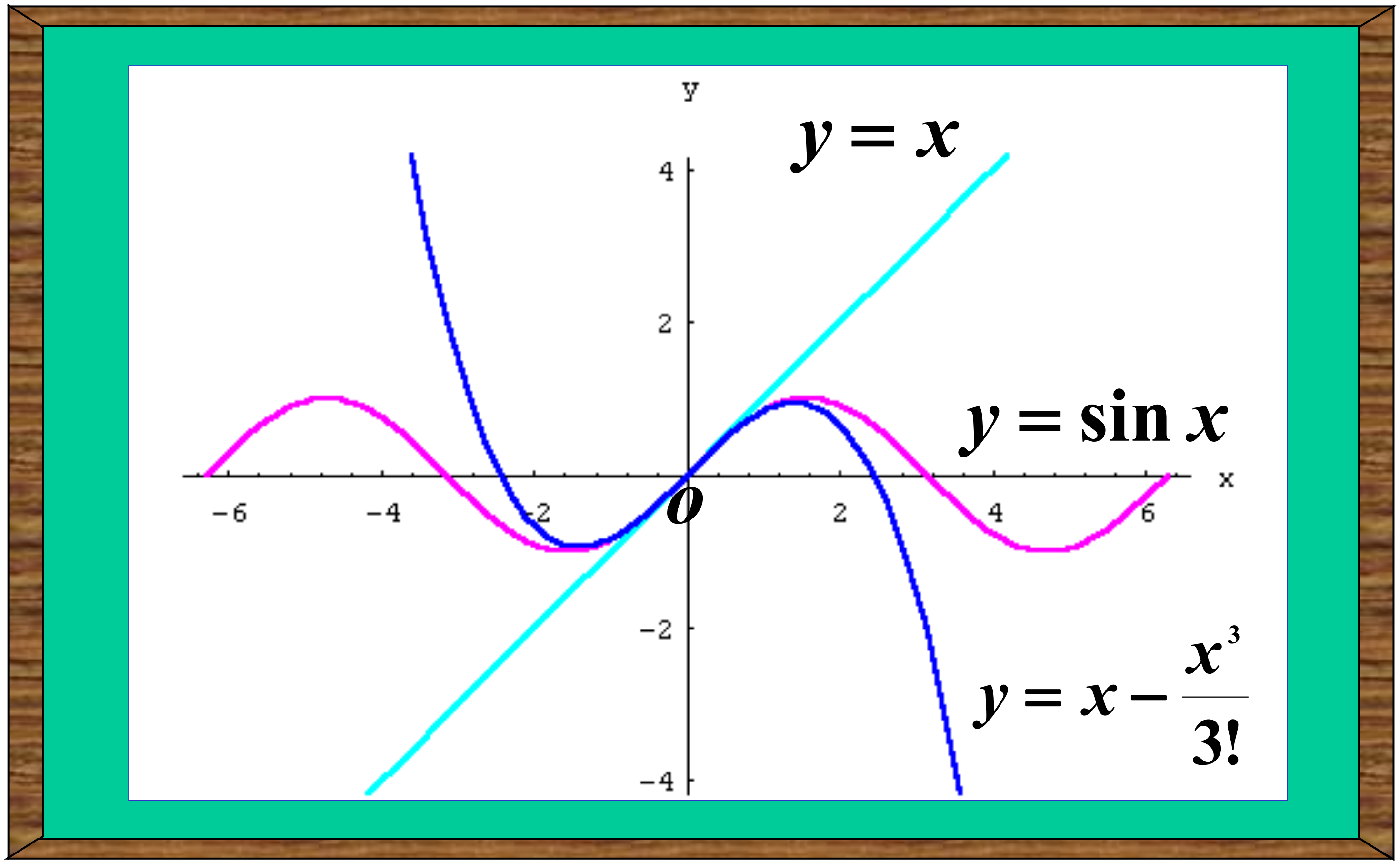
1. Taylor 公式在近似计算中的应用;



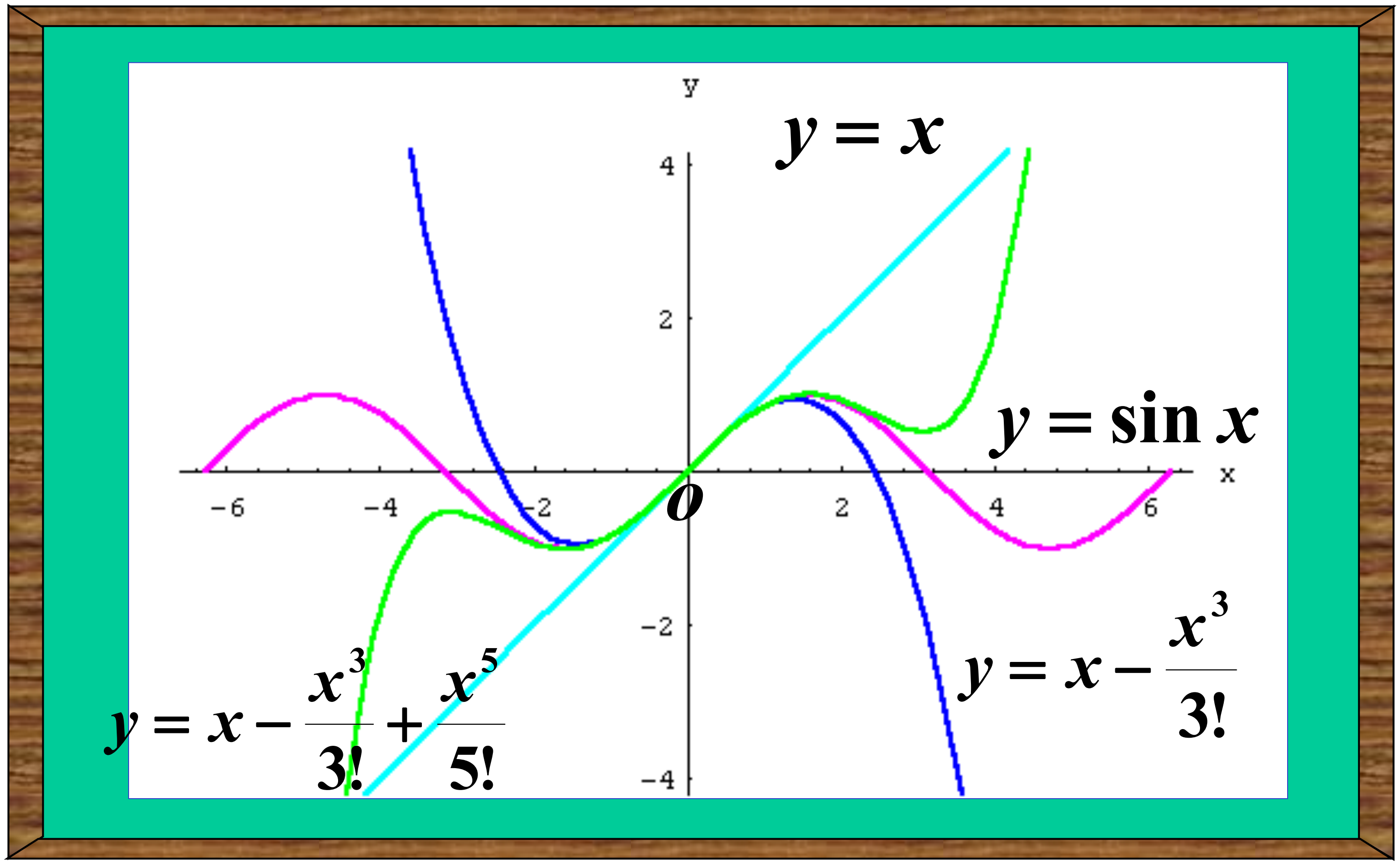
1. Taylor 公式在近似计算中的应用;



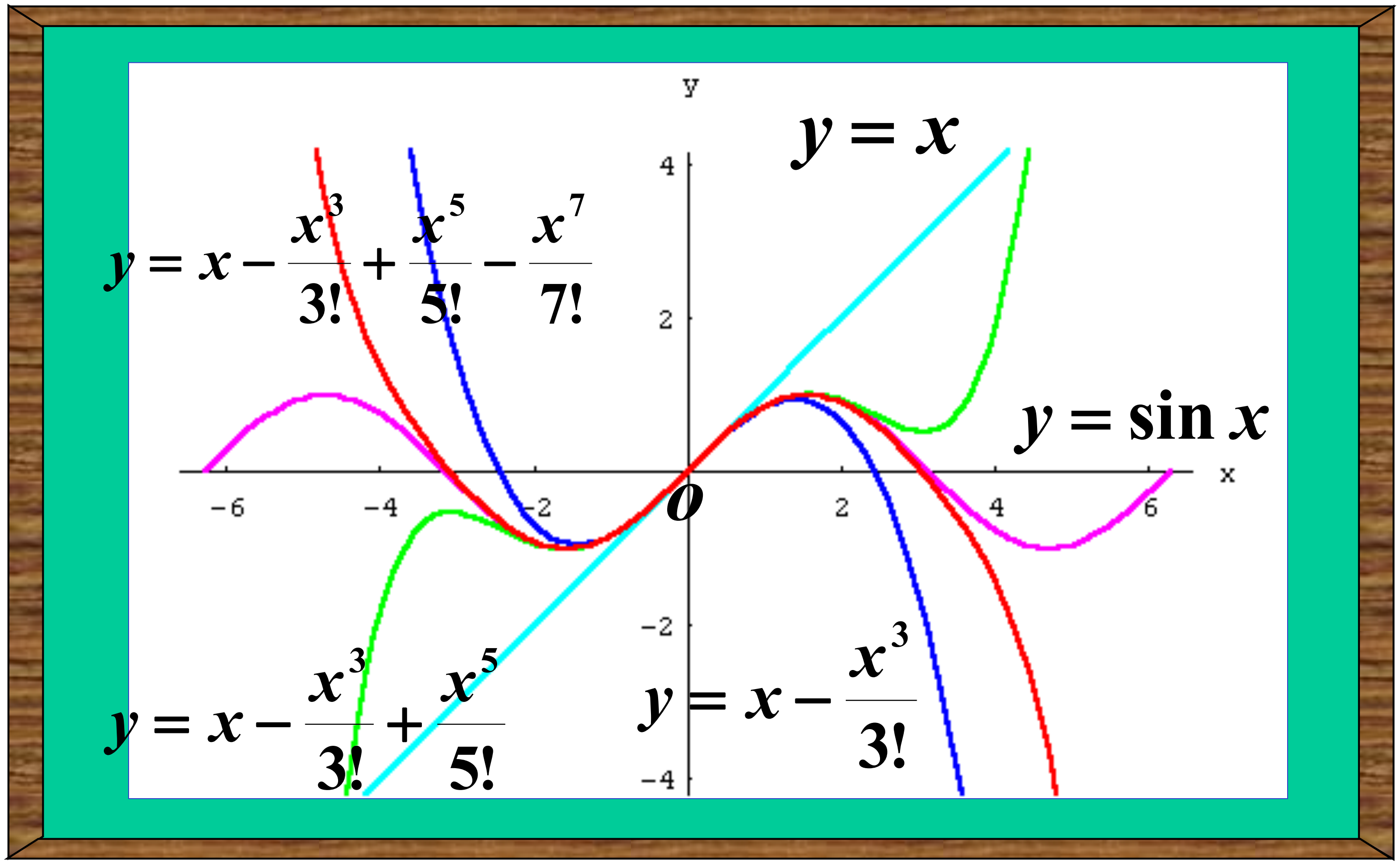
1. Taylor 公式在近似计算中的应用；



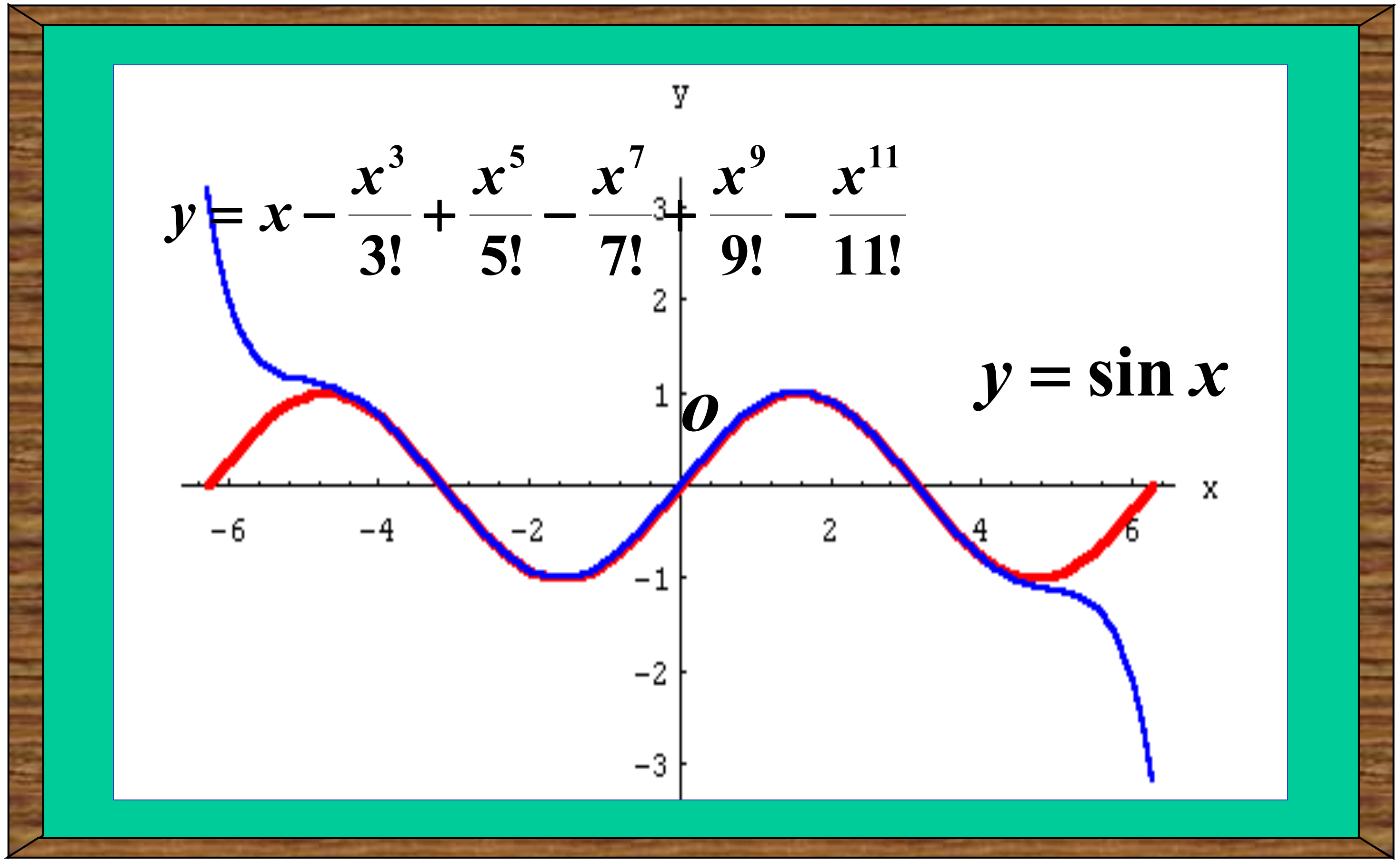
1. Taylor 公式在近似计算中的应用;



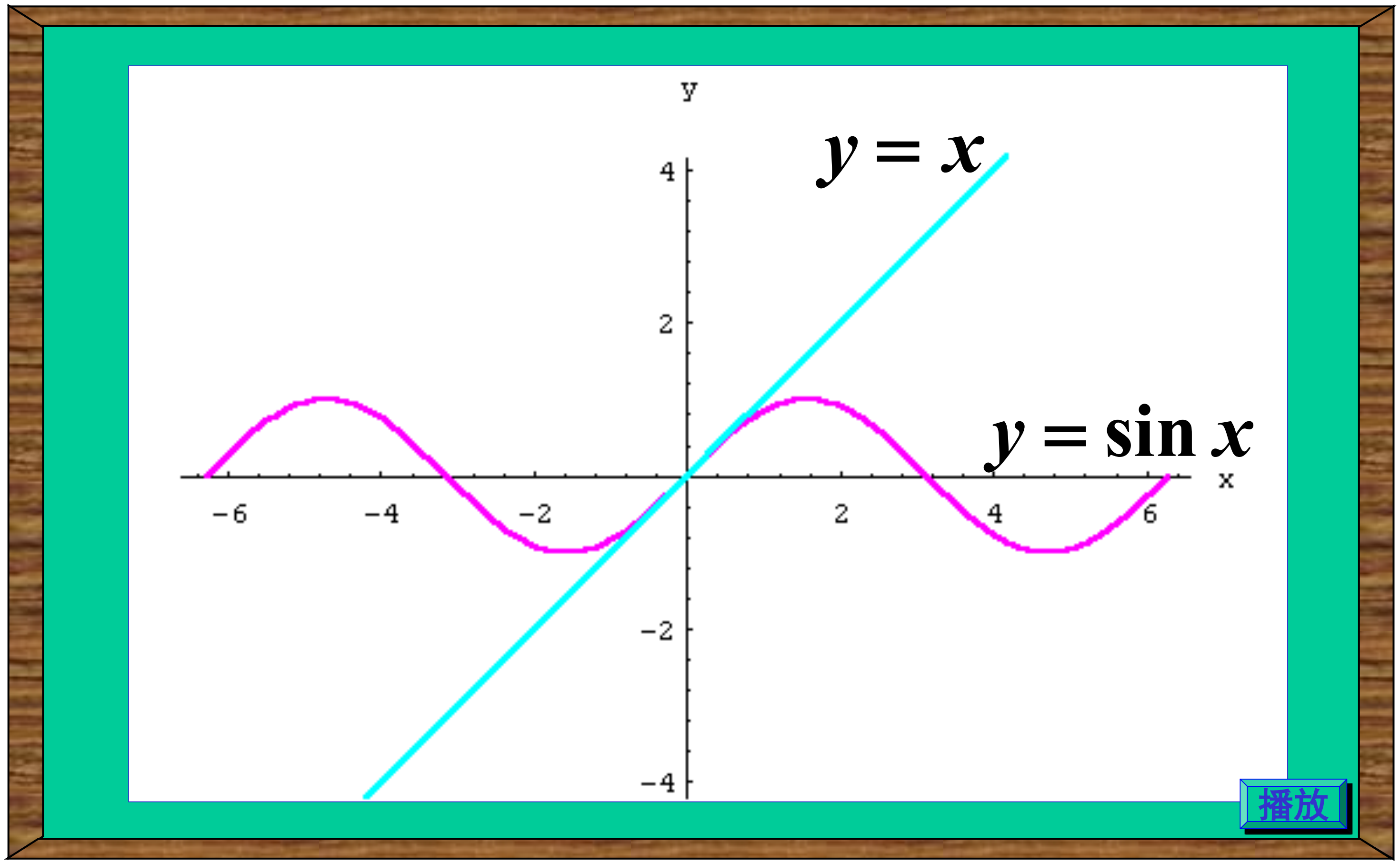
1. Taylor 公式在近似计算中的应用;



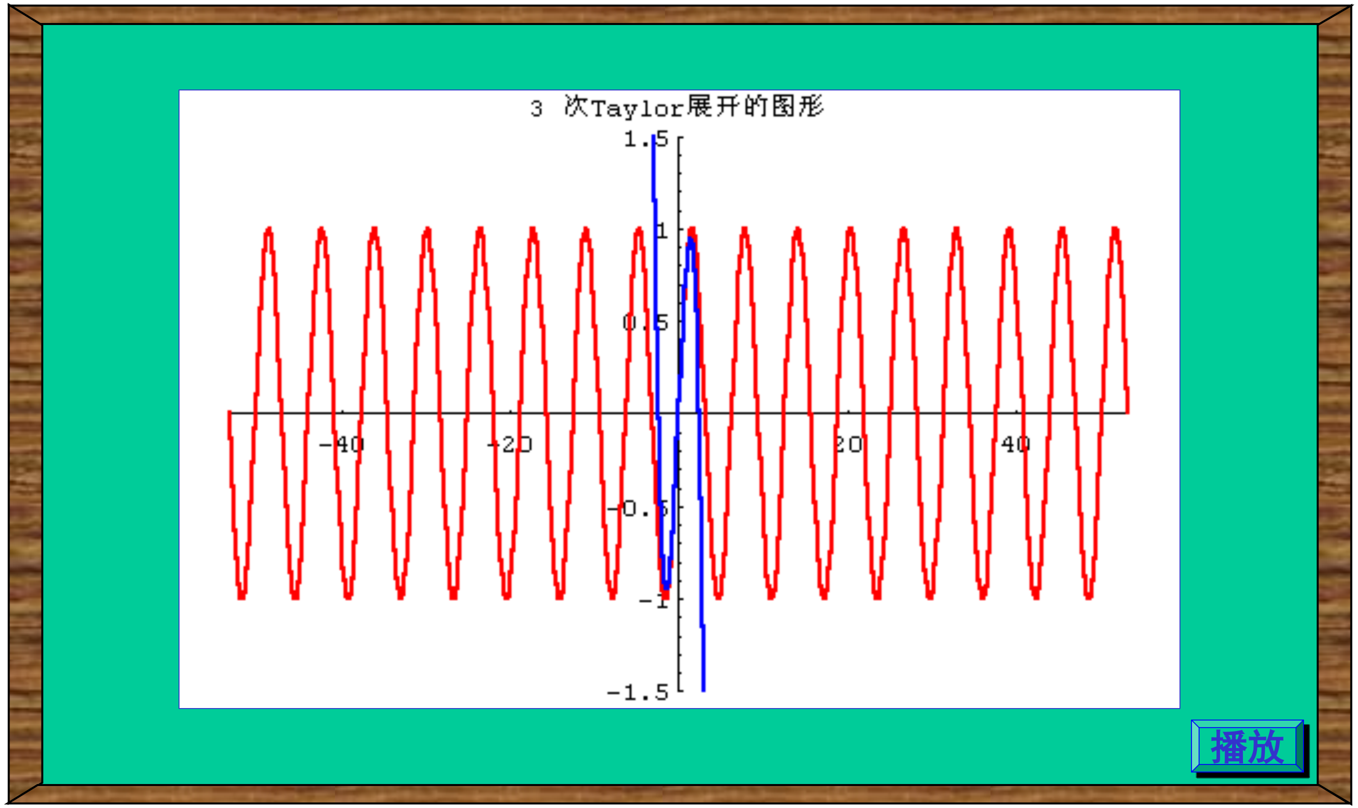
1. Taylor 公式在近似计算中的应用;



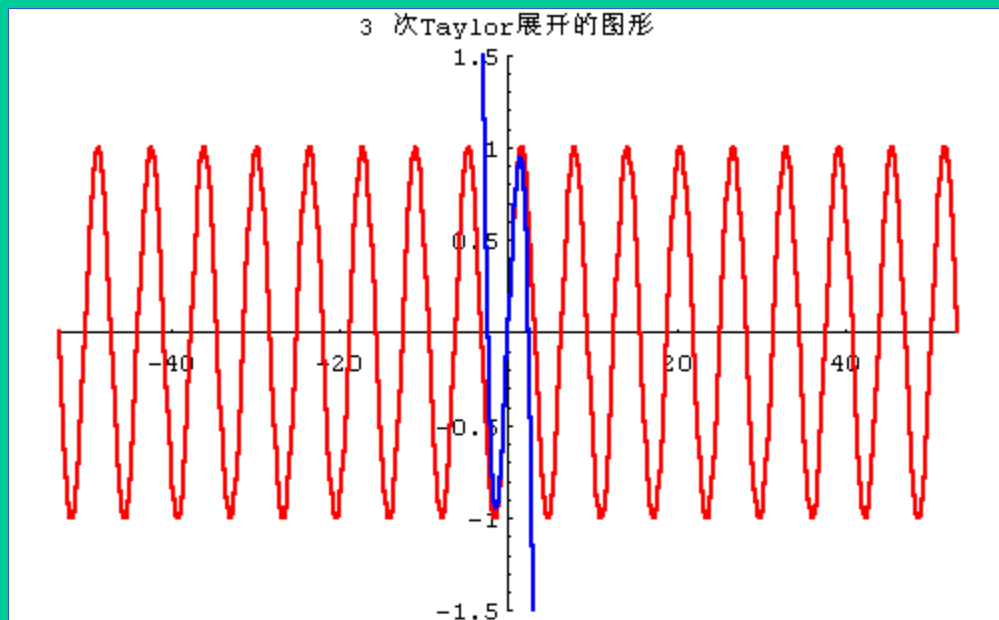
1. Taylor 公式在近似计算中的应用;



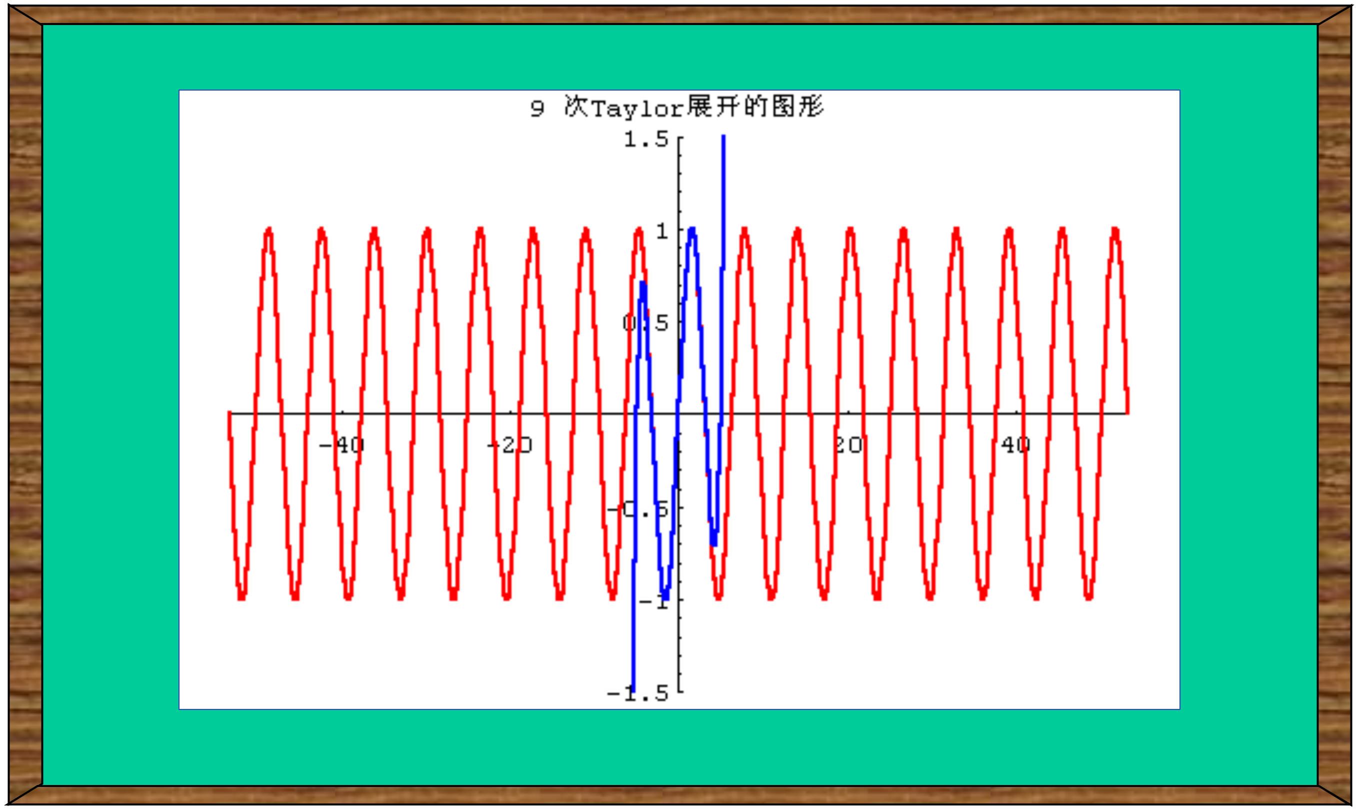
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



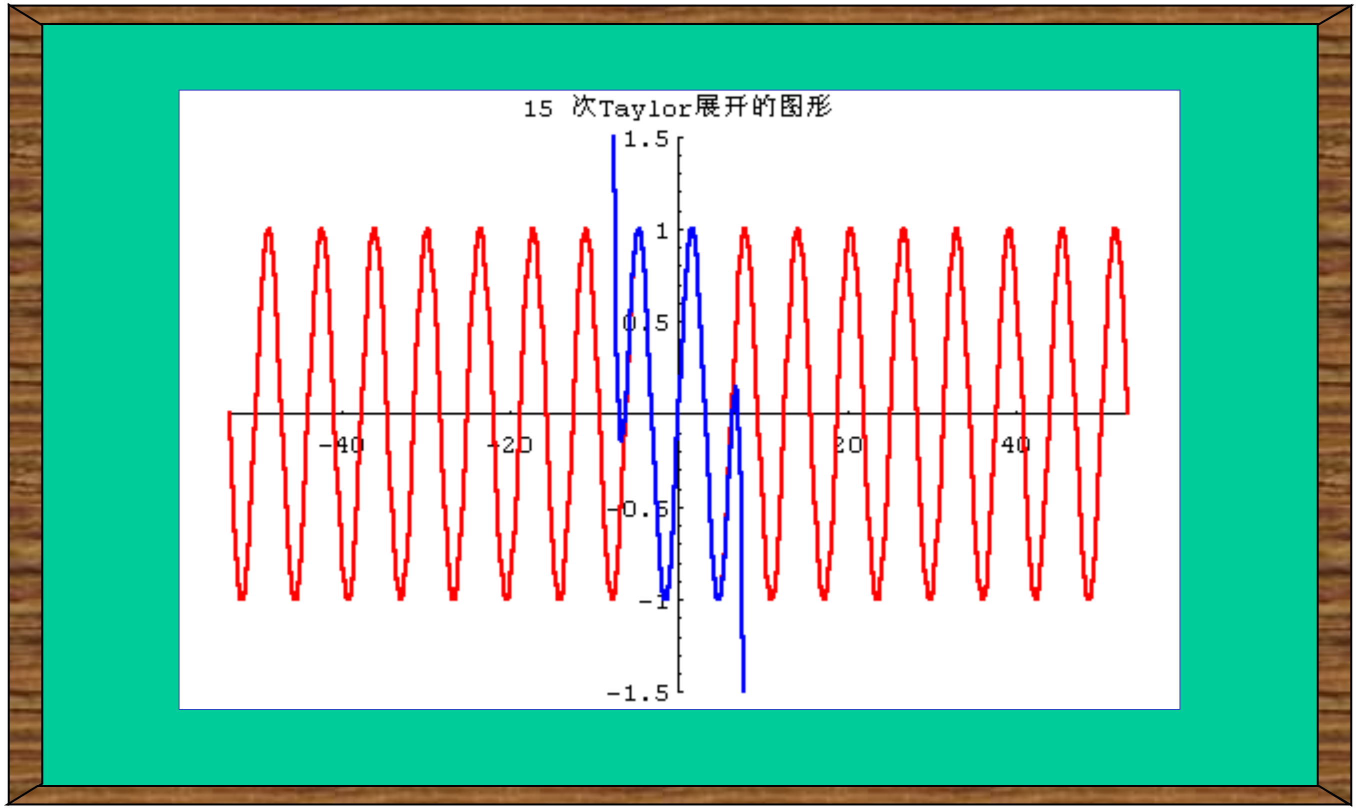
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



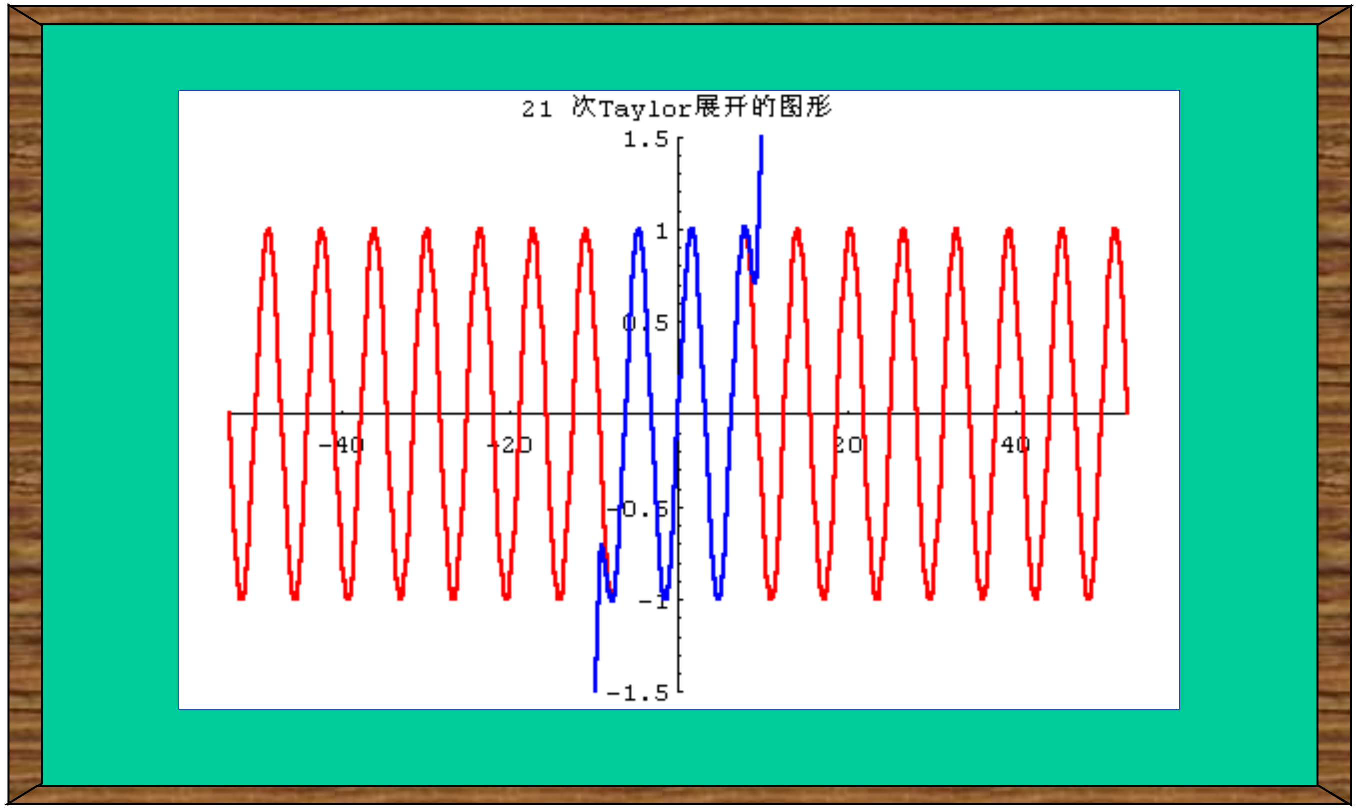
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



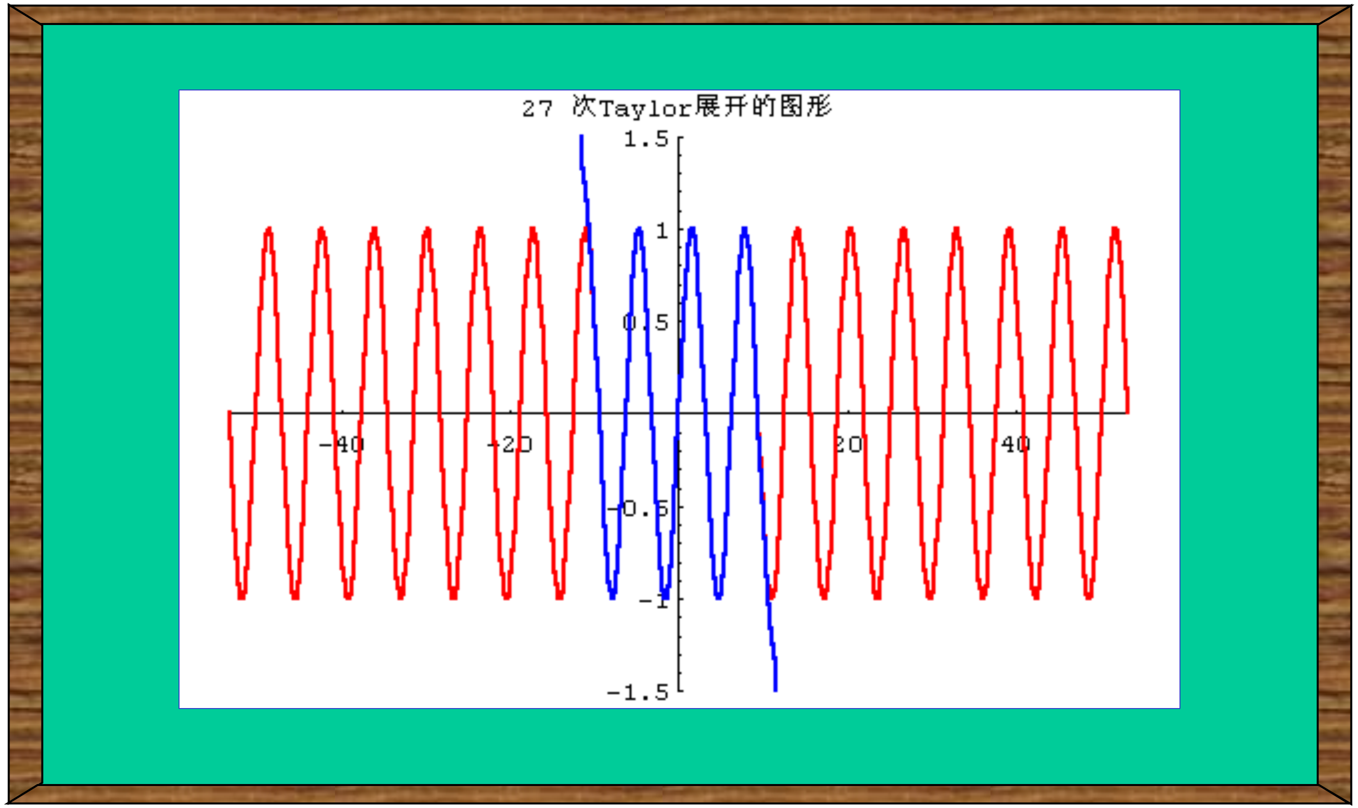
2. Taylor 公式的数学思想——局部逼近.



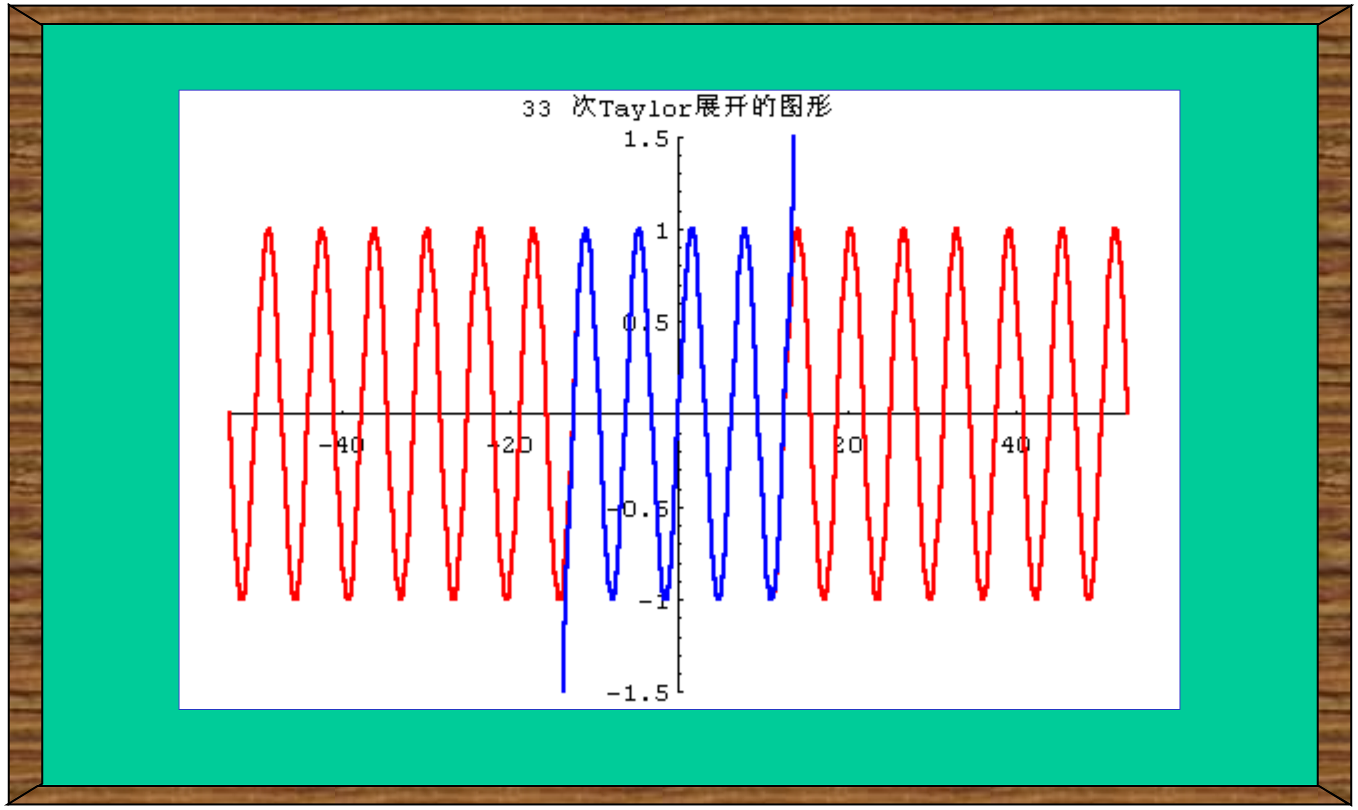
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



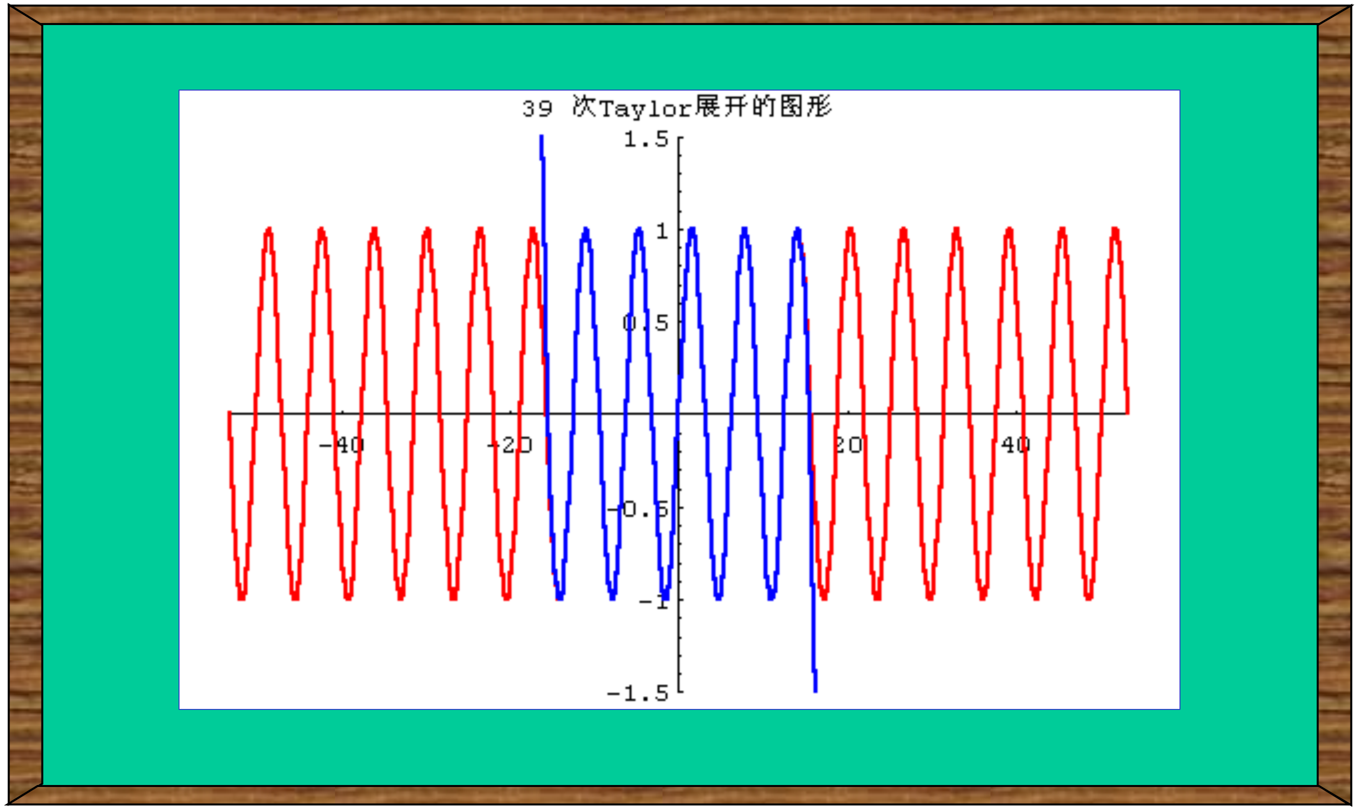
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



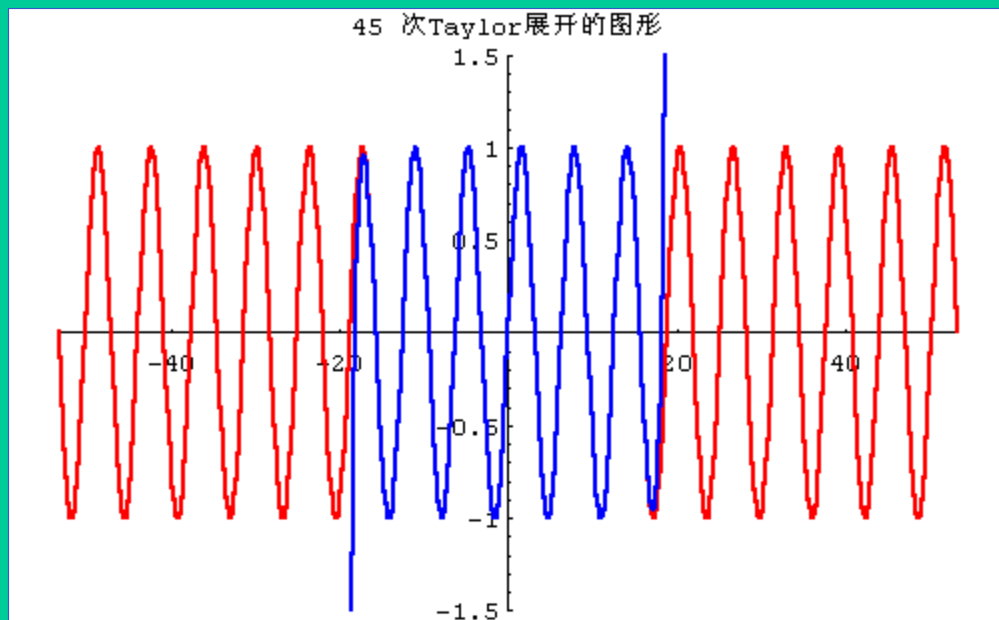
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



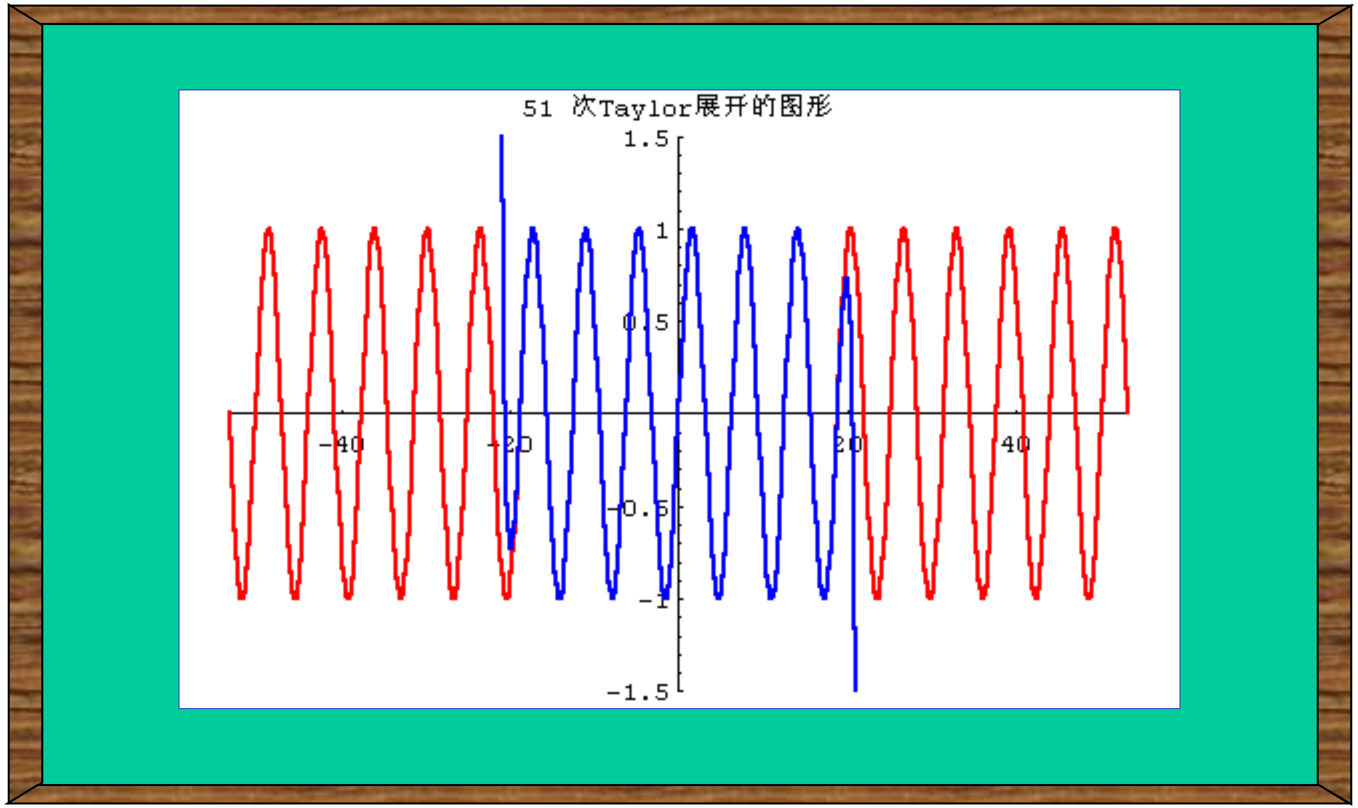
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



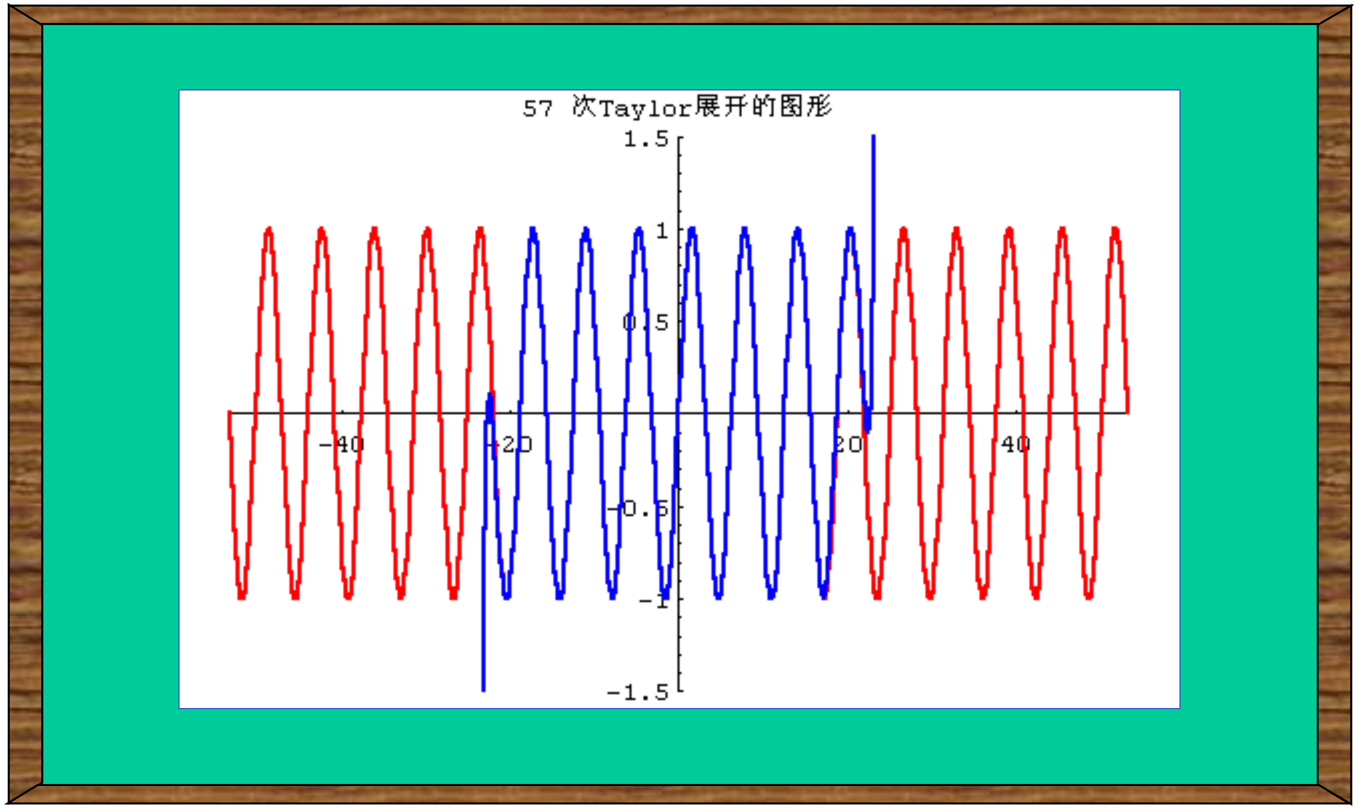
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



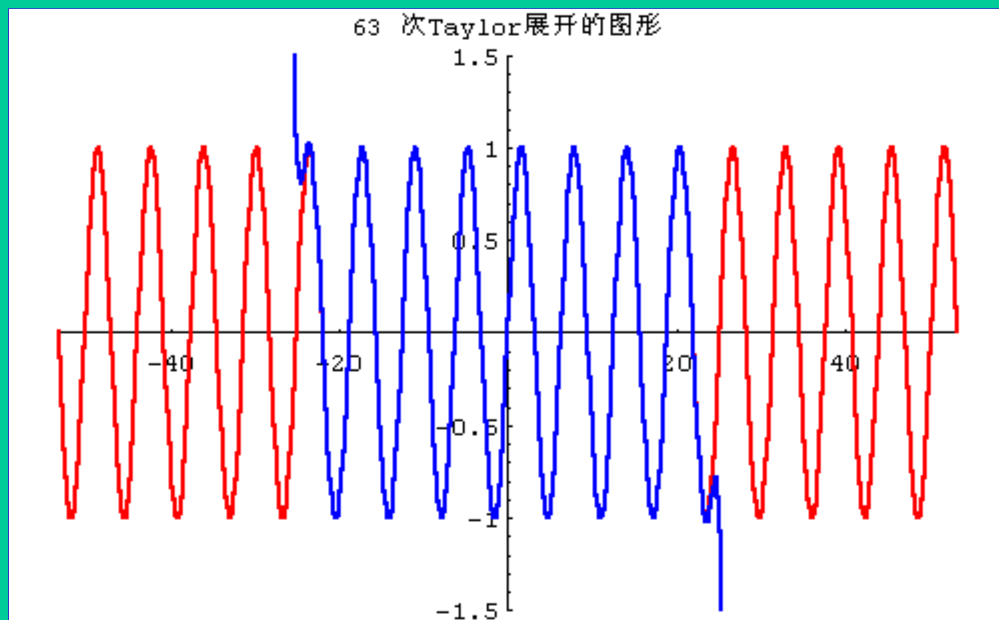
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



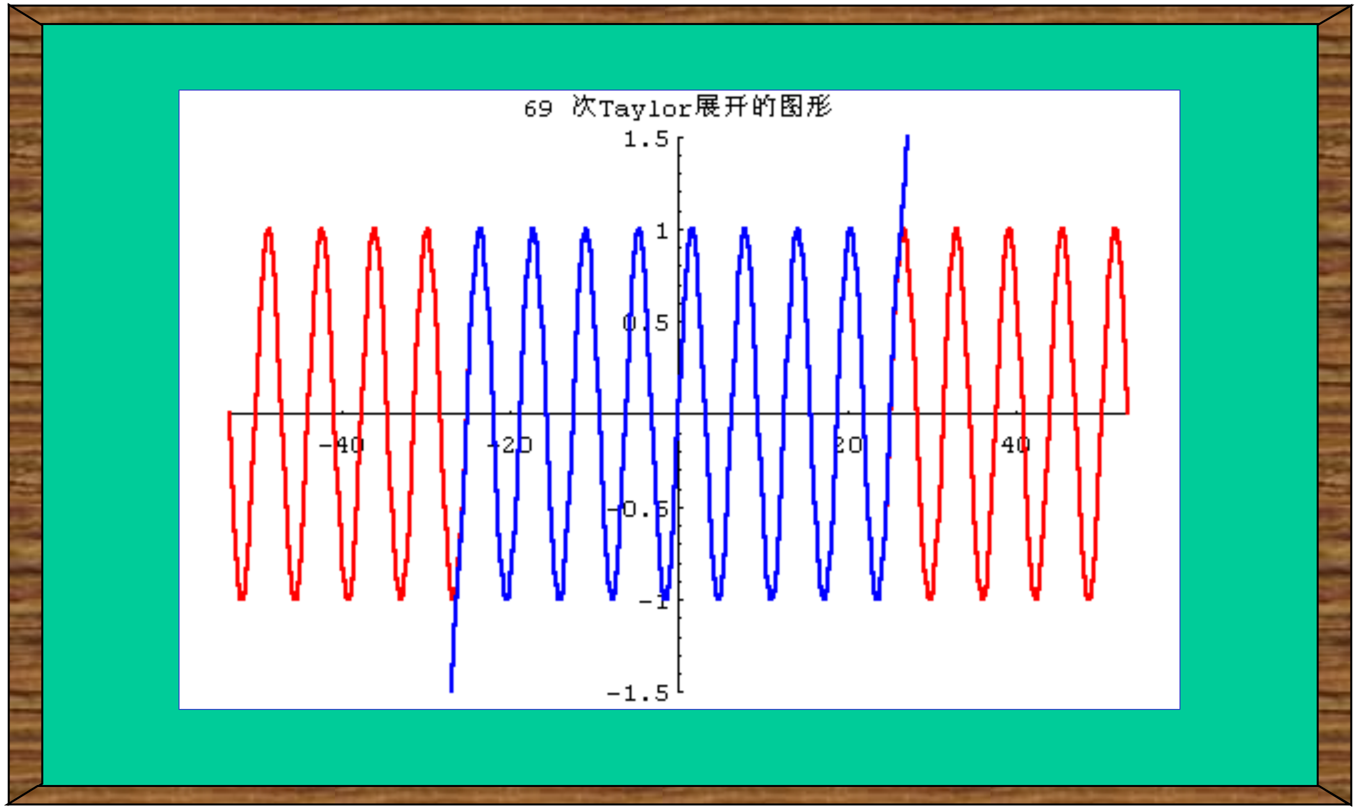
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



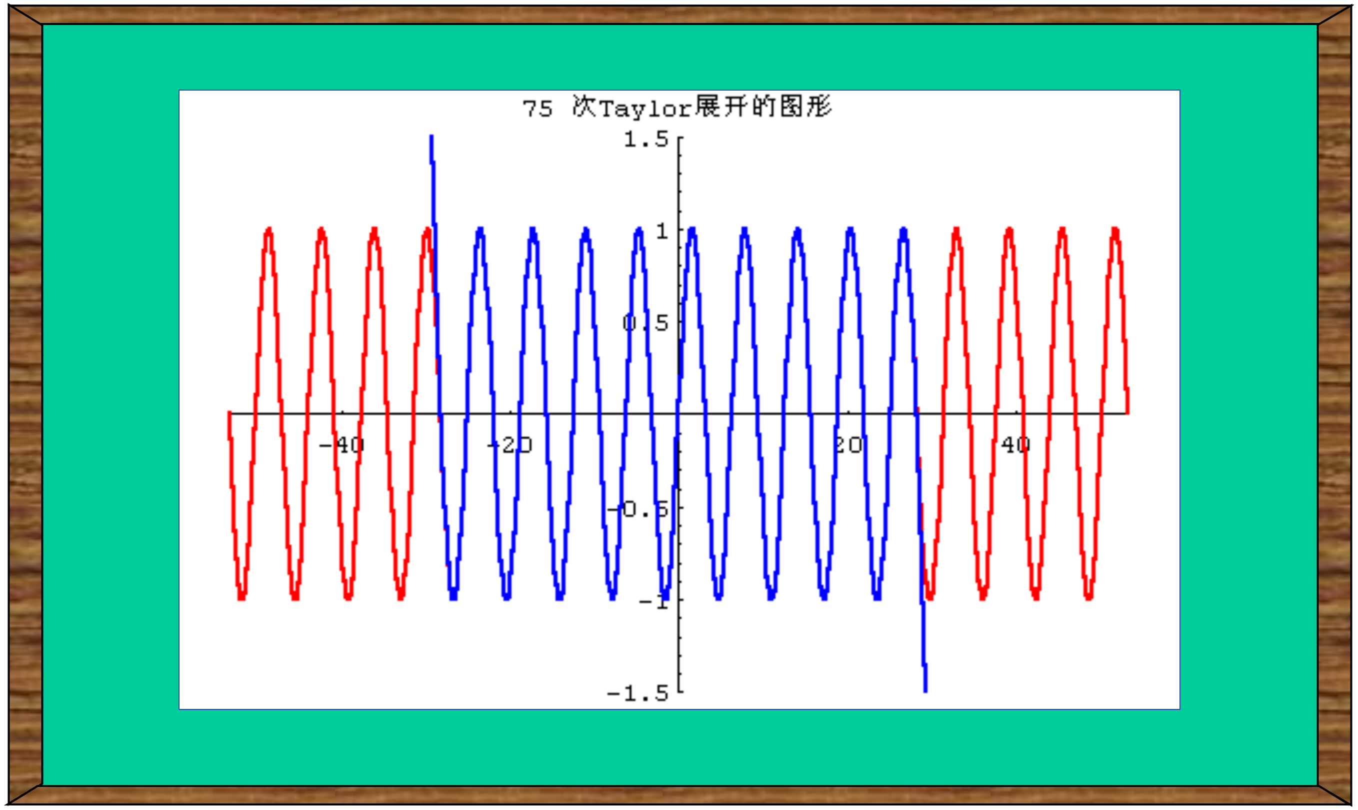
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



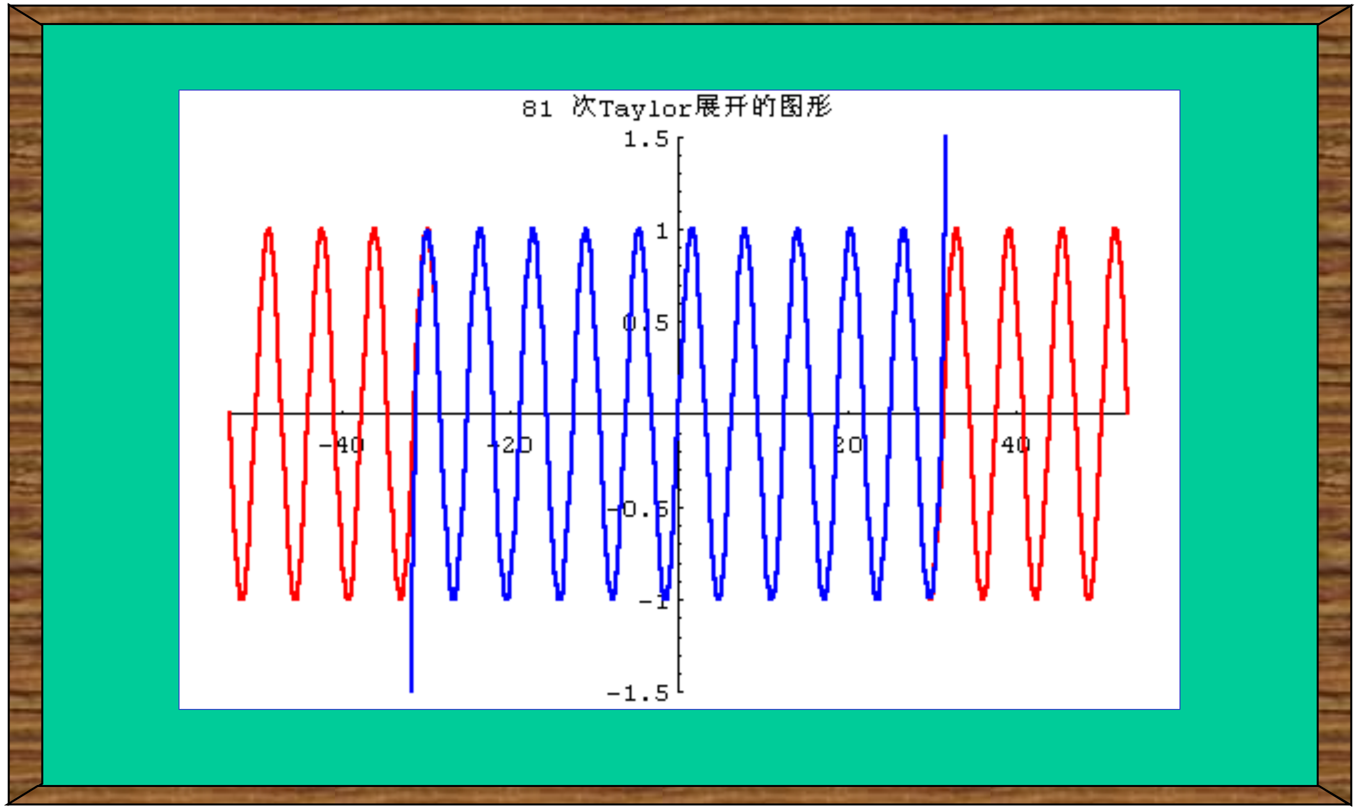
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



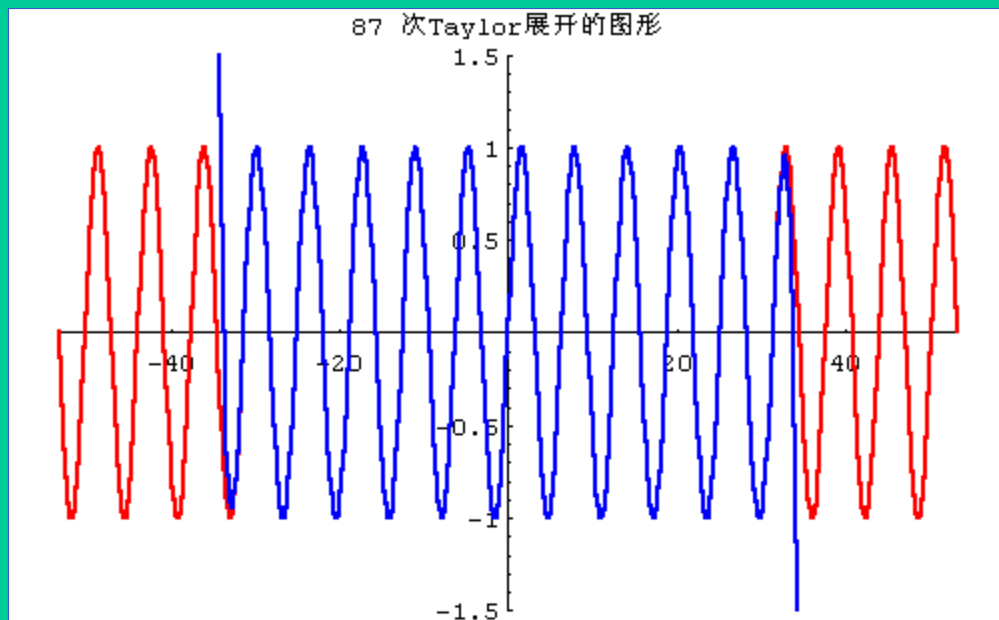
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



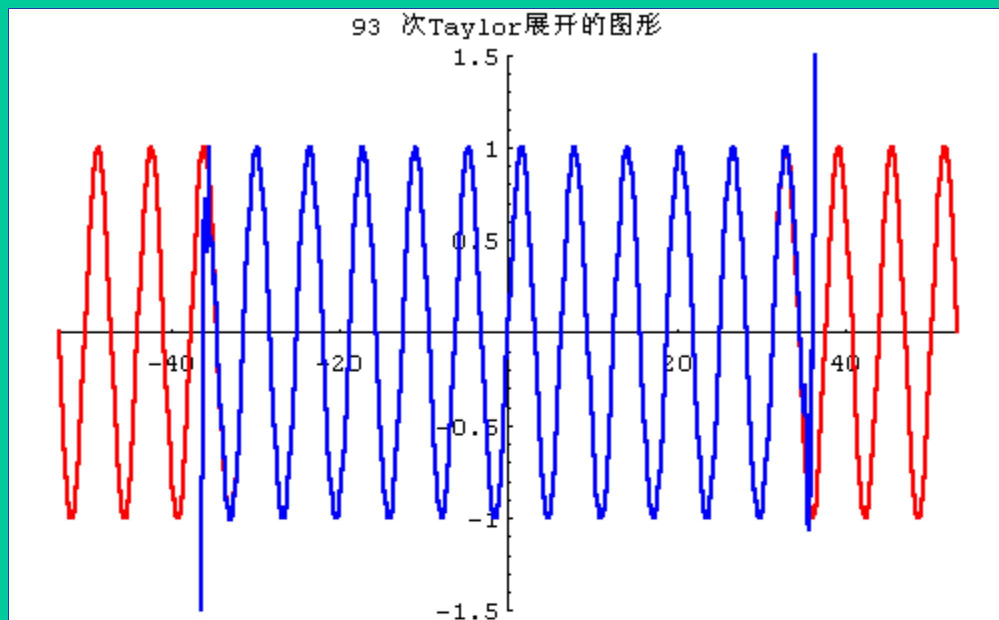
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



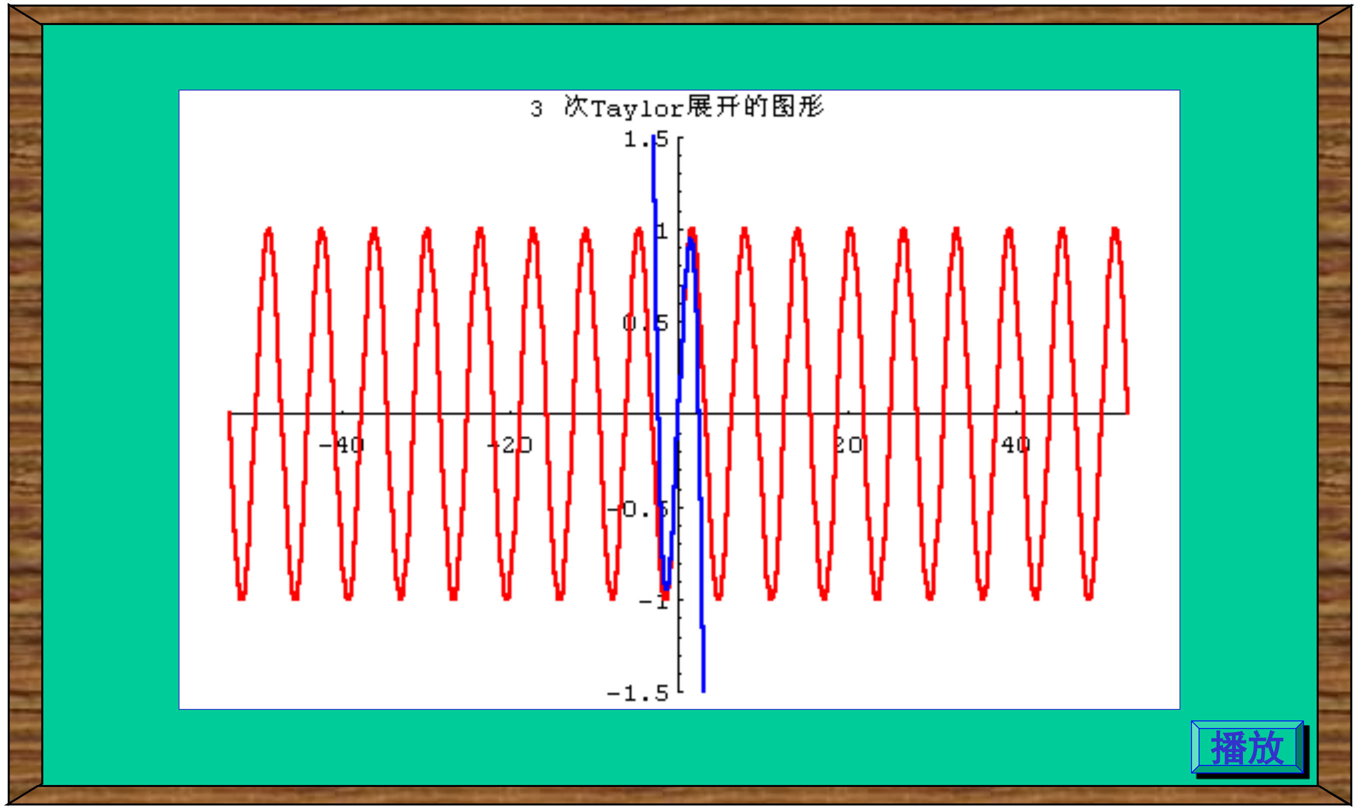
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



思考题

利用麦克劳林公式求极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x\arcsin^2 x}$$

思考题解答

$$\because e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \qquad \arcsin x \sim x$$

$$\therefore \text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) - x(1+x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

课堂练习题

一、　当 $x_0 = 1$ 时，求函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 的 n 阶泰勒公式.

二、　求函数 $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$ 的 n 阶麦克劳林公式.

三、　利用麦克劳林公式求极限：

1、$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin^4 x}$；　2、$\lim\limits_{x \to \infty} [x - x^2 \ln(1 + \dfrac{1}{x})]$.

四、应用三阶泰勒公式求 $\sqrt[3]{30}$ 的近似值，并估计误差.

课堂练习题答案

一、$\dfrac{1}{x}=1-(x-1)+(x-1)^2-\cdots+(-1)^n(x-1)^n$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{[1+\theta(x-1)]^{n+2}}(x-1)^{n+1},\quad \theta\in(0,1).$$

二、$x^2e^x=x^2+x^3+\cdots+\dfrac{x^n}{(n-2)!}+\dfrac{e^{\theta x}}{(n-1)!}x^{n+1},\theta\in(0,1).$

三、1、$-\dfrac{1}{12}$.　　2、$\dfrac{1}{2}$.

四、$\sqrt[3]{30}\approx 3.10724,\quad |R_3|<1.88\times10^{-5}.$