第三章 微分中值定理与导数应用

第一讲： 微分中值定理与洛必达法则

1.1　微分中值定理

罗尔（Rolle）中值定理

若函数$f(x)$满足下列条件:

（1）在闭区间$[a,b]$上连续,

（2）在开区间(a,b)内可导,

（3）在区间端点的函数值相等，即$f(a)=f(b)$,

则在开区间(a,b)内存在一点 ξ $(a<\xi<b)$, 使

$$f'(\xi)=0.$$

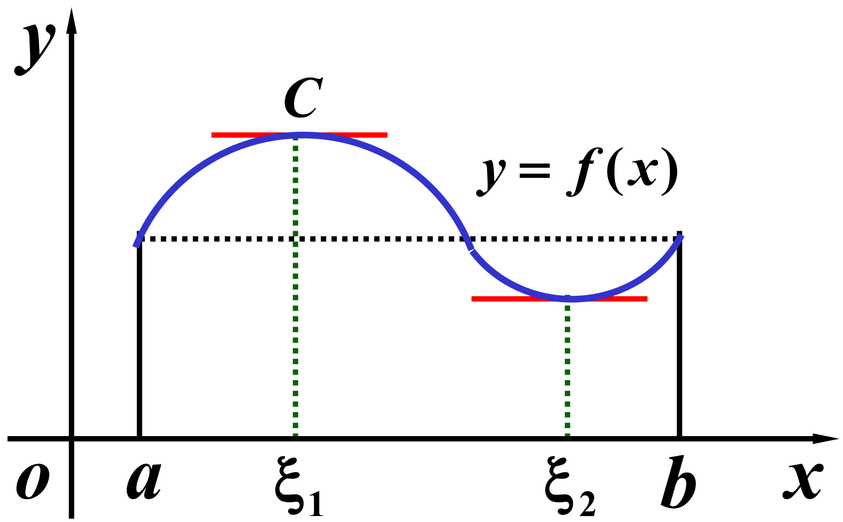
如: $f(x)=x^2-2x-3 \;=(x-3)(x+1).$

在$[-1,3]$上连续，在$(-1,3)$上可导，且 $f(-1)=f(3)=0$,

$\because f'(x)=2(x-1), \therefore \xi=1, \; (-1<\xi<3), \; f'(\xi)=0.$

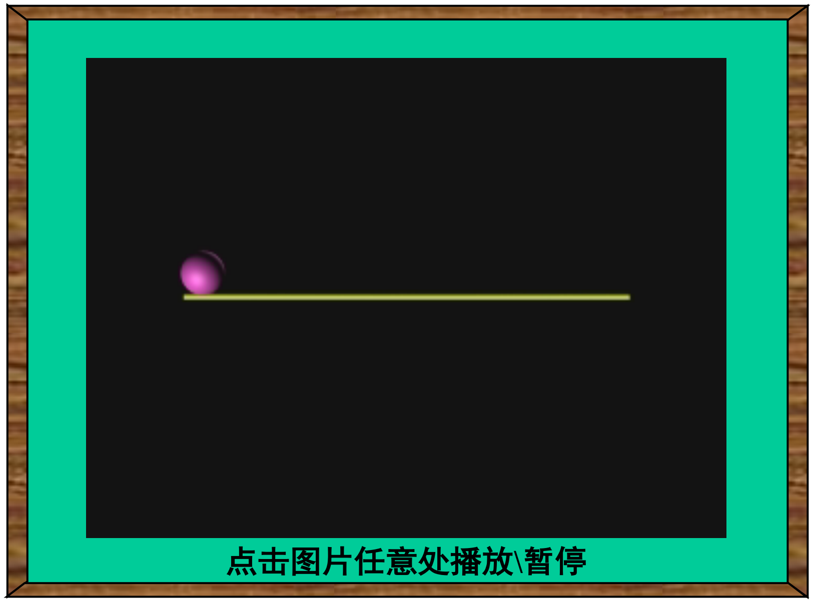
几何解释:

在曲线弧AB上至少有一点C,在该点处的切线是水平的.



物理解释:

变速直线运动在折返点处的瞬时速度等于零.



证 $\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 必有最大值 M 和最小值 m.

(1) 若 $M = m$. 故 $f(x) \equiv M$.

由此得 $f'(x) \equiv 0$. $\forall \xi \in (a,b)$, 都有 $f'(\xi) = 0$.

(2) 若 $M \neq m$. $\because f(a) = f(b)$,

$\therefore$ **最值不可能同时在两端点取得**.

因此，不妨设： $M \neq f(a)$,

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi) = M$.

$\because f(\xi + \Delta x) \leq f(\xi)$, $\therefore f(\xi + \Delta x) - f(\xi) \leq 0$,

若 $\Delta x < 0$,　　则有 $\dfrac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \geq 0$;

$$\therefore f'_-(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \geq 0;$$

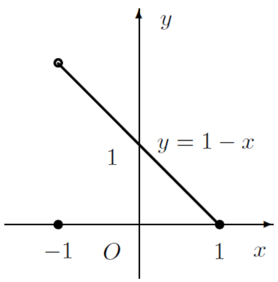
若 $\Delta x > 0$,　　则有 $\dfrac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \leq 0$;

$$\therefore f'_+(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} \leq 0;$$

$\because f'(\xi)$存在, $\therefore f'_-(\xi) = f'_+(\xi)$.　$\therefore$ 只有 $f'(\xi) = 0$.

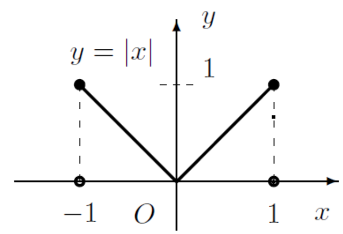
注意: 若罗尔定理的三个条件中有一个不满足,其结论可能不成立.

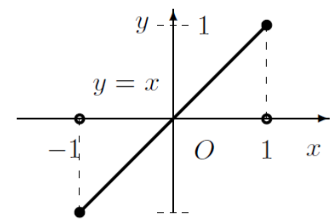
如: $y = 1 - x, \quad x \in (-1,1], \quad f(-1) = 0;$



$y = |x|, \quad x \in [-1,1];$

$y = x, \quad x \in [-1,1].$





因以上三个函数分别在区间 $[-1,1]$上不满足罗尔定理的条件（1），（2）和（3），故在开区间$(-1,1)$ 内没有点使得 $f'(x) = 0.$

例1 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于1的正实根.

证 设 $f(x)=x^5-5x+1$,

则 $f(x)$在$[0,1]$连续, 且 $f(0)=1, f(1)=-3.$

根据零点定理:

$\exists\, x_0\in(0,1)$,使 $f(x_0)=0.$

即表明该方程小于1的正实根存在.

再证明唯一性:

若另有 $x_1 \in (0,1)$, $x_1 \neq x_0$, 使 $f(x_1) = 0$.

$\because f(x)$ 在在以 x_0和x_1 为端点的闭区间上满足罗尔定理的条件, $\therefore$ 在 x_0与x_1 之间至少存在一点 ξ,使得

$$f'(\xi) = 0.$$

但 $f'(x) = 5(x^4 - 1) < 0$, $(0 < x < 1)$, 矛盾,

$\therefore$ 实根唯一.

拉格朗日（Lagrange）中值定理

若函数 $f(x)$ 满足下列条件:

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

（2）在开区间 (a,b) 内可导,

则在开区间 (a,b) 内存在一点 $\xi\ (a<\xi<b)$，使

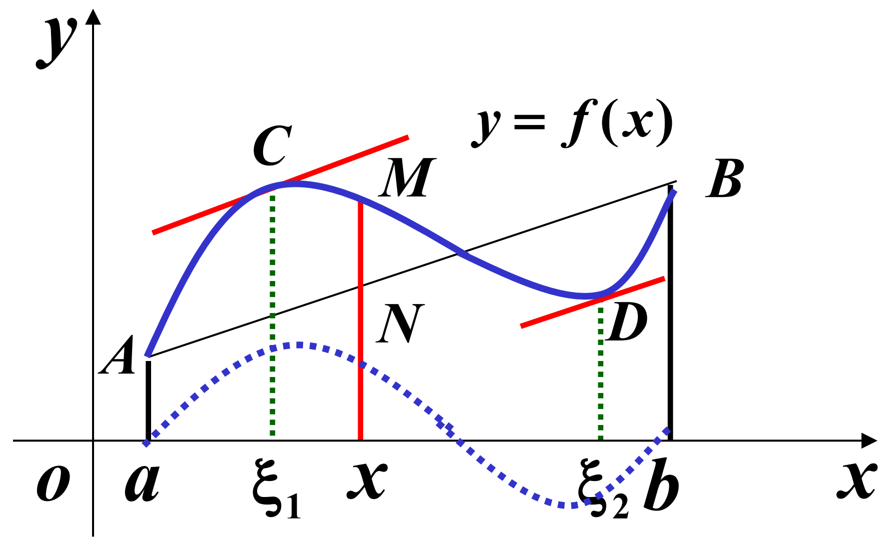
$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

注意: 比罗尔定理去掉了条件 $f(a)=f(b)$.

结论亦可写成 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$.

几何解释:

在曲线弧 AB 上至少有一点 C,在该点处的切线平行于弦 AB.



证 **分析:** 条件中与罗尔定理相差 $f(a)=f(b)$.

弦AB方程为: $$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

曲线 $f(x)$ 减去弦 AB, 所得曲线 a,b 两端点的函数值相等.

作辅助函数

$$F(x)=f(x)-[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)].$$

由于函数$F(x)$满足罗尔定理的条件,

那么在(a,b)内至少存在一点ξ,使得 $F'(\xi)=0.$

即 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$ 或

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

拉格朗日中值公式

注意：拉氏公式精确地表达了函数在某区间上的增量与其在该区间内某点处的导数之间的关系.

设 $f(x)$在 在(a,b)内可导, $x_0, x_0+\Delta x \in (a,b)$, 则有

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

也可写成 $\Delta y = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$

增量Δy的精确表达式.

拉格朗日中值公式又称有限增量公式.

微分中值定理

拉格朗日中值定理又称有限增量定理.

推论 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零, 那末 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

例 2 证明 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}\ (-1 \le x \le 1).$

证 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x,\quad x \in [-1,1]$

易知 $f(1) = f(-1) = \dfrac{\pi}{2};$ 当 $x \in (-1,1)$ 时，

$$\because f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \equiv 0,$$

$$\therefore f(x) \equiv C,\quad x \in (-1,1)$$

又 $\because f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2},$ 即 $C = \dfrac{\pi}{2}.$

$$\therefore \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \le x \le 1).$$

例 3 证明当$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证 设 $f(t)=\ln(1+t)$, $f(t)$在$[0,x]$上满足拉氏中值定理的条件， 所以，存在$\xi\in(0,x)$,使得

$$\therefore f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0).$$

$\because f(0)=0,\ f'(t)=\dfrac{1}{1+t}$, $\quad\therefore\ \ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$,

又$\because 0<\xi<x \Longrightarrow 1<1+\xi<1+x \Longrightarrow \dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$,

$\therefore \dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$, $\quad$ 即$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

柯西（Cauchy）中值定理

若函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

（2）在开区间 (a,b) 内可导,

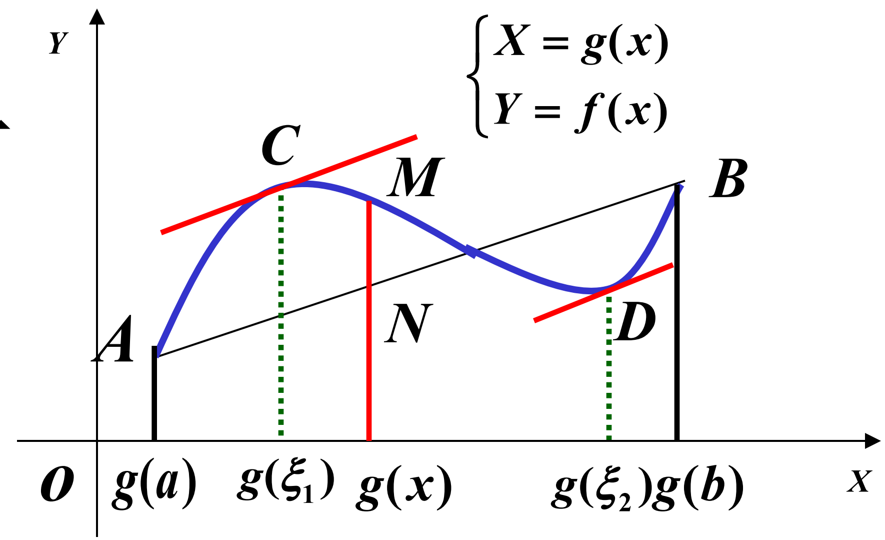
且 $g'(x) \neq 0$,

则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 $\xi \ (a < \xi < b)$, 使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

几何解释:

在曲线弧AB上至少有一点 $C(g(\xi), f(\xi))$, 使曲线在该点处的切线平行于弦AB.



证 作辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)].$$

$\varphi(x)$ 满足罗尔定理的条件, 则在(a,b)内至少存在

一点ξ,使得 $\varphi'(\xi)=0.$

即 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(\xi)=0,$

$$\therefore \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

特别地，当 $g(x)=x$ 时，

$$g(b)-g(a)=b-a, \quad g'(x)=1,$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Longrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

有限增量公式

例4 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,$(0,1)$内可导,证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证 **分析:** 结论可变为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}.$$

设 $g(x)=x^2$, 则 $f(x),g(x)$ 在$[0,1]$上满足柯西中值定理的条件,所以在$(0,1)$内至少存在一点ξ,有

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi} \quad \text{即} \quad f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)].$$

1.2　小结与思考题

罗尔、拉格朗日及柯西中值定理之间的关系；

$$\text{Rolle定理} \xleftarrow{f(a)=f(b)} \text{Lagrange中值定理} \xleftarrow{g(x)=x} \text{Cauchy中值定理}$$

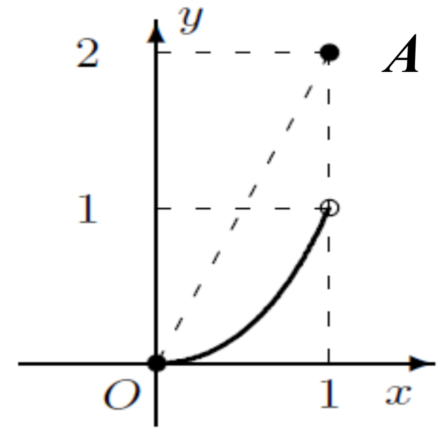
注意定理成立的条件；

注意利用中值定理证明等式与不等式的步骤.

思考题

试举例说明拉格朗日中值定理的条件缺一不可.

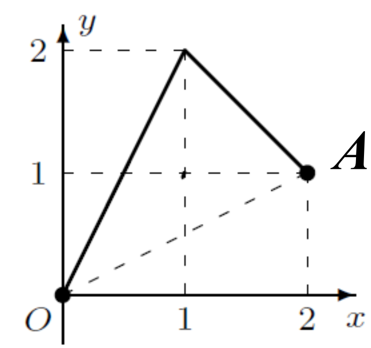
思考题解答



$y = f_1(x)$

$$f_1(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 2, & x=1 \end{cases}$$

不满足在闭区间上连续的条件；



$y = f_2(x)$

$$f_2(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x<1 \\ 3-x, & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

不满足在开区间内可微的条件。

所以，结论不成立。以上两例都可说明问题.

课堂练习题

一、 填空题：

1、函数 $f(x)=x^4$ 在区间 $[1,2]$ 上满足拉格朗日中值定理，则 $\xi=$________.

2、微分中值定理精确地表达函数在一个区间上的________与函数在这区间内某点处的________之间的关系.

3、如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数__________，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

二、证明：对于函数 $y = px^2 + qx + r$，应用拉氏中值定理所求的 ξ 总是位于区间的中点．

三、证明：（1）无论 a 取何值，方程 $x^3 - 3x + a = 0$ 在区间 $[-1,1]$ 上至多有一个实根.（2）何时有唯一实根？

*四、设函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导 $(ab>0)$，证明：在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得

$$a\varphi(b) - b\varphi(a) = [\varphi(\xi) - \xi\varphi'(\xi)](a-b).$$

课堂练习题答案

一、1、$\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$；　2、增量，导数；　3、恒为零.

二、提示：用拉氏定理求ξ.　三、(1)反证法；(2)$|a|<2$.

四、提示：在闭区间$[a,b]$上用三大中值定理：

1、罗尔：$f(x)=\frac{1}{x}[\varphi(x)-\frac{a\varphi(b)-b\varphi(a)}{a-b}]$；

2、拉氏：$f(x)=x\varphi(\frac{ab}{x})$；3、柯西：$f(x)=\frac{\varphi(x)}{x},\ g(x)=\frac{1}{x}$.

1.3 洛必达法则

若当 $x \to a$ $(x \to \infty)$ 时，两个函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都趋于零或者无穷大，则极限 $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \to \infty}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 称为 $\dfrac{0}{0}$ 型或者 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

如：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$，$\left(\dfrac{0}{0}\right)$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$.$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

定理 （L'Hospital法则）

设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 满足下列条件：

（1）当 $x\to a\ (x\to\infty)$ 时，$f(x)\to 0$ 及 $g(x)\to 0$；

（2）在 a 的某邻域内（a 点可除外，或 $|x|>N$ 时），

$f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在，且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to\infty}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或无穷大）．

则 $$\lim_{\substack{x\to a\\ x\to\infty}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\ x\to\infty}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\ \text{（或无穷大）}.$$

在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为**洛必达法则**.

证　以 $x \to a$ 的情形为例证明。作辅助函数

$$F(t)=\begin{cases} f(t), & t \neq a, \\ 0, & t=a; \end{cases} \qquad G(t)=\begin{cases} g(t), & t \neq a, \\ 0, & t=a. \end{cases}$$

在 $\overset{o}{U}(a,\delta)$ 内任取一点 x,在以 a 与 x 为端点的区间上,

$F(t), G(t)$ 满足柯西定理的条件，因此，有

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ξ 总是介于 x 和 a 两点之间。

当$x\to a$时,$\xi\to a$, $\because \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\ (\infty).$

$$\therefore \lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=A\ (\infty).$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=A\ (\infty).$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\tan x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x}{1}=1.$

例6 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}.$

例7 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$. $\quad(\dfrac{0}{0})$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1.$

例8 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$. $\quad(\dfrac{\infty}{\infty})$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\cos ax\cdot\sin bx}{\sin ax\cdot b\cos bx}=1.$

例9 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos 3x}{\sin 3x\cos x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}=3$$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}\qquad\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-6\cos 3x\sin 3x}{-2\cos x\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=3.$$

注意：洛必达法则是求未定式极限的一种有效方法，并非最好方法！

例10 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\tan x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\frac{1}{3}.$$

又原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}.$

$\boxed{0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0\text{型未定式极限}}$

关键: 将其它类型未定式化为洛必达法则可解决的类型 $(\frac{0}{0}), (\frac{\infty}{\infty})$.

1. $0\cdot\infty$ 型

步骤: $0\cdot\infty \Rightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty$, 或 $0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\frac{1}{0}$.

例11 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}e^x$. $(0\cdot\infty)$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty.$

2. $\infty-\infty$ 型

步骤: $\infty-\infty \Rightarrow \frac{1}{0}-\frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0-0}{0\cdot 0}$.

例12　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.　　$(\infty-\infty)$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}=0.$$

3. $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

步骤： $\left.\begin{matrix} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \left\{\begin{matrix} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \\ 0\cdot\ln\infty \end{matrix}\right. \Rightarrow 0\cdot\infty.$

例13 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x.$ (0^0)

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1.$$

例14 求 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. (1^{∞})

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}$.

例15 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$. (∞^0)

解 取对数得 $(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)}$,

$$\because \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{\cot x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\cos x\cdot\sin x} = -1, \quad \therefore \text{原式} = e^{-1}.$$

注意：洛必达法则的使用条件.

例16 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\sin x)$.

极限不存在

洛必达法则失效。

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x}\cos x)=1.$

此外，还有两种未定式：0^{∞} 和 ∞^{∞}，不过它们仅有两种可能的结果，即

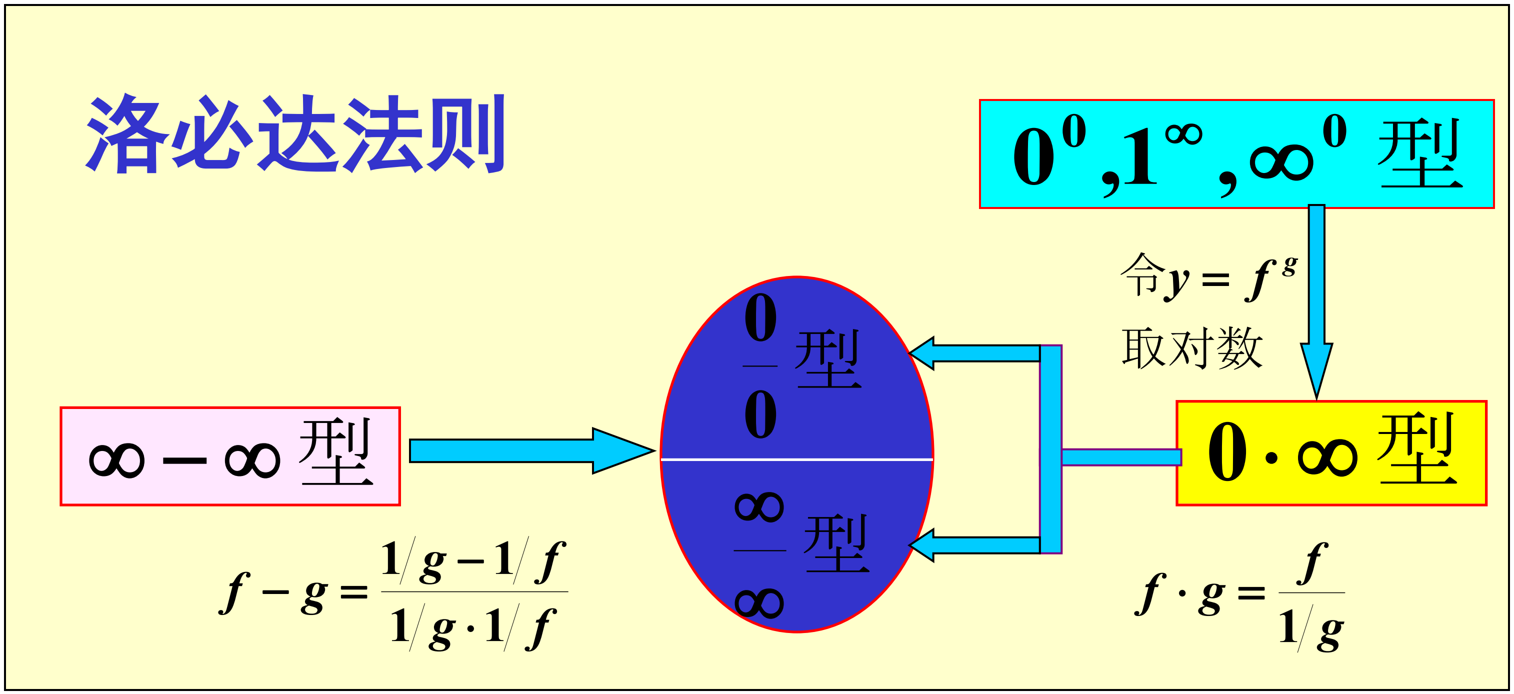
$$0^{\infty}=(0+0)^{\pm\infty}=\mathrm{e}^{\mp\infty}=\begin{cases}0\\+\infty\end{cases};$$

$$\infty^{\infty}=(+\infty)^{\pm\infty}=\mathrm{e}^{\pm\infty}=\begin{cases}+\infty\\0\end{cases}.$$

如，$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\tan\frac{\pi}{2}(1-x)}=0\ (0^{+\infty})$，

$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\tan\frac{\pi}{2}(1+x)}=+\infty\ (0^{-\infty})$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{x}=+\infty\ (+\infty^{+\infty})$.

1.4 小结与思考题



洛必达法则
$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型
令 $y = f^g$
取对数
$\frac{0}{0}$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$\infty - \infty$ 型
$0 \cdot \infty$ 型
$f - g = \frac{1/g - 1/f}{1/g \cdot 1/f}$
$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$

思考题

设$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$是未定型极限，如果$\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$的极限不存在，是否$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的极限也一定不存在？举例说明.

思考题解答

不一定.

例 $f(x)=x+\sin x,\qquad g(x)=x$

显然 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$ 极限不存在.

但 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$ 极限存在.

课堂练习题

一、 填空题：

1、洛必达法则除了可用于求“$\frac{0}{0}$”及“$\frac{\infty}{\infty}$”两种类型的未定式的极限外，也可通过变换解决______，______，______和______等型的未定式的求极限的问题；

2、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\ln(1+x)}{x^2}=$______； 3、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\tan mx}{\ln\tan nx}=$______.

二、 用洛必达法则求下列极限：

1、$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-0.001x}$；　　2、$\lim\limits_{x\to1-0}(1-x)^{\cos\frac{\pi}{2}x}$；

3、$\lim\limits_{x\to+0} x^{-\tan x}$；　　4、$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x$；

5、$\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+2}+x)$.

三、 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\le 0\end{cases}$，在点$x=0$处

的连续性.

课堂练习题答案

一、1、$0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0};

2、1;　　　　3、1.

二、1、0;　　2、1;　　3、1;　　4、$e^{-\frac{2}{\pi}}$;

5、−1.

三、连续.