第二章 导数与微分

复习

一、主要内容

关系 $\dfrac{dy}{dx} = y' \Leftrightarrow dy = y'dx \Leftrightarrow \Delta y = dy + o(\Delta x)$

导 数

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

基本公式

高阶导数

高阶微分

微 分

$dy = y'\Delta x$

求 导 法 则

1、导数的定义

定义设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义，当自变量x在x_0处取得增量Δx(点$x_0+\Delta x$仍在该邻域内)时，相应地函数y取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果$\Delta y$与$\Delta x$之比当$\Delta x\to 0$时的极限存在，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处可导，并称这个极限为函数$y=f(x)$在点$x_0$处的导数，记为$y'\big|_{x=x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$或$\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$，即

$$y'\big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

单侧导数

1.左导数:

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

2.右导数:

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

函数$f(x)$在点x_0处可导$\Leftrightarrow$左导数$f'_-(x_0)$和右导数$f'_+(x_0)$都存在且相等.

2、基本导数公式（常数和基本初等函数的导数公式）

$$(C)' = 0$$

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \tan x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

3、求导法则

(1) 函数的和、差、积、商的求导法则

设$u=u(x), v=v(x)$可导，则

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$，（2）$(Cu)'=Cu'$ (C 是常数),

（3）$(uv)'=u'v+uv'$，（4）$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)$.

(2) 反函数的求导法则

如果函数$x=\varphi(y)$的反函数为$y=f(x)$,则有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

(3) 复合函数的求导法则

设$y=f(u)$,而$u=\varphi(x)$则复合函数$y=f[\varphi(x)]$的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{或} \quad y'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

(4) 对数求导法

先在方程两边取对数,然后利用隐函数的求导方法求出导数.

适用范围:

多个函数相乘和幂指函 数$u(x)^{v(x)}$的情形.

(5) 隐函数求导法则

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

(6) 参变量函数的求导法则

若参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$确定$y$与$x$间的函数关系,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)};\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''(t)\phi'(t)-\psi'(t)\phi''(t)}{\phi'^3(t)}.$$

4、高阶导数

二阶导数 $(f'(x))' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$,

记作 $f''(x), y'', \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y''', \dfrac{d^3 y}{dx^3}$.

一般地,函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为函数 $f(x)$ 的 n 阶导数,记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n} \text{ 或 } \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

5、微分的定义

定义 设函数$y = f(x)$在某区间内有定义，x_0及$x_0 + \Delta x$在这区间内，如果

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

成立(其中A是与Δx无关的常数)，则称函数$y = f(x)$在点x_0可微，并且称$A \cdot \Delta x$为函数$y = f(x)$在点x_0相应于自变量增量Δx的微分，记作$dy\big|_{x=x_0}$或$df(x_0)$，即

$$dy\big|_{x=x_0} = A \cdot \Delta x.$$

微分dy叫做函数增量Δy的线性主部. （微分的实质）

6、导数与微分的关系

定理 函数$f(x)$在点x_0可微的充要条件是函数$f(x)$在点x_0处可导,且 $A = f'(x_0)$.

7、 微分的求法

$$\boxed{\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x}$$

求法: 计算函数的导数,乘以自变量的微分.

基本初等函数的微分公式

$$\mathrm{d}(C)=0 \qquad \mathrm{d}(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\ln x)=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\mathrm{d}(\arcsin x)=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{d}(\arccos x)=-\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathrm{d}(\arctan x)=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \qquad \mathrm{d}(\mathrm{arc}\cot x)=-\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

8、 微分的基本法则

函数和、差、积、商的微分法则

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v \qquad \mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v \qquad \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$$

微分形式的不变性

无论x是自变量还是中间变量,函数$y = f(x)$的微分形式总是 $\boxed{\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x}$

二、典型例题

例1 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$,

求 $f'(0)$.

解 $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

$$=(-1)^n n!$$

例2 设 $y=\frac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$,

求 y'.

解 设 $u=\sqrt{1+x^2}$, 则 $y=\frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1}$,

$$\because\ y'_u=\frac{1}{2(1+u^2)}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)=\frac{1}{1-u^4}=\frac{-1}{2x^2+x^4},$$

$$u'_x=(\sqrt{1+x^2})'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\therefore\ y'_x=y'_u u'_x=-\frac{1}{(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}}.$$

例3 设 $\begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = 5t^2 + t|t| \end{cases}$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

解 分析: 当 $t = 0$时, $|t|$的导数不存在,

$\therefore$ 当 $t = 0$时, $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}$不存在, 不能用公式求导.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5(\Delta t)^2 + \Delta t|\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t[5 + \mathrm{sgn}(\Delta t)]}{2 + \mathrm{sgn}(\Delta t)}$$

$$= 0.$$

故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = 0.$

例4 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\sqrt[x]{y} = \sqrt[y]{x}\ (x > 0, y > 0)$

所确定,求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 两边取对数 $\dfrac{1}{x}\ln y = \dfrac{1}{y}\ln x$, 即 $y\ln y = x\ln x$,

$$\therefore (1+\ln y)y' = \ln x + 1, \qquad y' = \frac{\ln x + 1}{1+\ln y},$$

$$y'' = \frac{\dfrac{1}{x}(\ln y + 1) - (\ln x + 1)\dfrac{1}{y}\cdot y'}{(1+\ln y)^2}$$

$$= \frac{y(\ln y + 1)^2 - x(\ln x + 1)^2}{xy(\ln y + 1)^3}$$

例5 设$f(x)=x|x(x-2)|$，求 $f'(x)$.

解 先去掉绝对值

$$f(x)=\begin{cases} x^2(x-2), & x\le 0; \\ -x^2(x-2), & 0<x<2; \\ x^2(x-2), & x\ge 2. \end{cases}$$

当$x=0$时, $f'_-(0)=f'_+(0)=0$, $f'(0)=0$;

当$x>2$或$x<0$时, $f'(x)=3x^2-4x$;

当$0<x<2$时, $f'(x)=-3x^2+4x$;

当$x=2$时，

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\quad=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2(x-2)}{x-2}=-4.$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2(x-2)}{x-2}=4.$$

$f'_-(2)\neq f'_+(2)$, $\quad\therefore f(x)$在$x=2$处不可导.

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-4x, & x>2\text{或}x<0;\\ -3x^2+4x, & 0\le x<2.\end{cases}$$

例6 设$y = x(\sin x)^{\cos x}$，求 y'.

解 $y' = y(\ln y)'$

$$= y(\ln x + \cos x \ln \sin x)'$$

$$= x(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{1}{x} - \sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right).$$

例7 设$y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$，求 $y^{(n)}$.

解 $$y=\frac{4x^2-1}{x^2-1}=\frac{4x^2-4+3}{x^2-1}=4+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\because \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}},\quad \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$$

$$\therefore y^{(n)}=\frac{3}{2}(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

测　验　题

一、　选择题（20 分）：

1、函数$f(x)$在点x_0的导数$f'(x_0)$定义为（　　）

（A）$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；（B）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

（C）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}$；　（D）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

2、若函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)=0$，则曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的法线（　　）

（A）与x轴相平行；　（B）与x轴垂直；

（C）与y轴相垂直；　（D）与x轴即不平行也不垂直.

3、若函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则 $f(x)$ 在 x_0（　　）

（A）必不可导；　　（B）必定可导；

（C）不一定可导；　　（D）必无定义.

4、如果 $f(x)$=（　　），那么 $f'(x)=0$.

(A) $\arcsin 2x+\arccos x$；(B) $\sec^2 x+\tan^2 x$；

(C) $\sin^2 x+\cos^2(1-x)$；　(D) $\arctan x+\operatorname{arccot} x$.

5、如果 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, x\le 0 \\ b(1-x^2), x>0 \end{cases}$ 处处可导，那末（　）

（A）$a=b=1$；　　（B）$a=-2, b=-1$；

（C）$a=1, b=0$；　　（D）$a=0, b=1$.

6、已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=\left[f(x)\right]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是（　　）

（A）$n![f(x)]^{n+1}$；　　（B）$n[f(x)]^{n+1}$；

（C）$[f(x)]^{2n}$；　　（D）$n![f(x)]^{2n}$.

7、若函数 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 对 t 可导且 $x'(t)\neq 0$, 又 $x=x(t)$ 的反函数存在且可导，则 $y'=$（　　）

（A）$\dfrac{y'(t)}{x(t)}$；（B）$-\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$；　（C）$\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$；（D）$\dfrac{y(t)}{x'(t)}$.

8、若函数 $f(x)$ 为可微函数，则 $\mathrm{d}y$（　　）

（A）与 Δx 无关；　　（B）为 Δx 的线性函数；

（C）为 Δx 的高阶无穷小；（D）与 Δx 等价无穷小.

9、设函数$y=f(x)$在点x_0处可导，当自变量x由x_0增加到$x_0+\Delta x$时，记Δy为$f(x)$的增量，$\mathrm{d}y$为$f(x)$的微分，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}$等于（　　）

（A）-1；　（B）0；　（C）1；　（D）∞.

10、设函数$y=f(x)$在点x_0处可导，且$f'(x_0)\neq 0$，

则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\Delta x}$等于（　）.

（A）0；　（B）-1；　（C）1；　（D）∞ .

二、求下列函数的导数（30 分）：

1、$y=\sin x\ln x^2$；　　2、$y=a^{\cosh x}$　（$a>0$）；

3、$y=(1+x^2)^{\sec x}$；　　4、$y=\ln[\cos(10+3x^2)]$；

5、设y为x的函数是由方程$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$确定的；

6、设$x=y^2+y$，$u=(x^2+x)^{\frac{3}{2}}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$.

三、（10 分）证明$x=\mathrm{e}^t\sin t$，$y=\mathrm{e}^t\cos t$满足方程

$$(x+y)^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\right).$$

四、（10 分）已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 有 k 阶连续的导函数且 $g(0)=1$，试确定 a 和 k 的值使 $f(x)$ 处处可导并求 $f'(x)$.

五、（10 分）设 $y=x\ln x$,求 $f^{(n)}(1)$.

六、（10 分）计算 $\sqrt[3]{9.02}$ 的近似值 .

七、（10 分）一人走过一桥之速率为 4 公里/小时，同时一船在此人底下以 8 公里/小时之速率划过，此桥比船高 200 米，问 3 分钟后人与船相离之速率为多少？

测验题答案

一、1、D;　2、B;　3、A;　4、D;　5、D;
6、A;　7、C;　8、B;　9、B;　10、A;

二、1、$\cos x \ln x^2 + \dfrac{2\sin x}{x}$;

2、$\ln a \sinh x a^{\cosh x}$;

3、$(1+x^2)^{\sec x}[\tan x \ln(1+x^2) + \dfrac{2x}{1+x^2}]\sec x$;

4、$-6x\tan(10+3x^2)$;

5、$\dfrac{x+y}{x-y}$;　6、$\dfrac{2}{3(2y+1)(2x+1)\sqrt{x^2+x}}$.

四、$a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$；

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}(g''(0)+1), & x=0\end{cases}，\quad k\geq 2,$$

其中 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x-xg'(0)}{x^2}$,

即 $\dfrac{g(x)-\cos x-xg'(0)}{x^2}=f'(0)+\alpha,(\alpha\to 0)$，

或者 $g(x)-\cos x-xg'(0)=f'(0)x^2+\alpha x^2,(\alpha\to 0)$

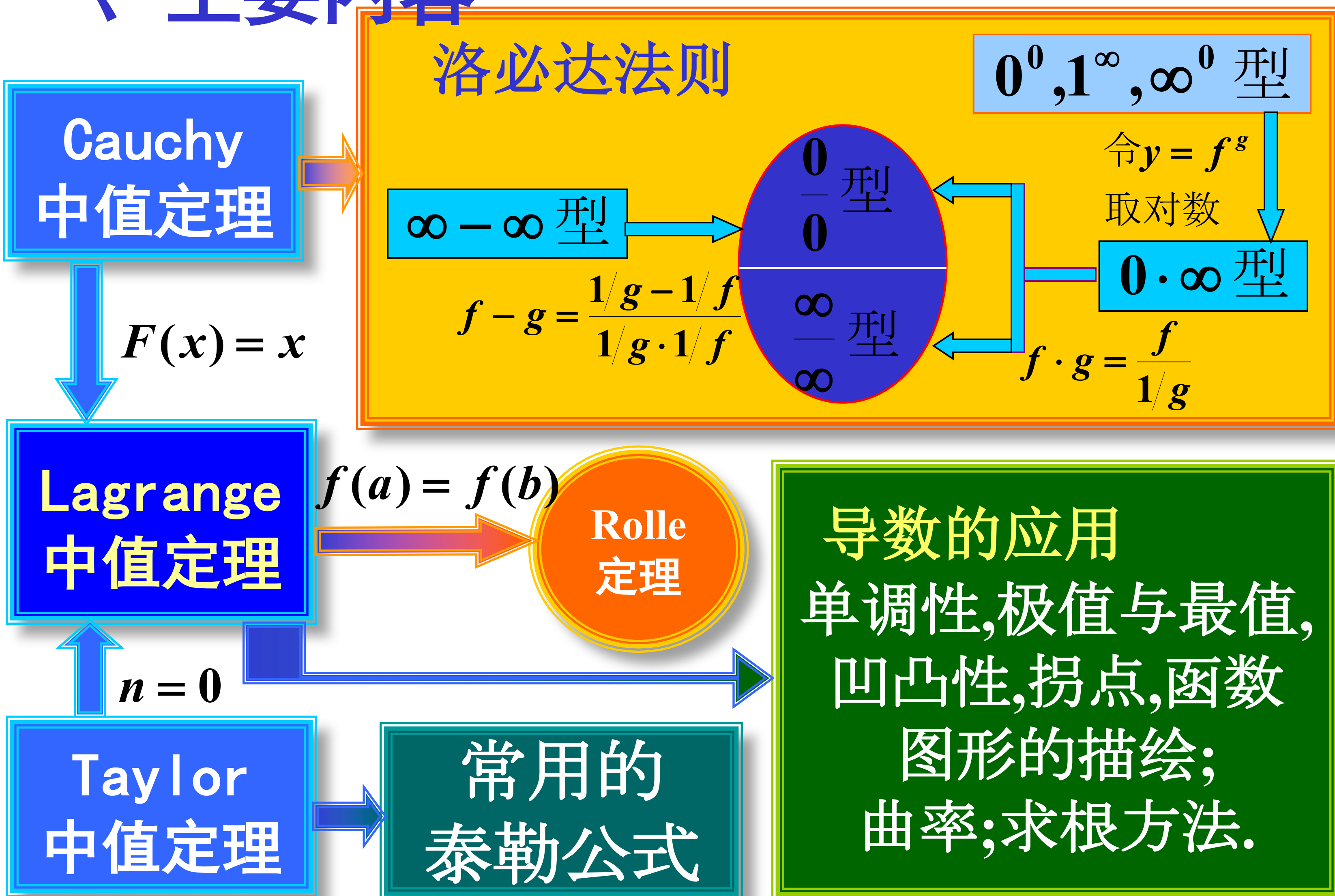
所以 $g''(x)+\cos x=2f'(0)+\beta,(\beta\to 0),g''(0)+1=2f'(0).$

五、$f^{(0)}(1)=0,f^{(1)}(1)=1,f^{(n)}(1)=(-1)^n(n-2)!(n\geq 2)$.

六、2.09.

七、$\dfrac{20}{\sqrt{6}}\approx 8.16$（公里/小时）.

一、主要内容



洛必达法则
$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型
令$y = f^g$
取对数
$0 \cdot \infty$ 型
$\infty - \infty$ 型
$\frac{0}{0}$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$f - g = \frac{1/g - 1/f}{1/g \cdot 1/f}$
$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$
Cauchy 中值定理
$F(x) = x$
Lagrange 中值定理
$f(a) = f(b)$
Rolle 定理
$n = 0$
Taylor 中值定理
常用的泰勒公式
导数的应用
单调性,极值与最值,
凹凸性,拐点,函数
图形的描绘;
曲率;求根方法.

1、罗尔中值定理

罗尔（Rolle）中值定理　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且在区间端点的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，则在开区间 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得函数 $f(x)$ 在该点的导数等于零，

$$\text{即 } f'(\xi)=0.$$

2、拉格朗日中值定理

拉格朗日（Lagrange）中值定理　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 那末在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$ 成立.

有限增量公式.

$$\Delta y = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

增量 Δy 的精确表达式.

推论 如果函数$f(x)$在区间I上的导数恒为零，那末$f(x)$在区间I上是一个常数.

3、柯西中值定理

柯西（Cauchy）中值定理　如果函数$f(x)$及$F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且$F'(x)$在(a,b)内每一点处均不为零，那末在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使等式

$$\frac{f(a)-f(b)}{F(a)-F(b)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$成立.

4、洛必达法则

1^0. $\frac{0}{0}$型及$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

定义 这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达法则.

2^0. $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$型未定式

关键: 将其它类型未定式化为洛必达法则可解决 $(\frac{0}{0}), (\frac{\infty}{\infty})$ 的类型 .

注意: 洛必达法则的使用条件.

5、泰勒中值定理

泰勒(Taylor)中值定理　如果函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a,b)内具有直到$(n+1)$阶的导数, 则当x在(a,b)内时, $f(x)$可以表示为$(x-x_0)$的一个n次多项式与一个余项$R_n(x)$之和:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ 在 x_0 与 x 之间)

常用函数的麦克劳林公式：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

6、导数的应用

(1) 函数单调性的判定法

定理 设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导.

1^0如果在(a,b)内$f'(x)>0$，那末函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加；

2^0 如果在(a,b)内$f'(x)<0$，那末函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

(2) 函数的极值及其求法

设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义，x_0是(a,b)内的一个点，

如果存在着点x_0的一个邻域，对于这邻域内的任何点x，除了点x_0外，$f(x) < f(x_0)$均成立，就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值；

如果存在着点x_0的一个邻域，对于这邻域内的任何点x，除了点x_0外，$f(x) > f(x_0)$均成立，就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极小值.

函数的极大值与极小值统称为极值,使函数取得极值的点称为极值点.

极值是函数的局部性概念: 极大值可能小于极小值,极小值可能大于极大值.

定理(必要条件) 设 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数,且在 x_0 处取得极值,那末必定 $f'(x_0)=0$.

定义: 使导数为零的点(即方程 $f'(x)=0$ 的实根)叫做函数 $f(x)$ 的驻点.

驻点和不可导点统称为临界点.

定理(第一充分条件)

(1)如果$x\in(x_0-\delta,x_0)$,有$f'(x)>0$;而$x\in(x_0,x_0+\delta)$,有$f'(x)<0$,则$f(x)$在x_0处取得极大值.

(2)如果$x\in(x_0-\delta,x_0)$,有$f'(x)<0$;而$x\in(x_0,x_0+\delta)$有$f'(x)>0$,则$f(x)$在x_0处取得极小值.

(3)如果当$x\in(x_0-\delta,x_0)$及$x\in(x_0,x_0+\delta)$时,$f'(x)$符号相同,则$f(x)$在x_0处无极值.

定理(第二充分条件) 设$f(x)$在x_0处具有二阶导数,且$f'(x_0)=0$,$f''(x_0)\neq 0$,那末

(1)当$f''(x_0)<0$时,函数$f(x)$在x_0处取得极大值;

(2)当$f''(x_0)>0$时,函数$f(x)$在x_0处取得极小值.

求极值的步骤：

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 求驻点，即方程 $f'(x)=0$ 的根;

(3) 检查 $f'(x)$ 在驻点左右的正负号或 $f''(x)$ 在该点的符号,判断极值点;

(4) 求极值.

(3) 最大值、最小值问题

步骤：

1.求驻点和不可导点;

2.求区间端点及驻点和不可导点的函数值,比较大小,最大者为最大值,最小者为最小值;

注意： 如果区间内只有一个极值,则这个极值就是最值.(最大值或最小值)

实际问题求最值应注意：

1)建立目标函数;

2)求最值;若目标函数只有唯一驻点，则该点的函数值即为所求的最大（或最小）值.

(4) 曲线的凹凸与拐点

定义 设$f(x)$在(a,b)内连续,如果对(a,b)内任意两点x_1,x_2,恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

那末称$f(x)$在(a,b)内的图形是凹的;

如果对(a,b)内任意两点x_1, x_2,恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那末称$f(x)$在(a,b)内的图形是凸的;

如果$f(x)$在$[a,b]$内连续,且在(a,b)内的图形是凹(或凸)的,那末称$f(x)$在$[a,b]$内的图形是凹(或凸)的.

定理1 如果$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内具有二阶导数,若在(a,b)内

(1) $f''(x)>0$,则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的;

(2) $f''(x)<0$,则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的;

连续曲线上凹凸的分界点称为曲线的拐点.

定理 2　如果$f(x)$在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内存在二阶导数,则点$(x_0, f(x_0))$是拐点的必要条件是

$$f''(x_0)=0.$$

方法1:设函数$f(x)$在x_0的邻域内二阶可导,

且$f''(x_0)=0$,

(1) x_0两近旁$f''(x)$变号,点$(x_0, f(x_0))$即为拐点;

(2) x_0两近旁$f''(x)$不变号,点$(x_0, f(x_0))$不是拐点.

方法2:设函数$f(x)$在x_0的邻域内三阶可导,

且$f''(x_0)=0$,而$f'''(x_0)\neq 0$,那末$(x_0, f(x_0))$是

曲线$y=f(x)$的拐点.

(6) 弧微分 曲率 曲率圆

1^0. 弧微分 $ds=\sqrt{1+y'^2}dx.$

2^0. 曲率 $k=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|.$

曲率的计算公式 $k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$

当$|y'|\ll 1$时，$k\approx|y''|.$

3^0.曲率圆

定义设曲线$y = f(x)$在点$M(x, y)$处的曲率为$k(k \neq 0)$.在点M处的曲线的法线上,在凹的一侧取一点D,使$|DM| = \frac{1}{k} = \rho$.以$D$为圆心,$\rho$为半径作圆(如图),称此圆为曲线在点$M$处的曲率圆.

$$\rho = \frac{1}{k}, \quad k = \frac{1}{\rho}.$$

D是曲率中心,　　ρ是曲率半径.

二、典型例题

例1 验证罗尔定理对 $y=\ln\sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 上的正确性.

解 $\because D: 2k\pi < x < 2k\pi + \pi, \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$

且在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 上连续.

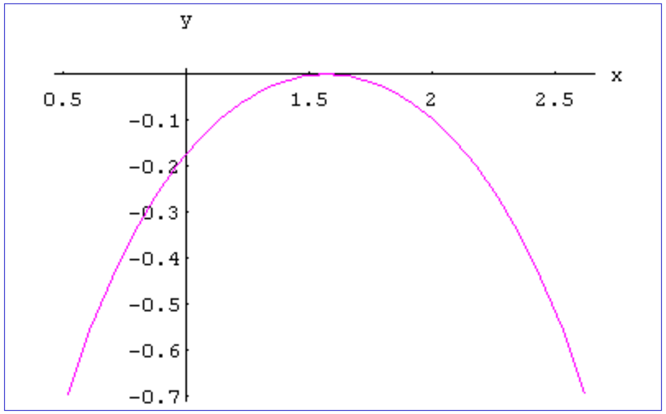
又 $y' = \cot x$ 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ 内处处存在

并且 $f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{5\pi}{6}) = -\ln 2$

$\therefore$ 函数 $y = \ln\sin x$ 在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 上满足罗尔定理的条件.

由 $y' = \cot x = 0,$

在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ 内显然有解 $x = \frac{\pi}{2}.$



取 $\xi = \frac{\pi}{2},$ 则 $f'(\xi) = 0.$

这就验证了命题的正确性.

例2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

解 $\because$ 分子关于 x 的次数为 2.

$$\therefore \sqrt[5]{1+5x}=(1+5x)^{\frac{1}{5}}$$

$$=1+\frac{1}{5}(5x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)\cdot(5x)^2+o(x^2)$$

$$=1+x-2x^2+o(x^2)$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{[1+x-2x^2+o(x^2)]-(1+x)}=-\frac{1}{2}.$$

例3证明不等式

$$x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}, (x>0, y>0, x\neq y).$$

证 令 $f(t) = t\ln t\ (t>0)$,

则 $f'(t) = \ln t + 1,\qquad f''(t) = \frac{1}{t} > 0,$

$\therefore f(t) = t\ln t$ 在 (x, y) 或 (y, x), $x>0, y>0$ 是凹的.

于是 $\frac{1}{2}[f(x)+f(y)] > f(\frac{x+y}{2})$

即 $\frac{1}{2}[x\ln x + y\ln y] > \frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2},$

即 $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$

例4求函数 $y = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$ 的单调区间,极值,凹凸区间,拐点,渐近线,并作函数的图形.

解 (1) 函数$f(x)$的定义域: $x \neq \pm 1$,

即 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$,

$$\because\ f(-x) = -x + \frac{-x}{x^2-1} = -f(x),$$ **奇函数**

$$(2)\ y' = 1 - \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2},$$

令 $y' = 0$, 得 $x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$.

$$y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3},$$

令 $y''=0$，得可能拐点的横坐标 $x=0$.

(3) $\because \lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$，$\therefore$ 没有水平渐近线；

又 $\lim\limits_{x\to 1-0} y = -\infty$，$\lim\limits_{x\to 1+0} y = +\infty$，

$\therefore x=1$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线；

$\lim\limits_{x\to -1-0} y = -\infty$，$\lim\limits_{x\to -1+0} y = +\infty$，

$\therefore x=-1$ 为曲线 y 的铅直渐近线；

$$\because a = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(x + \frac{x}{x^2-1}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - ax) = \lim_{x\to\infty}(y - x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = 0,$$

$\therefore$ 直线 $y = x$ 为曲线 y 的斜渐近线.

(4) 以函数的不连续点 $(x = \pm 1)$,驻点 $(x = -\sqrt{3},$ $x = 0, x = \sqrt{3})$ 和可能拐点的横坐标为分点,

列表如下:

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$-$
y''	$-$		$-$		$+$	0	$-$
y		极大值				拐点	

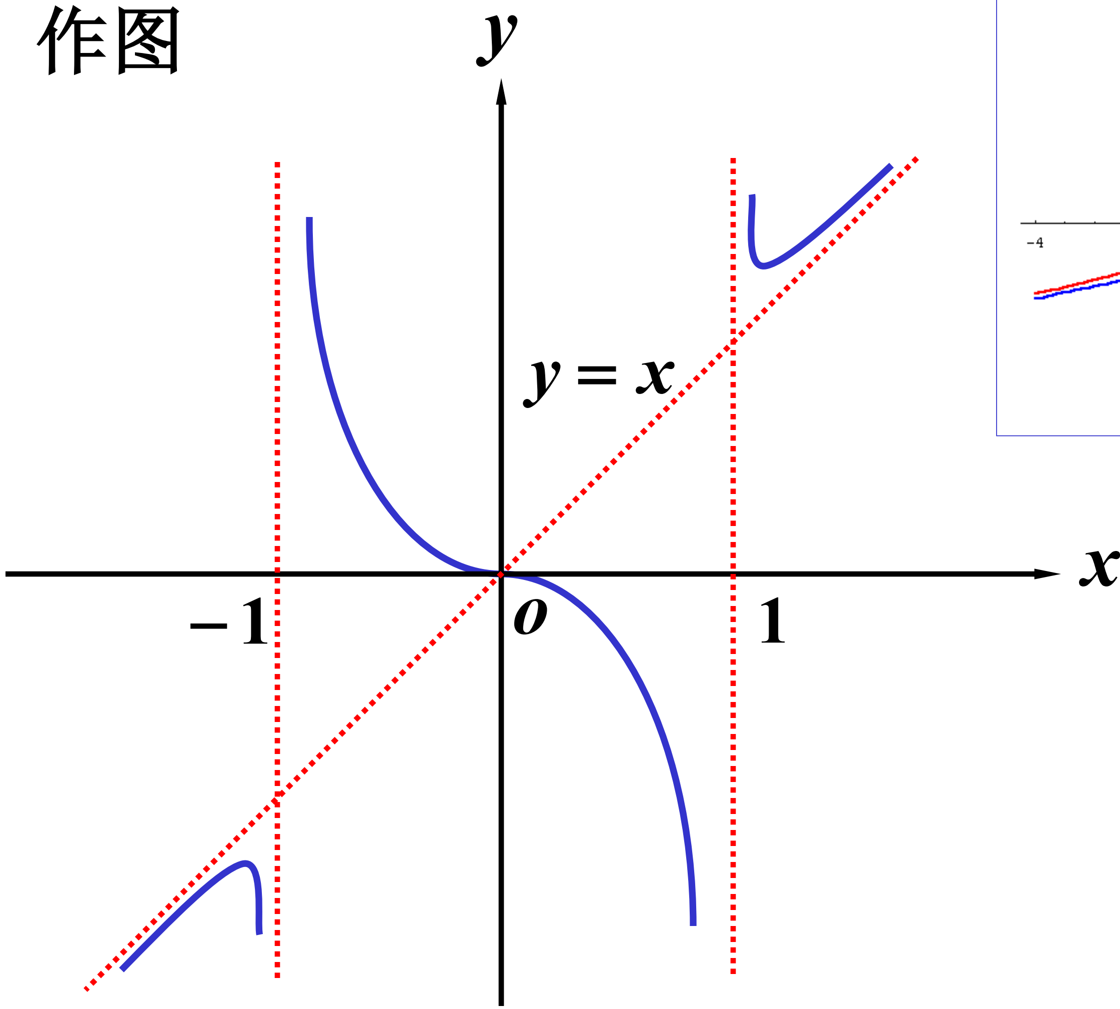
x	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'		$-$	0	$+$
y''		$+$		$+$
y			极小值	

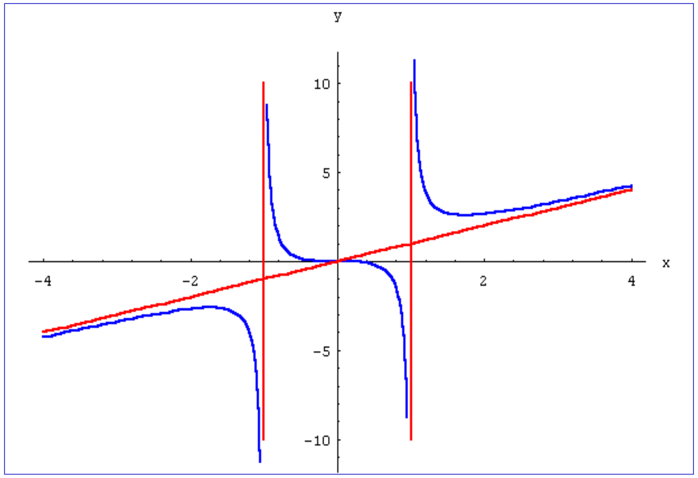
极大值 $y\big|_{x=-\sqrt{3}} = -\frac{3}{2}\sqrt{3},$

极小值 $y\big|_{x=\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\sqrt{3},$

拐点为 $(0,0)$.

作图





例5 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，试证：对任意给定的正数 a,b 在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ,η 使 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b.$

证 $\because a$ 与 b 均为正数， $\therefore f(0)=0<\dfrac{a}{a+b}<1=f(1)$

又 $\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， **由介值定理，**

存在 $\tau\in(0,1)$，使得 $f(\tau)=\dfrac{a}{a+b}$，

$f(x)$ 在 $[0,\tau],[\tau,1]$ 上分别用拉氏中值定理，有

$$f(\tau)-f(0)=(\tau-0)f'(\xi),\quad \xi\in(0,\tau) \qquad ①$$

$$f(1)-f(\tau)=(1-\tau)f'(\eta),\quad \eta\in(\tau,1) \qquad ②$$

注意到 $f(0)=0, f(1)=1,$ 由此可见：

$$\tau=\frac{f(\tau)}{f'(\xi)}=\frac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)},\qquad 1-\tau=\frac{1-f(\tau)}{f'(\eta)}=\frac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)} \qquad ④$$

相加, 得 $$1=\frac{a}{f'(\xi)(a+b)}+\frac{b}{f'(\eta)(a+b)}.$$

$$\therefore \frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

例6若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可微，且 $f(0)=f(1)$，$|f''(x)|\le 1$，证明：$|f'(x)|<\dfrac{1}{2}\quad (x\in(0,1))$

证 设 $x_0\in(0,1)$，在 x_0 处把 $f(x)$ 展成一阶泰勒公式，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

令 $x=0, x=1$，则有

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^{\ 2} \qquad ①$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2 \qquad ②$$

二式相减, 注意到 $f(0)=f(1)$, 则有

$$f'(x_0)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0{}^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2$$

$$\because \left|f''(x)\right|\le 1,$$

$$\therefore \left|f'(x_0)\right|\le \frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{2}(1-x_0)^2=x_0(x_0-1)+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}.$$

由 x_0 的任意性,可知命题成立.

例7 过正弦曲线 $y=\sin x$ 上点 $M(\frac{\pi}{2},1)$ 处,求作一抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 使抛物线与正弦曲线在 M 点具有相同的曲率和凹 向,并写出 M 点处两曲线的公共曲率圆方 程.

解 曲线 $y=f(x)$ 在点 (x,y) 处的曲率,曲率半径和曲率圆的圆心坐标分别 为

$$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}},\quad \rho=\frac{1}{k},\quad \begin{cases} x_0=x-\dfrac{y'[1+(y')^2]}{y''}, \\ y_0=y+\dfrac{1+(y')^2}{y''}. \end{cases}$$

对于曲线 $y = f(x) = \sin x,$

有 $f(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad f'(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad f''(\frac{\pi}{2}) = -1.$

对于曲线 $y = ax^2 + bx + c,$

有 $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}a + \frac{\pi}{2}b + c, \quad f'(\frac{\pi}{2}) = \pi a + b, \quad f''(\frac{\pi}{2}) = 2a.$

若两曲线满足题设条件,必在该点处具有相同的

一阶导数和二阶导数,于是有

$$\frac{\pi^2}{4}a + \frac{\pi}{2}b + c = 1, \quad \pi a + b = 0, \quad 2a = -1.$$

解此方程组得 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{\pi}{2}$, $c=1-\frac{\pi^2}{8}$.

故所求作抛物线的方程为

$$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{\pi}{2}x+1-\frac{\pi^2}{8}.$$

两曲线在点 M 处的曲率圆的圆心为 $(\frac{\pi}{2},0)$,

曲率半径 $\rho=1$,

曲率圆的方程为 $(x-\frac{\pi}{2})^2+y^2=1.$

测 验 题

一、 选择题（20 分）：

1、一元函数微分学的三个中值定理的结论都有一个共同点，即它们（   ）

（A） 都给出了ξ点的求法 .

（B） 都肯定了ξ点存在，且给出了求ξ的方法。

（C） 都肯定了ξ点存在，而且如果满足定理条件，就都可以用定理给出的公式计算ξ的值 .

（D） 都只肯定了ξ的存在，却没有说出ξ的值是什么，也没有给出求ξ的方法 .

2、若 $f(x)$ 在 (a,b) 可导且 $f(a)=f(b)$，则（　　）

(A) 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$；

(B) 一定不存在点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$；

(C) 恰存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$；

(D) 对任意的 $\xi\in(a,b)$，不一定能使 $f'(\xi)=0$.

3．已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内有两个不同的根 α 与 β，则在 (a,b) 内（ ）ξ 使 $f'(\xi)=0$.

(A)必有；（B）没有；（C）可能有；（D）可求出.

4、若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，c 为介于 a,b 之间的任一点，则在 (a,b) 内（　）两点 x_2,x_1，使得 $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c)$ 成立.

（A）必有；（B）没有；（C）可能有；（D）可求出.

5、若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $x\in(a,b)$时，$f'(x)>0$，又$f(a)<0$，则（　）.

（A） $f(x)$在$[a,b]$上单调增加，且$f(b)>0$；

（B） $f(x)$在$[a,b]$上单调增加，且$f(b)<0$；

（C） $f(x)$在$[a,b]$上单调减少，且$f(b)<0$；

（D） $f(x)$在$[a,b]$上单调增加，但$f(b)$的正负号无法确定.

6、$f'(x_0)=0$是可导函数$f(x)$在x_0点处有极值的（ ）.

（A）充分条件；（B）必要条件；（C）充要条件；

（D）既非必要又非充分条件.

7、若连续函数在闭区间上有唯一的极大值和极小值，则（　 ）.

（A）极大值一定是最大值且极小值一定是最小值;

（B）极大值一定是最大值或极小值一定是最小值;

（C）极大值不一定是最大值，极小值也不一定是最小值;

（D）极大值必大于极小值.

8、若在(a,b)内，函数$f(x)$的一阶导数$f'(x)>0$，二阶导数$f''(x)<0$，则函数$f(x)$在此区间内（ ）.

（A） 单调减少，曲线凹;（B）单调减少，曲线凸;

（C） 单调增加，曲线凹;（D）单调增加，曲线凸.

9、设$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$，且在点 a 的某邻域中（点 a 可除外），$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 存在是 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在的（　）.

（A）充分条件；（B）必要条件；（C）充要条件；
（D）既非充分也非必要条件.

10、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cosh x-1}{1-\cos x}=$（ ）.

（A）0；　（B）$-\dfrac{1}{2}$；（C）1；　（D）$\dfrac{1}{2}$.

二、求极限（20 分）：

1、$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$　（$a\geq 0$）；

2、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$；

3、$\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})]$；　4、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$；

三、（10 分）一个半径为R的球内有一个内接正圆锥体，问圆锥体的高和底半径成何比例时，圆锥体的体积最大？

四、（10 分）设$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$有拐点（1，2），并在该点有水平切线，$f(x)$交x轴于点$(3,0)$，求$f(x)$.

五、（10 分）求数列$\left\{\frac{n^4}{2^n}\right\}$的最大项（取$(\ln 2)^{-1}\approx 1.4$）.

六、（10 分）绘出函数$f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$的图形.

七、（10 分）若$x>0$, 试证 $\arctan x > x-\dfrac{x^3}{3}$.

八、（10 分）设连续函数$f(x)$在点x_0的某个去心邻域内可导且$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=A$, 证明$f'(x_0)$存在且$f'(x_0)=A$.

测验题答案

一、1、D；　2、D；　3、A；　4、C；　5、D；
6、B；　7、C；　8、D；　9、B；　10、C.

二、1、$\frac{1}{\sqrt{2a}}$；　2、$\sqrt{e}$；　3、$\frac{1}{2}$；　4、不存在.

三、$\sqrt{2}:1$.

四、$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$.

五、最大项为$\frac{6^4}{2^6}$.

八、提示：利用拉氏定理或罗必达法则.