第二章 导数与微分

第三讲： 参数方程、隐函数求导与高阶导数

3.1 由参数方程确定的函数的导数

若参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定 y 与 x 间的函数关系，

称此为由参数方程所确定的函数.

例如 $\begin{cases} x = 2t, \\ y = t^2, \end{cases}$ $\Rightarrow$ $t = \dfrac{x}{2}$ 消去参数 t

$$\therefore y = t^2 = (\frac{x}{2})^2 = \frac{x^2}{4} \qquad \therefore y' = \frac{1}{2}x$$

问题： 消参困难或无法消参如何求导?

在参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$中,设函数$x=\varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$, $\therefore y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$

再设函数$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$都可导,且$\varphi'(t)\neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

例1 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程和法线方程.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\sin t}{a - a\cos t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1 - \cos\frac{\pi}{2}} = 1.$$

若 $t=\frac{\pi}{2}$, 则 $x=a(\frac{\pi}{2}-1),\ y=a.$

所求切线方程为 $y-a=x-a(\frac{\pi}{2}-1)$

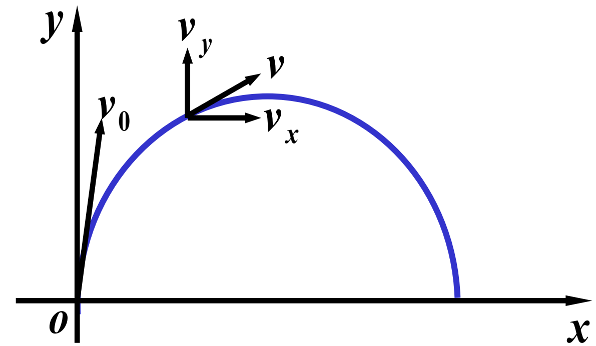
即 $y=x+a(2-\frac{\pi}{2})$

所求法线方程为 $y-a=-x+a(\frac{\pi}{2}-1)$

即 $y+x=\frac{\pi}{2}a$

例2 不计空气的阻力，以初速度 v_0，发射角 α 发射炮弹，其运动方程为

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha, \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases}$$



求 (1)炮弹在时刻 t_0 的运动方向；

(2)炮弹在时刻 t_0 的速度大小 .

解 （1）在 t_0 时刻的运动方向，即轨迹在 t_0 时刻的切线方向，可由切线的斜率来反映.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(v_0 t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2)'}{(v_0 t\cos\alpha)'}=\frac{v_0\sin\alpha-gt}{v_0\cos\alpha}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0}=\frac{v_0\sin\alpha-gt_0}{v_0\cos\alpha}.$$

(2) 炮弹在 t_0时刻沿 x, y轴方向的分速度为

$$v_x=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}=\left.(v_0 t\cos\alpha)'\right|_{t=t_0}=v_0\cos\alpha$$

$$v_y=\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}=\left.(v_0 t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2)'\right|_{t=t_0}=v_0\sin\alpha-gt_0$$

$\therefore$ 在t_0时刻炮弹的速度为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2-2v_0gt_0\sin\alpha+g^2t_0^2}$$

3.2 隐函数的导数

由方程$F(x,y)=0$所确定的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数. $y=f(x)$形式称为显函数.

$F(x,y)=0 \longrightarrow y=f(x)$ 隐函数的显化

问题:隐函数不易显化或不能显化如何求导?

隐函数求导法则:

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

例3 求由方程 $xy-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0$所确定的隐函数 y的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解 方程两边对x求导,

$$y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-y}{x+\mathrm{e}^y}$, 由原方程知 $x=0, y=0,$

$$\therefore \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\mathrm{e}^x-y}{x+\mathrm{e}^y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=1.$$

例4 设曲线C的方程为$x^3+y^3=3xy$,求过C上点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$的切线方程,并证明曲线$C$在该点的法线通过原点.

解 方程两边对x求导, $3x^2+3y^2y'=3y+3xy'$

$$\therefore y'\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=\frac{y-x^2}{y^2-x}\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=-1.$$

所求切线方程为$y-\frac{3}{2}=-(x-\frac{3}{2})$ 即 $x+y-3=0.$

法线方程为 $y-\frac{3}{2}=x-\frac{3}{2}$ 即 $y=x$, 显然过原点.

对数求导法

观察函数 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^{2}\mathrm{e}^{x}}$， $y=x^{\sin x}$.

方法:

先在方程两边取对数，然后利用隐函数的求导方法求出导数.

--------对数求导法

适用范围:

多个函数相乘和幂指函 数$u(x)^{v(x)}$的情形.

例5 设 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2\mathrm{e}^x}$, 求$y'$.

解 等式两边取对数得

$$\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x$$

上式两边对 x求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1$$

$$\therefore y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2\mathrm{e}^x}[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1]$$

例6 设 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$, 求y'.

解 等式两边取对数得 $\ln y = \sin x \cdot \ln x$

上式两边对x求导得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore y' = y(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

相关变化率

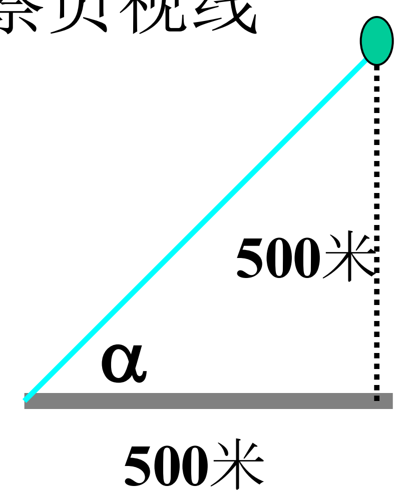
设 $x = x(t)$及 $y = y(t)$都是可导函数，而变量 x与 y之间存在某种关系，从而它们的变化率 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$与 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$之间也存在一定关系，这样两个相互依赖的变化率称为相关变化率．

问题：已知一个变化率时如何求出另一个变化率?

例7 一汽球从离开观察员500米处离地面铅直上升，其速率为140米/秒.当气球高度为500米时，观察员视线的仰角增加率是多少？

解 设气球上升t秒后，其高度为h，观察员视线的仰角为α，则

$$\tan\alpha = \frac{h}{500}$$



上式两边对t求导得

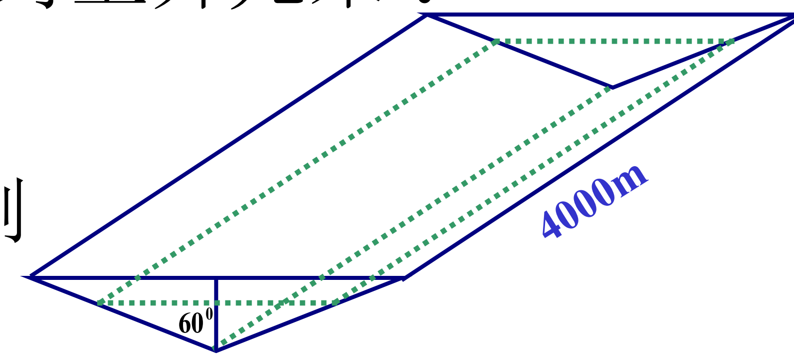
$$\sec^2\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{500} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$\because \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 140$米/秒，当 $h = 500$米时，$\sec^2\alpha = 2$

$\therefore \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = 0.14$(弧度/分)

仰角增加率

例8 河水以8米^3/秒的体流量流入水库中，水库形状是长为4000米，顶角为120^0的水槽，问水深20米时，水面每小时上升几米？



解 设时刻t水深为$h(t)$，

水库内水量为$V(t)$，则

$$V(t)=4000\sqrt{3}h^2$$

上式两边对t求导得 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=8000\sqrt{3}h\cdot\dfrac{dh}{dt}$

$\because \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=28800$米^3/小时， $\therefore$ 当$h=20$米时，

$\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\approx 0.104$米/小时

水面上升之速率

3.3 高阶导数

1. 高阶导数的概念

设 $s=f(t)$，则瞬时速度为 $v(t)=f'(t)$

$\because$ 加速度 a 是速度 v 对时间 t 的变化率

$\therefore \quad a(t)=v'(t)=[f'(t)]'.$

若函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x 处可导，即

$$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在，则称$(f'(x))'$为函数$f(x)$在点x的二阶导数，记作

$$f''(x), \quad y'', \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}.$$

二阶导数的导数为三阶导数,

$$f'''(x),\ y''',\ \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}.$$

三阶导数的导数为四阶导数,

$$f^{(4)}(x),\ \ y^{(4)},\ \ \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}.$$

一般地, 函数$f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为函数$f(x)$的n阶导数,记作

$$f^{(n)}(x),\ \ y^{(n)},\ \ \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}.$$

二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数.**

相应地, $f(x)$ 零阶导数; $f'(x)$ 壹阶导数.

2. 高阶导数求法举例

（1）直接法：由高阶导数的定义逐步求高阶导数.

例34 设 $y = \arctan x$，求 $y''(0)$，$y'''(0)$.

解 $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad y'' = \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$$y''' = \left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$\therefore y''(0) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=0} = 0; \quad y'''(0) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\bigg|_{x=0} = -2.$$

例9 设 $x^4 - xy + y^4 = 1$, 求y''在点$(0,1)$处的值 .

解 方程两边对x求导得

$$4x^3 - y - xy' + 4y^3y' = 0.$$

代入 $x=0,\ y=1$得 $\left.y'\right|_{\substack{x=0\\y=1}} = \frac{1}{4}$;

将上式两边对 x 求导，得

$$12x^2 - 2y' - xy'' + 12y^2(y')^2 + 4y^3y'' = 0$$

代入 $x=0,\ y=1,\ \left.y'\right|_{\substack{x=0\\y=1}} = \frac{1}{4}$ 得 $\left.y''\right|_{\substack{x=0\\y=1}} = -\frac{1}{16}.$

例10 设 $y = x^{\alpha}\ (\alpha \in \mathrm{R})$, 求$y^{(n)}$.

解 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$y'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$y''' = (\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$

$\cdots\cdots$

$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \qquad (n \geq 1)$

若α为自然数n,则

$y^{(n)} = (x^{n})^{(n)} = n!, \qquad y^{(n+1)} = (n!)' = 0.$

注意: 求高阶导数时,先求出的结果不要急于合并,分析其规律性,写出高阶导数(进行归纳证明).

例11 设 $y = \ln(1+x)$, 求$y^{(n)}$.

解 $y' = \dfrac{1}{1+x}$　　$y'' = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$y''' = \dfrac{2!}{(1+x)^3}$　　$y^{(4)} = -\dfrac{3!}{(1+x)^4}$

$\cdots\cdots$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (n \geq 1,\ 0! = 1)$$

例12 设 $y=\sin x$, 求$y^{(n)}$.

解 $y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y'''=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

同理可得 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

例13 设 $y=\mathrm{e}^{ax}\sin bx$ (a,b为常数), 求$y^{(n)}$.

解 $y'=a\mathrm{e}^{ax}\sin bx+b\mathrm{e}^{ax}\cos bx$

$$=\mathrm{e}^{ax}(\underline{a\sin bx+b\cos bx})$$

$$=\mathrm{e}^{ax}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\varphi)\quad(\varphi=\arctan\frac{b}{a})$$

$$y''=\sqrt{a^2+b^2}\cdot[a\mathrm{e}^{ax}\sin(bx+\varphi)+b\mathrm{e}^{ax}\cos(bx+\varphi)]$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\mathrm{e}^{ax}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+2\varphi)$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot\mathrm{e}^{ax}\sin(bx+n\varphi)\qquad(\varphi=\arctan\frac{b}{a})$$

设参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$所确定的函数二阶可导，则

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

即 $$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

例14 求由 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数的二阶导数.

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}$$

$$= \frac{\sec^4 t}{3a\sin t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$$

（2）高阶导数的运算法则

设函数u和v具有n阶导数, 则

(i) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

(ii) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$

(iii) $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

（莱布尼兹公式）

例15 设 $y = x^2 e^{2x}$, 求$y^{(20)}$.

解 设$u = e^{2x}, v = x^2$,则由莱布尼兹公式知

$$y^{(20)} = (e^{2x})^{(20)} \cdot x^2 + 20(e^{2x})^{(19)} \cdot (x^2)'$$

$$+ \frac{20(20-1)}{2!}(e^{2x})^{(18)} \cdot (x^2)'' + 0$$

$$= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x$$

$$+ \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x}(x^2 + 20x + 95)$$

（3）间接法　利用已知的高阶导数公式, 通过四则运算, 变量代换等方法, 求出n阶导数.

常用高阶导数公式:

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a>0)$ $\qquad (\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$, $\quad (\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$

例15 设 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$，求 $y^{(20)}$.

解 $\because y=\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1})$

$\therefore y^{(20)}=\dfrac{1}{2}[\dfrac{-20!}{(x-1)^{21}}-\dfrac{-20!}{(x+1)^{21}}]$

$=1216451004088320000[\dfrac{1}{(x+1)^{21}}-\dfrac{1}{(x-1)^{21}}]$

$=2432902008176640000\sum_{i=1}^{10}\binom{21}{2i+1}\dfrac{x^{20-2i}}{(1-x^2)^{21}}.$

例17 设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$, 求$y^{(n)}$.

解 $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$\therefore y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cdot\cos(4x+n\cdot\frac{\pi}{2}),\quad (n\geq 1).$$

3. 4　小结与思考题

参数方程求导： 实质上是用复合函数求导法则;

隐函数求导法则： 直接对方程两边求导;

对数求导法： 对方程两边取对数,按隐函数的求导法则求导;

相关变化率： 通过函数关系确定两个相互依赖的变化率； **解法：** 通过建立两者之间的关系， 用链式求导法求解.

高阶导数的数学定义及物理意义;

高阶导数的运算法则 (莱布尼兹公式);

高阶导数的求法;

1. 直接法;

2. 间接法.

思考题

设 $g'(x)$ 连续，且 $f(x)=(x-a)^2 g(x)$ ，

求 $f''(a)$.

思考题解答

$\because g(x)$ 可导

$$\therefore f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2 g'(x)$$

$\because g''(x)$ 不一定存在　　故用定义求 $f''(a)$

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} \qquad f'(a)=0$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}[2g(x)+(x-a)g'(x)]=2g(a)$$

课堂练习题

一、 填空题：

1、设$x^3-2x^2y+5xy^2-5y+1=0$确定了y是x的函数，

则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1)}=$________.

2、曲线$x^3+y^3-xy=7$在$(1,2)$处的切线方程是______.

3、曲线$\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{2}$处的法线方程________.

4、已知$\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\cos t \\ y=\mathrm{e}^t\sin t \end{cases}$，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=$_______.

二、 用对数求导法则求下列函数的导数：

1、 $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$；

2、 $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$.

三、设 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f(\frac{1}{x})=\frac{3}{x}$，求 $f'(x)$.

课堂练习题答案

一、1、$-\frac{4}{3}$；　　2、$x+11y-23=0$；

3、$\frac{\pi}{2}x-y+\frac{\pi}{2}=0$；　　4、$-2-\sqrt{3}$．

二、1、$\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1}]$；

2、$\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}[\frac{1}{x}+\cot x-\frac{e^x}{2(1-e^x)}]$．

三、$2+\frac{1}{x^2}$．

课堂练习题

一、 填空题：

1、 设 $y=(1+x^2)\arctan x$， 则 y''=__________.

2、 设 $y=f(x^3)$ 二阶可导， 则 y''=__________.

3、 设 $f(x)=(2x+3)^8$， 则 $f'''(2)$=__________.

4、 设 $f(x)=x(x-1)\cdots(x-n)$，则 $f^{(n+1)}(x)$=________.

二、求下列函数的二阶导数：1、 $y=\dfrac{2x^3+\sqrt{x}+4}{x}$；

2、 $y=\cos^2 x\ln x$； 3、 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

三、 求下列函数的n阶导数：

1、$y=\mathrm{e}^x\sin x$；　　2、$y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

3、$y=\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$；　　4、$y=\sin x\sin 2x\sin 3x$.

四、 求由参数方程$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$所确定的函数的三阶导数$\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$.

课堂练习题答案

一、1、$2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$；　2、$2xf'(x^3)+9x^4f''(x^3)$；

3、$6\times 7^6\times 8^2$；　　4、$(n+1)!$.

二、1、$4+\dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}+8x^{-3}$；

2、$-2\cos 2x\cdot\ln x-\dfrac{2\sin 2x}{x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}$；

3、$-\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

三、1、$(\sqrt{2})^n e^x \sin(x+n\frac{\pi}{4})$；　　2、$(-1)^n \frac{2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$；

3、$(-1)^n n![\frac{8}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}],(n\geq 2)$；

4、提示：　$y=\frac{1}{4}[\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x].$

$$\frac{1}{4}[2^n \sin(2x+\frac{n\pi}{2})+4^n \sin(4x+\frac{n\pi}{2})-6^n \sin(6x+\frac{n\pi}{2})].$$

四、$\frac{t^4-1}{8t^3}.$