

# 第二章 导数与微分

## 第一讲：导数基本概念

## 2.1.1 导数的概念

### 1. 瞬时速度

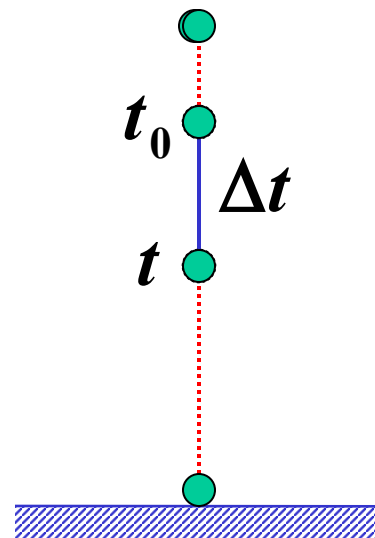
如图，求  $t_0$  时刻的瞬时速度，

取一邻近于  $t_0$  的时刻  $t$ ，运动时间  $\Delta t$ ，

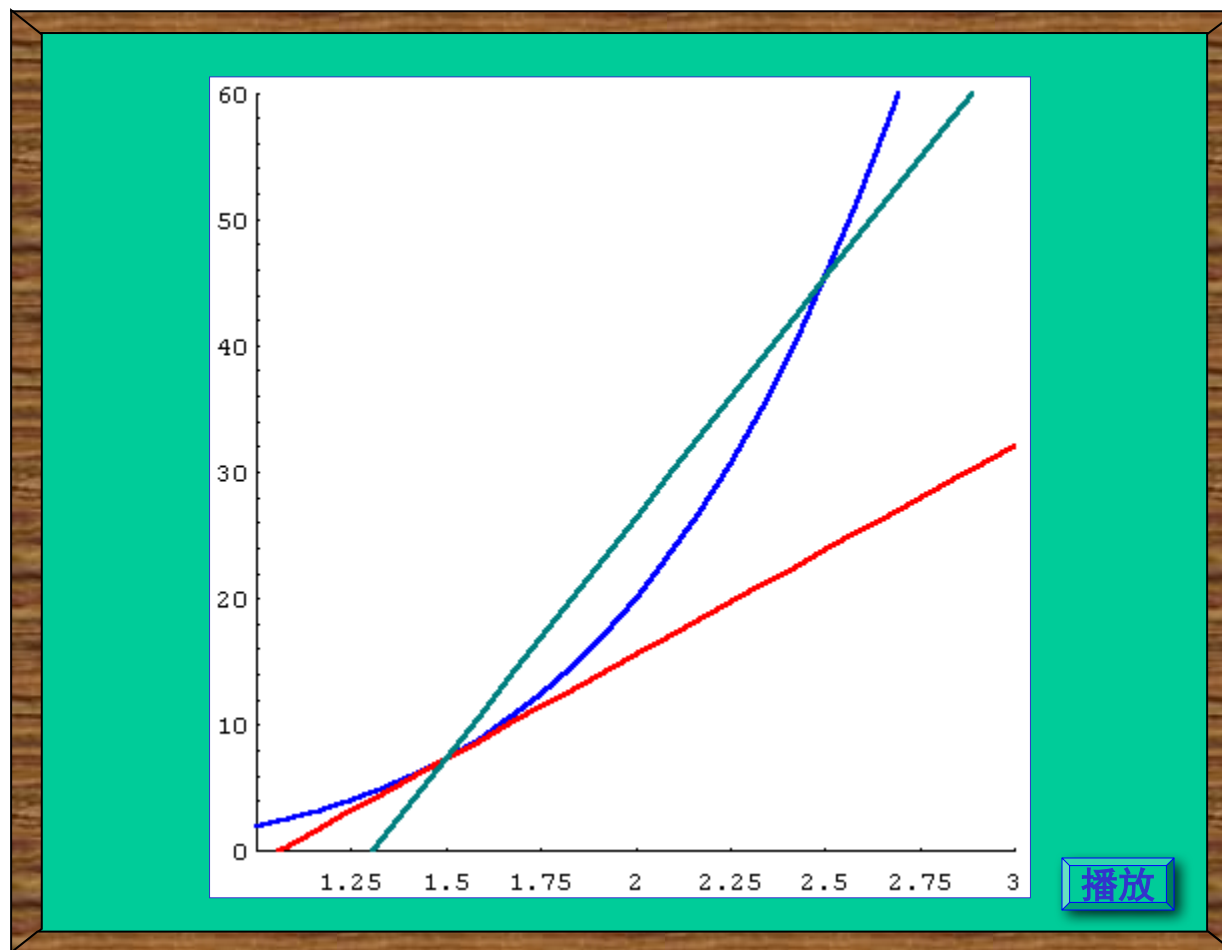
$$\text{平均速度 } \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{g}{2}(t + t_0).$$

当  $t \rightarrow t_0$  时，取极限得

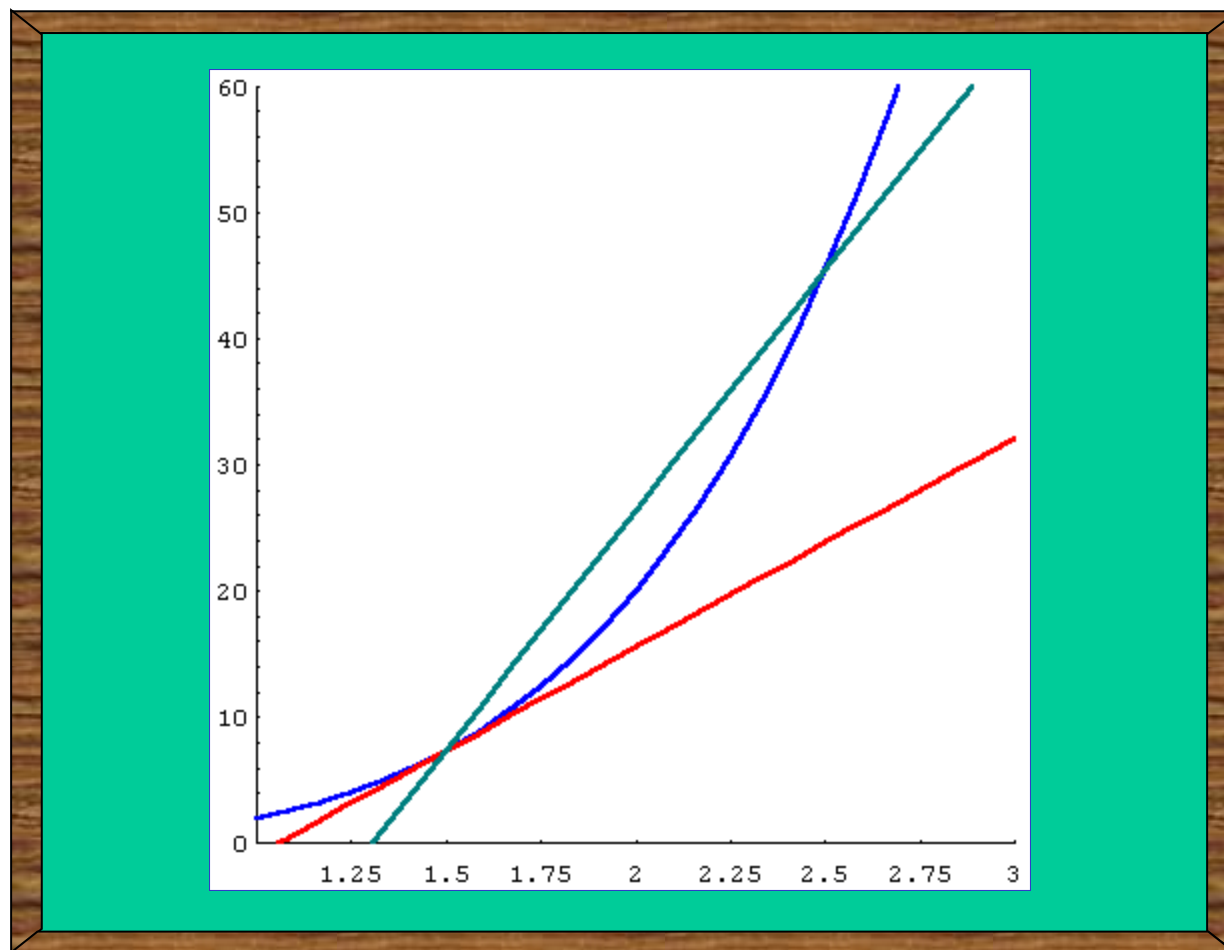
$$\text{瞬时速度 } v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t_0 + t)}{2} = gt_0.$$



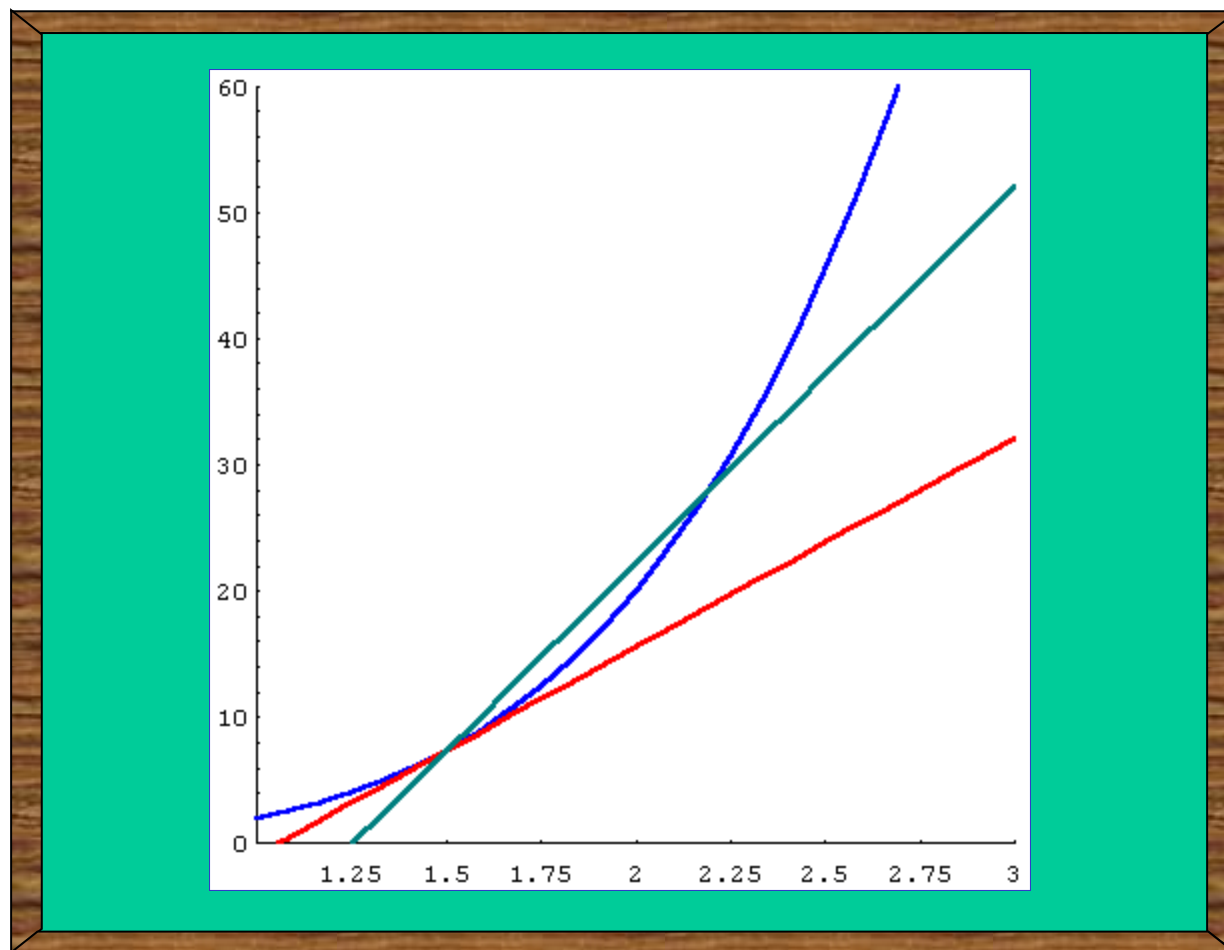
## 2.切线问题 割线的极限位置——切线位置



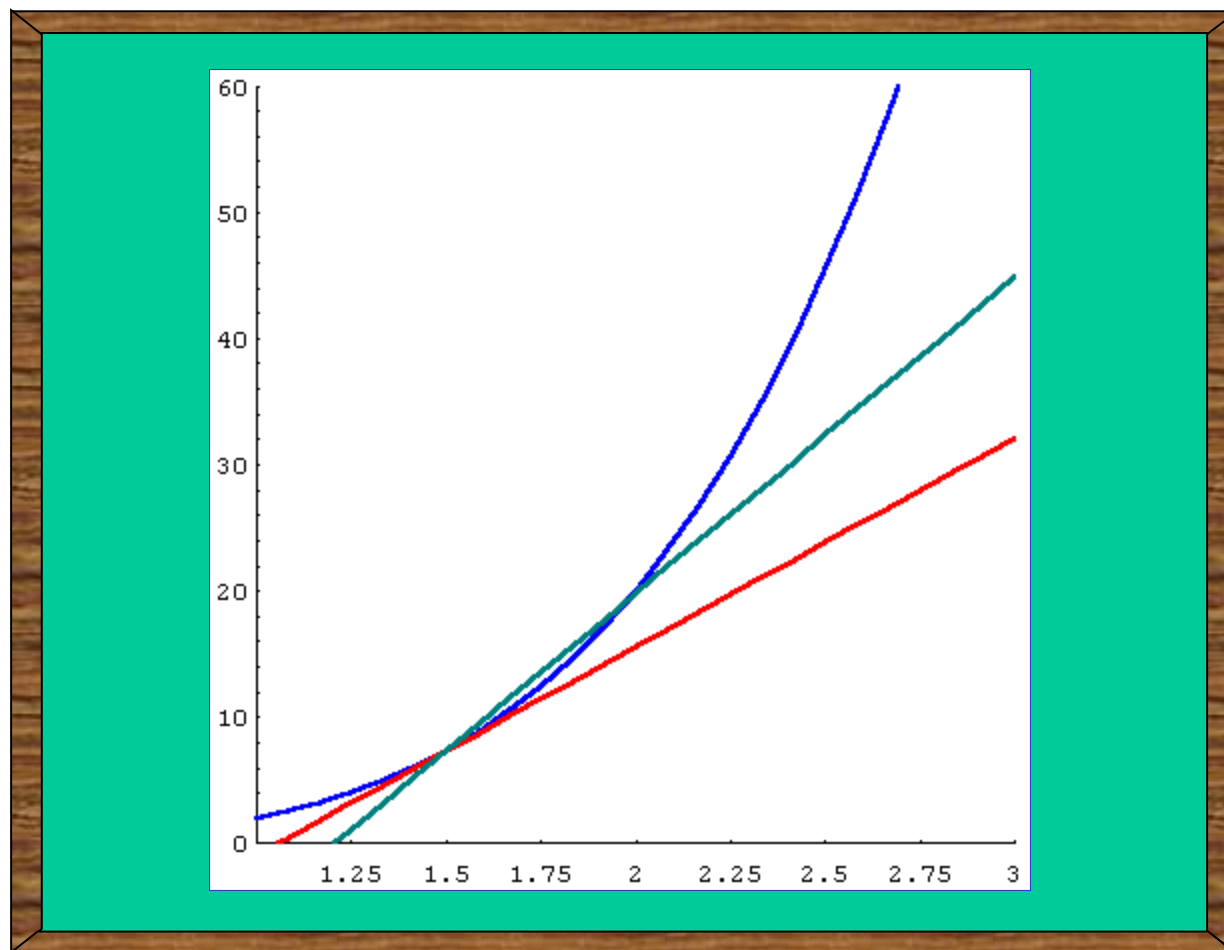
## 2.切线问题 割线的极限位置——切线位置



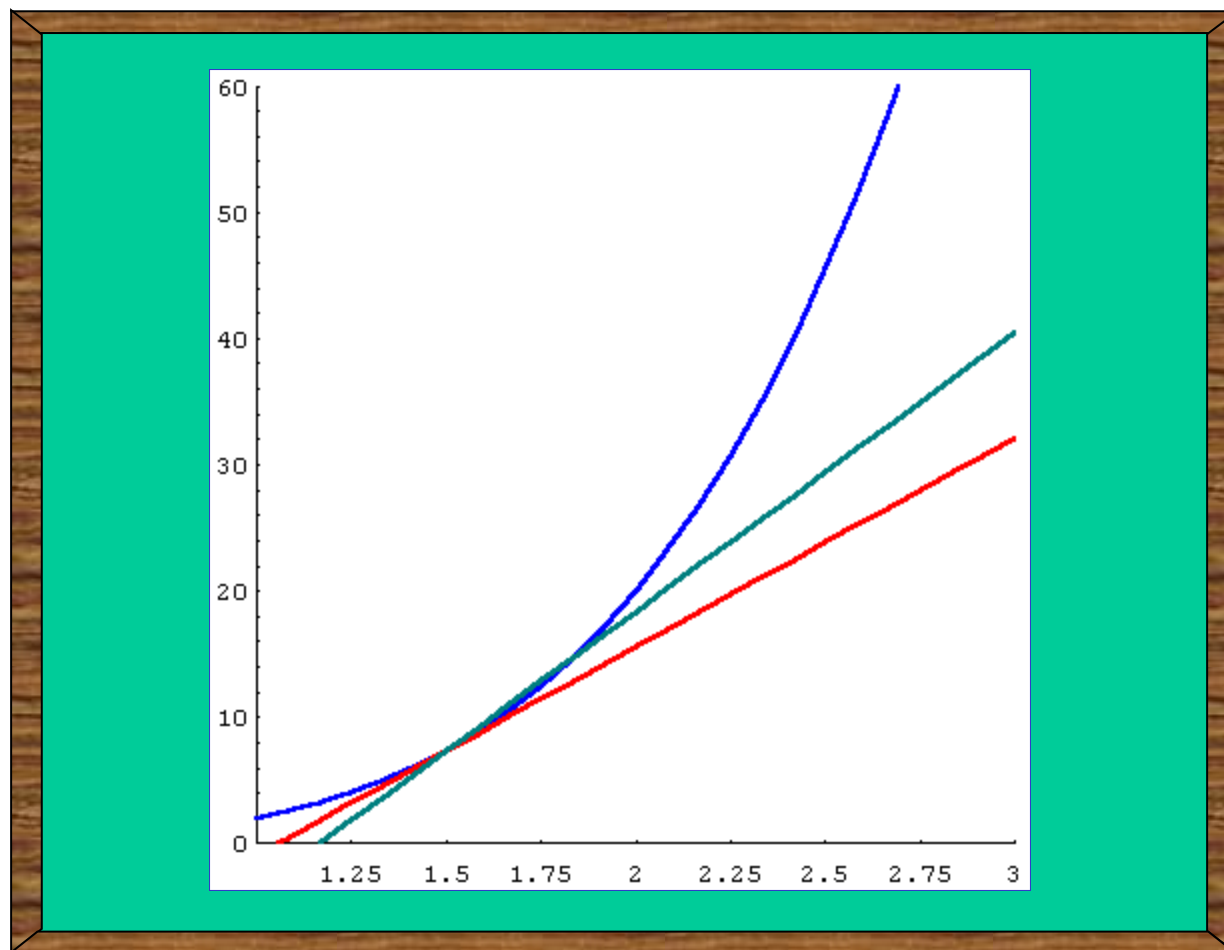
## 2.切线问题 割线的极限位置——切线位置



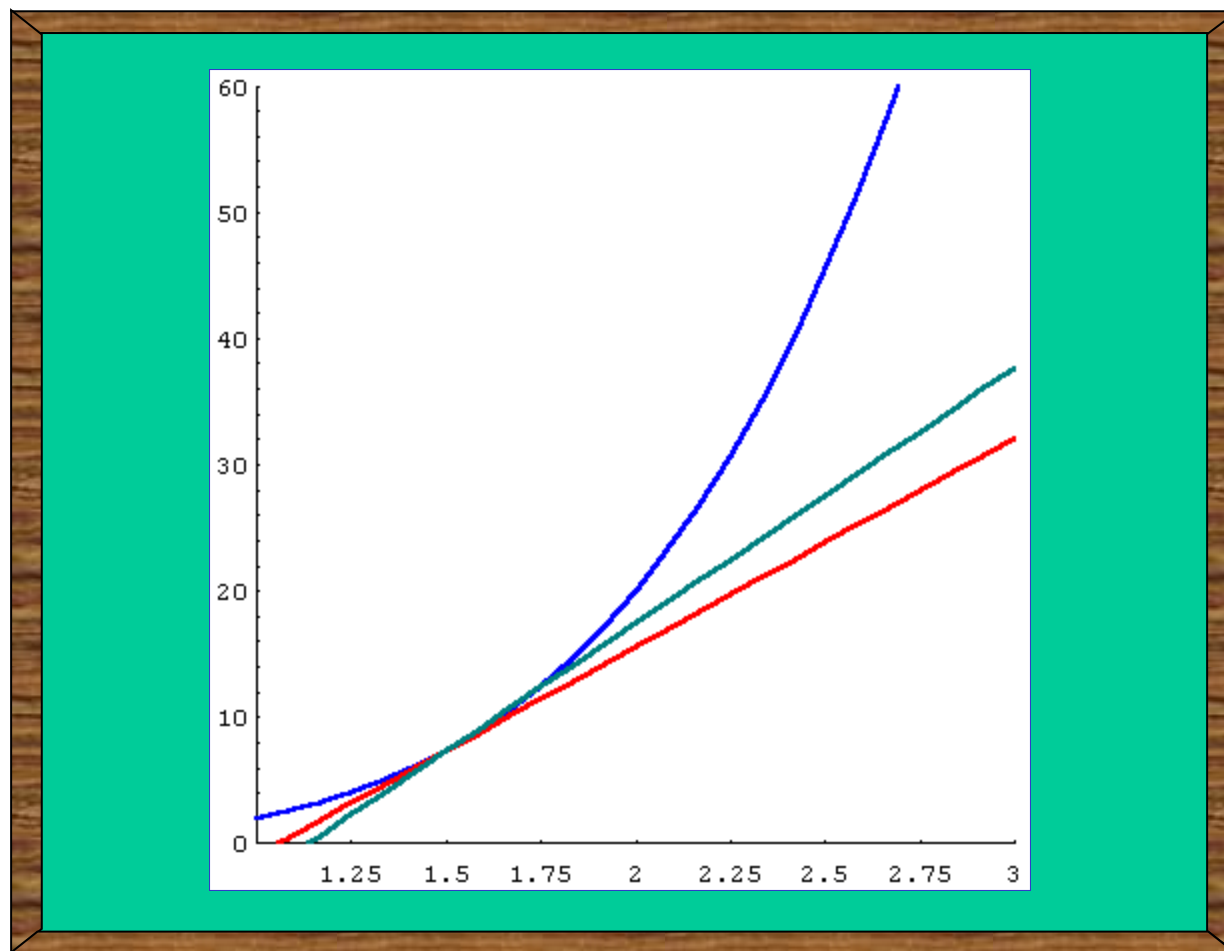
## 2.切线问题 割线的极限位置——切线位置



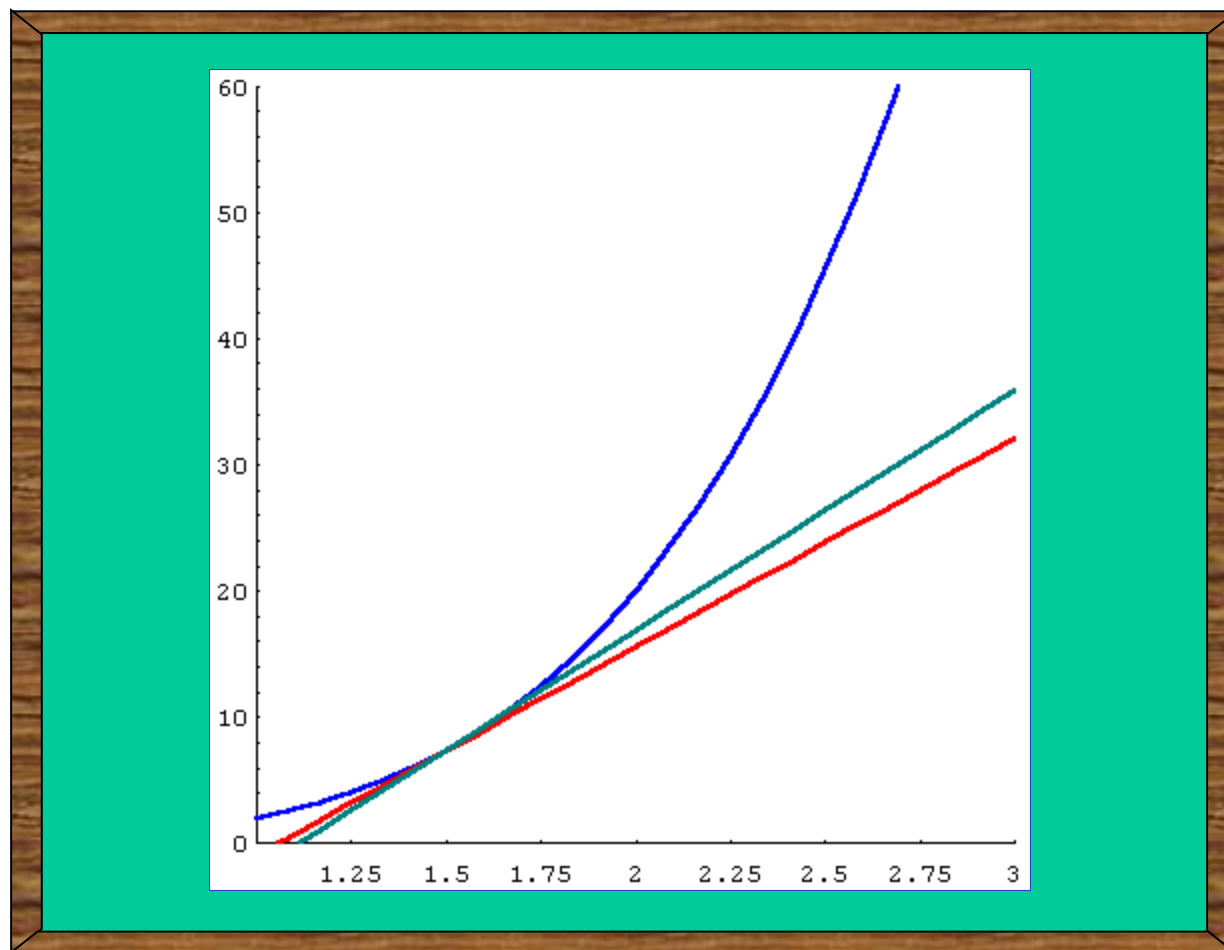
## 2.切线问题 割线的极限位置——切线位置



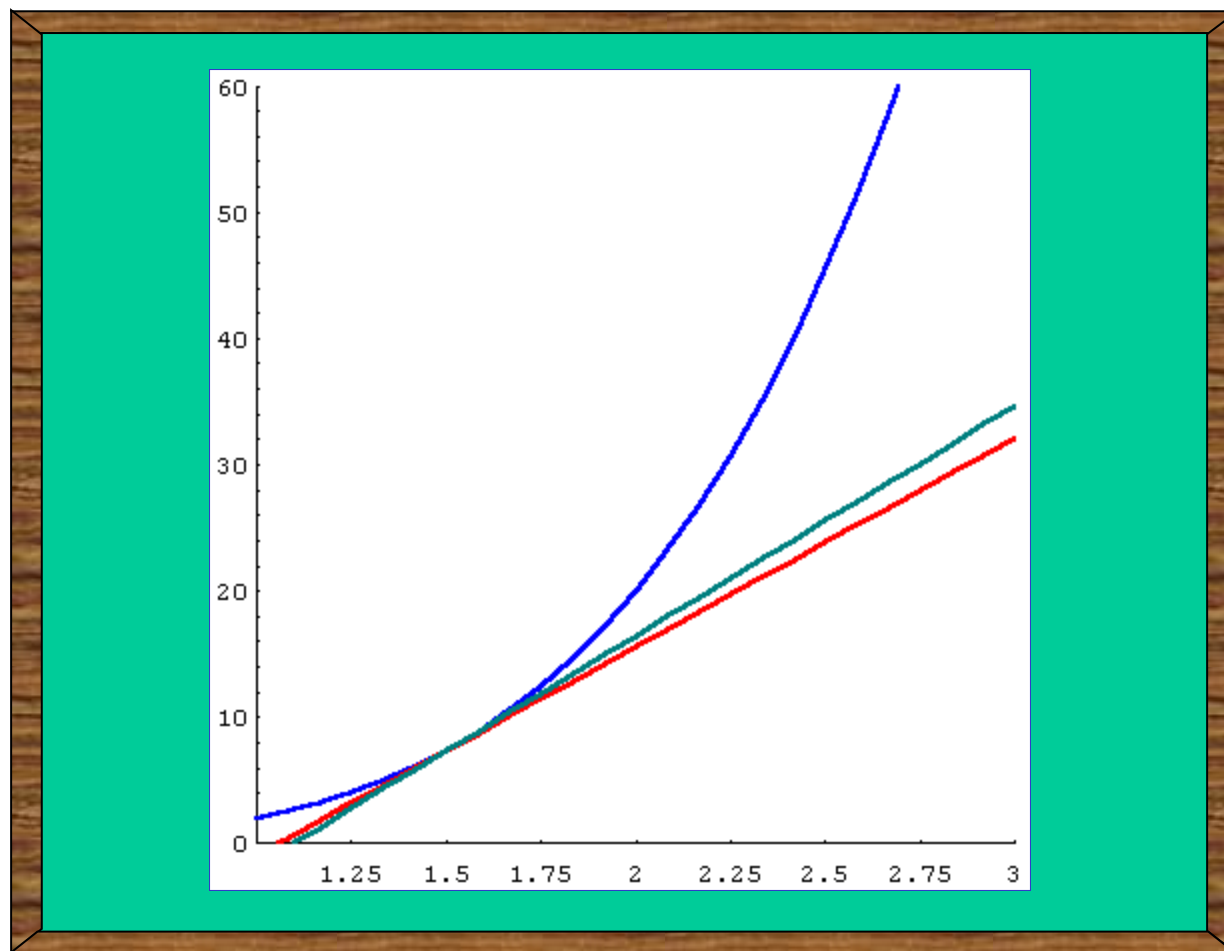
## 2.切线问题 割线的极限位置——切线位置



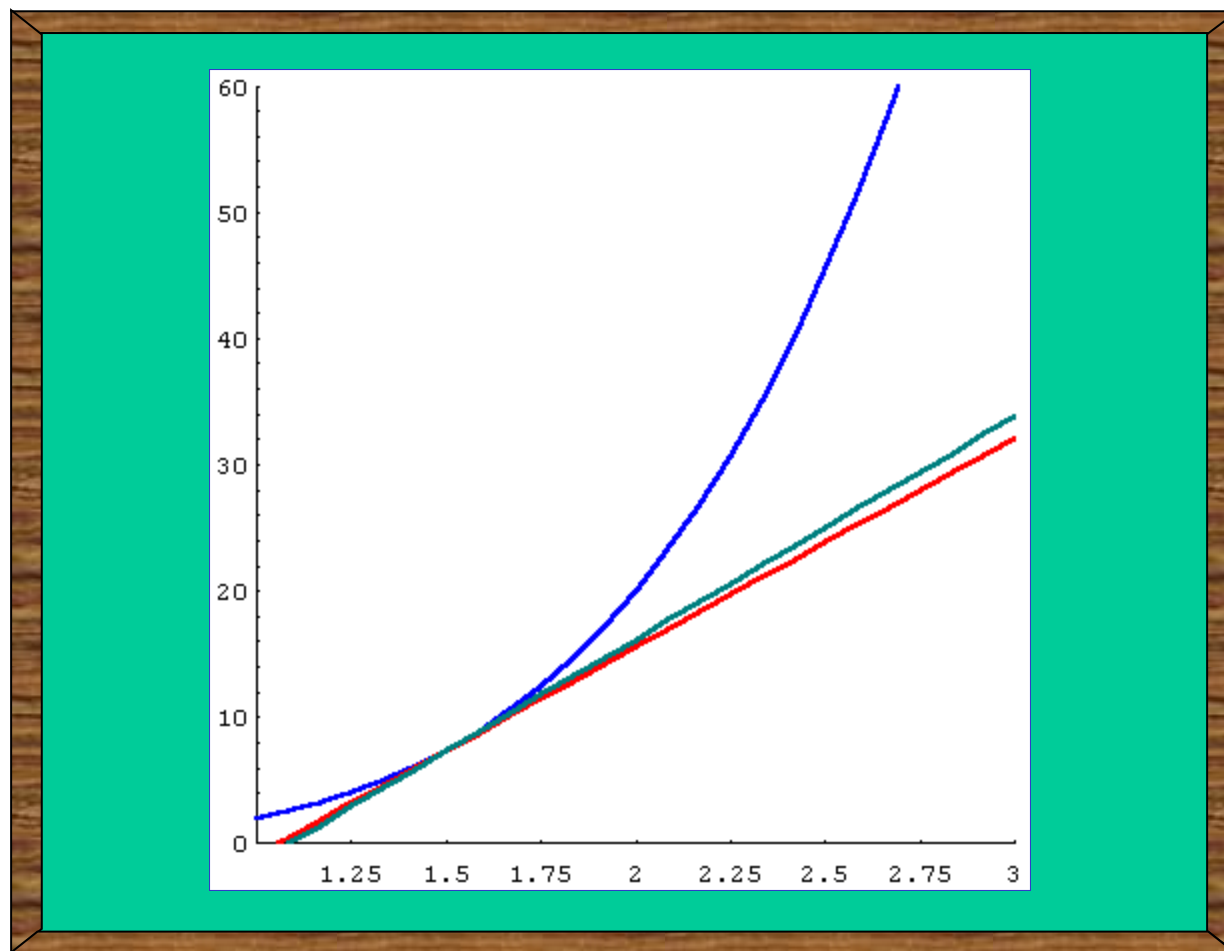
## 2.切线问题 割线的极限位置——切线位置



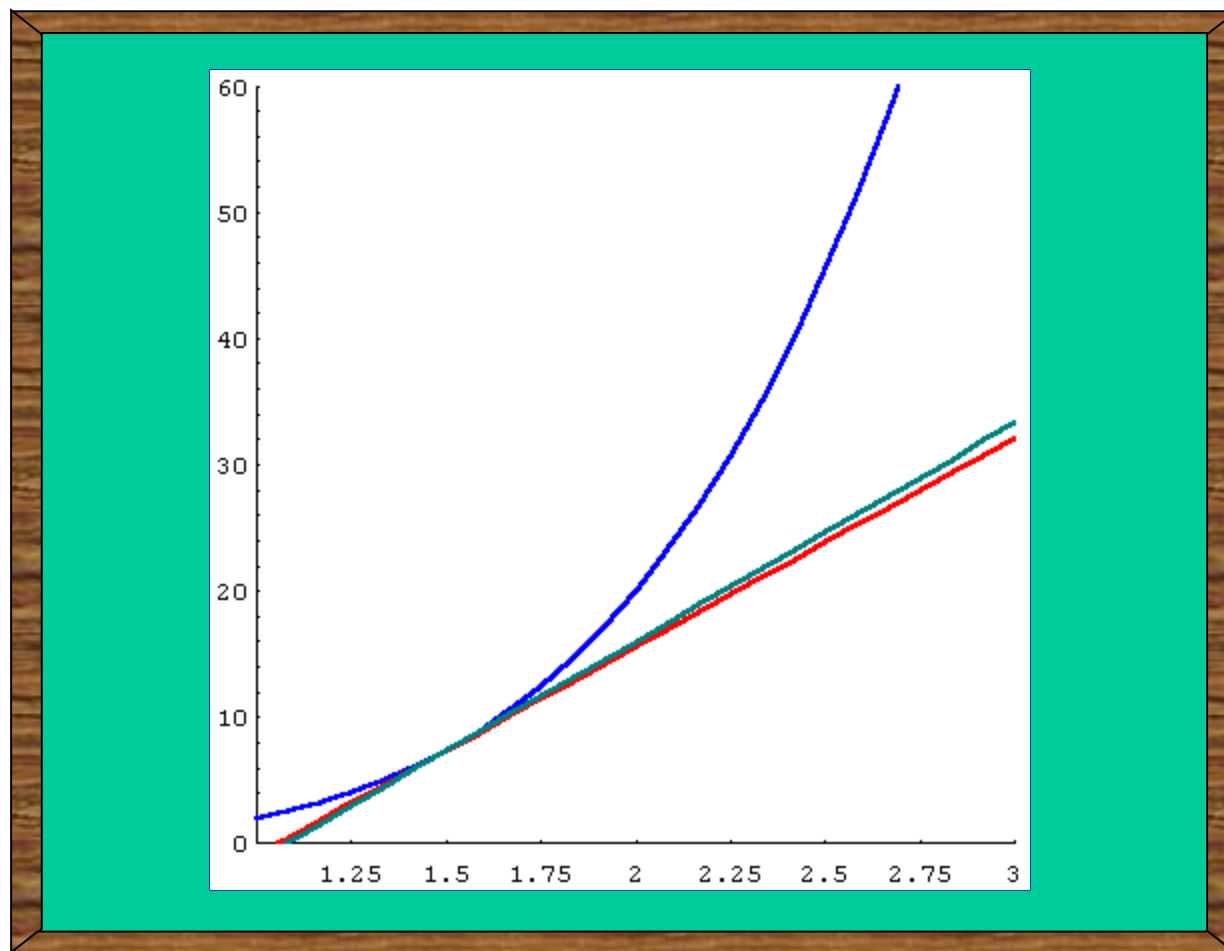
## 2.切线问题 割线的极限位置——切线位置



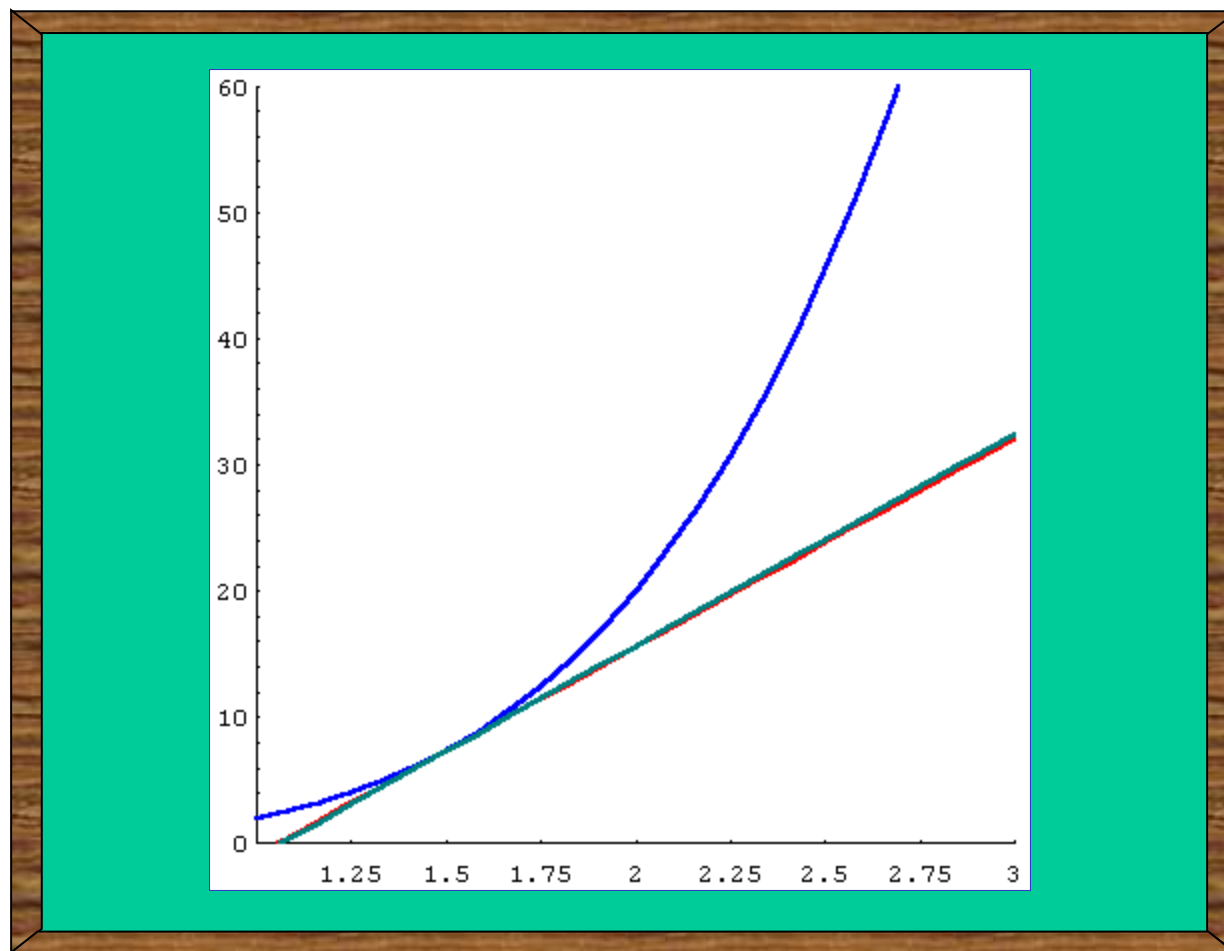
## 2.切线问题 割线的极限位置——切线位置



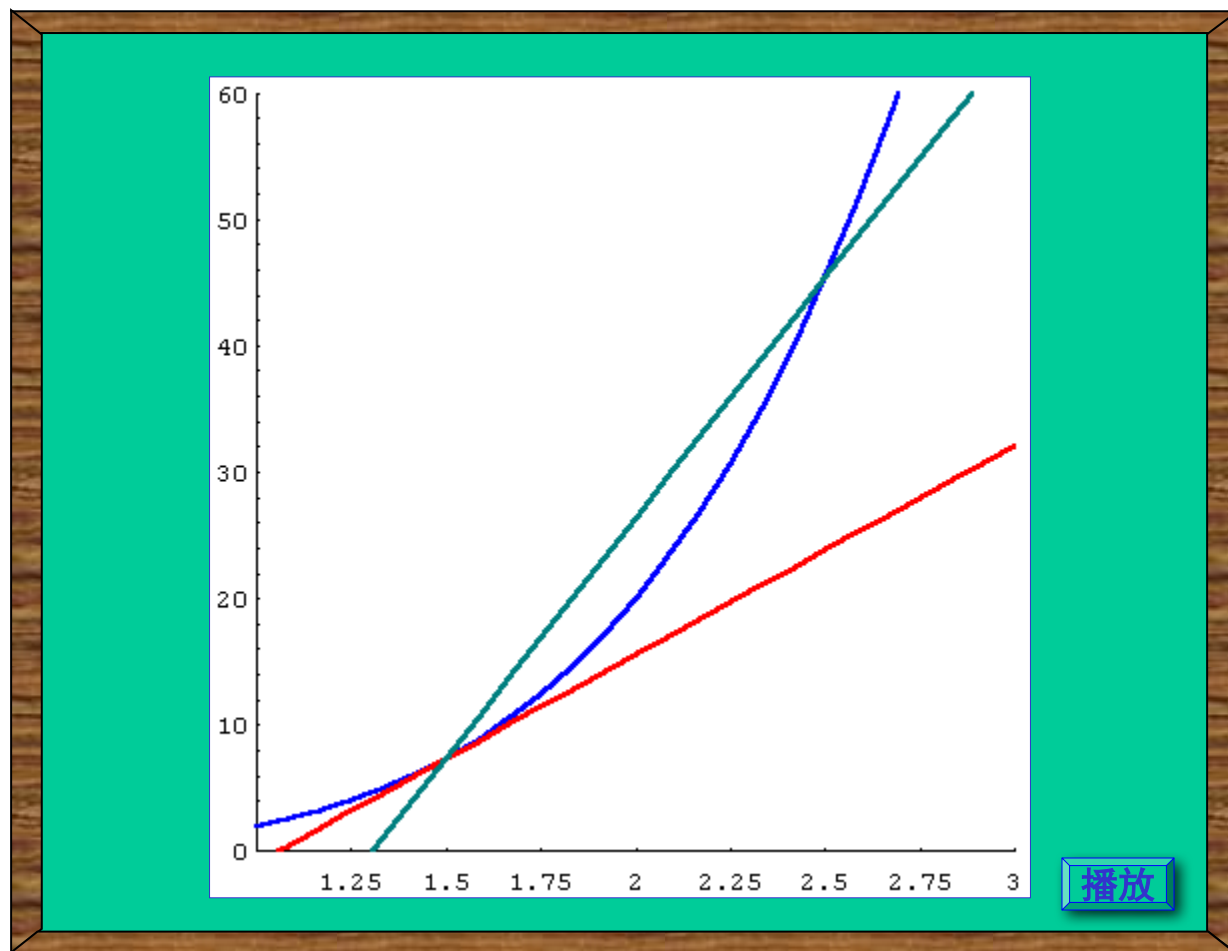
## 2.切线问题 割线的极限位置——切线位置



## 2.切线问题 割线的极限位置——切线位置

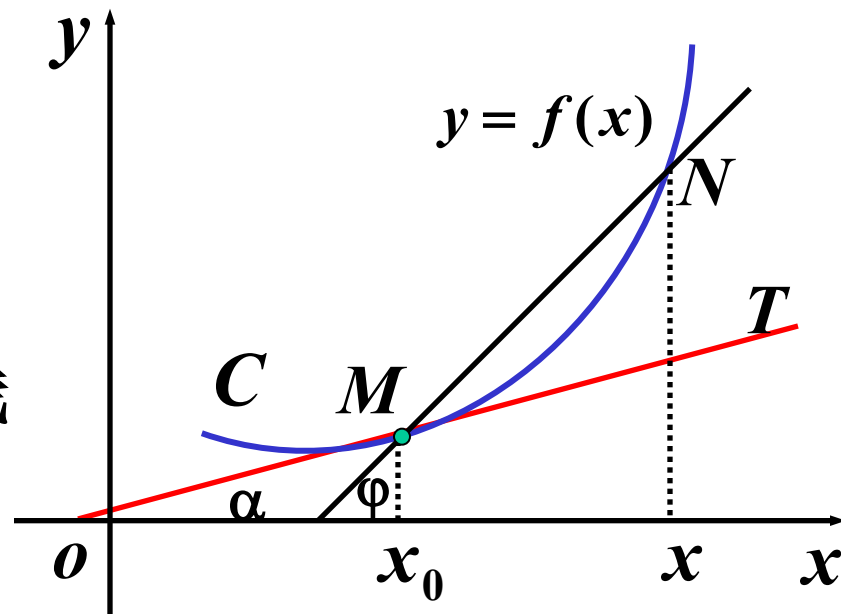


## 2.切线问题 割线的极限位置——切线位置



如图, 如果割线 $MN$ 绕点  
 $M$ 旋转而趋向极限位置  
 $MT$ , 直线 $MT$ 就称为曲线  
 $C$ 在点 $M$ 处的切线.

极限位置即



$|MN| \rightarrow 0, \angle NMT \rightarrow 0$ . 设  $M(x_0, y_0), N(x, y)$ .

割线 $MN$ 的斜率为  $\tan \varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ,

$N \xrightarrow{\text{沿曲线} C} M, x \rightarrow x_0$ ,

切线 $MT$ 的斜率为  $k = \tan \alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

### 3. 导数的定义

设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某个邻域内有定义, 当自变量  $x$  在  $x_0$  处取得增量  $\Delta x$  (点  $x_0 + \Delta x$  仍在该邻域内) 时, 相应地函数  $y$  取得增量  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ; 如果  $\Delta y$  与  $\Delta x$  之比当  $\Delta x \rightarrow 0$  时的极限存在, 则称函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导, 并称该极限为函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处的导数, 记为  $y'|_{x=x_0}$ ,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} \text{ 或 } \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0},$$

$$\text{即 } y' \Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

其它形式

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

## 4. 关于导数的说明

- ★ 点导数是因变量在点  $x_0$  处的变化率,反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度.
- ★ 如果函数  $y = f(x)$  在开区间  $I$  内的每点处都可导, 就称函数  $f(x)$  在开区间  $I$  内可导.
- ★ 对于任一  $x \in I$ , 都对应着  $f(x)$  的一个确定的导数值. 此函数叫原来函数的  $f(x)$  的导函数.

记为:  $y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$ .

$$\text{即 } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\text{或 } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

**注意:**  $f'(x_0) = f'(x) \Big|_{x=x_0}$ .

## ★ 单侧导数

### 1. 左导数:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0 - 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

### 2. 右导数:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0 + 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

★ 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处可导  $\Leftrightarrow$  左导数  $f'_-(x_0)$  和右导数  $f'_+(x_0)$  都存在且相等.

★ 如果  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内可导, 且  $f'_+(a)$  及  $f'_-(b)$  都存在, 就说  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上可导.

★ 设函数  $f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq x_0 \\ \psi(x), & x < x_0 \end{cases}$ , 讨论在点  $x_0$  的可导性.

$$\begin{aligned} \text{若} \quad & \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\psi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) \text{ 存在,} \end{aligned}$$

若 
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0) \text{ 存在,}$$

且  $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = a,$

则  $f(x)$  在点  $x_0$  可导, 且  $f'(x_0) = a.$

可否由  $f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$  来判断函数  
在点  $x_0$  处可导?

## 5. 由定义求导数

步骤: (1) 求增量  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ;

(2) 算比值  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ;

(3) 求极限  $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

例 1 求函数  $f(x) = C$  ( $C$  为常数) 的导数.

解 
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C - C}{h} = 0.$$

即 
$$(C)' = 0.$$

例 2 设函数  $f(x) = \sin x$ , 求  $(\sin x)'$  及  $(\sin x)' \Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$ .

解 
$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x. \end{aligned}$$

即  $(\sin x)' = \cos x.$

$$\therefore (\sin x)' \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \cos x \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**例 3** 求函数  $y = x^n$  ( $n$  为正整数) 的导数.

**解** 
$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} h + \cdots + h^{n-1} \right] = nx^{n-1}$$

即 
$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

一般地, 
$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}, \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

如: 
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = (x^{-\frac{1}{2}})' = \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

**例4** 求函数  $f(x) = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的导数.

**解** 
$$(a^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a.$$

即 
$$(a^x)' = a^x \ln a. \quad (e^x)' = e^x.$$

**例5** 求函数  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 的导数.

**解** 
$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \log_a e. \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

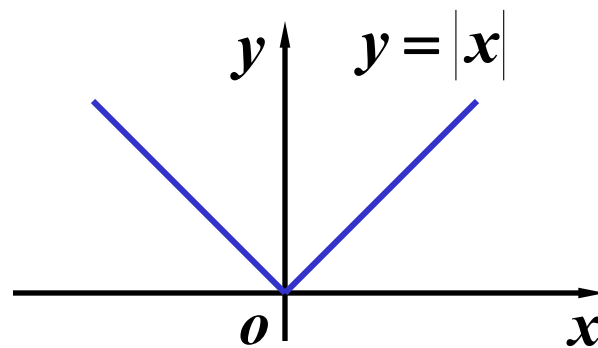
即 
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}.$$

**例 6** 讨论函数  $f(x) = |x|$  在  $x = 0$  处的可导性.

**解**  $\therefore \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h},$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

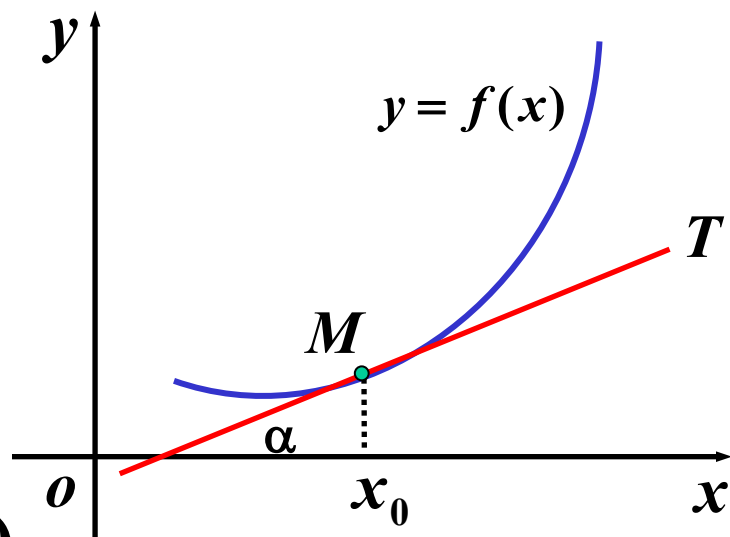


即  $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ ,  $\therefore$  函数  $y = f(x)$  在  $x = 0$  点不可导.

## 6. 几何意义

$f'(x_0)$ 表示曲线  $y = f(x)$   
在点  $M(x_0, f(x_0))$  处的  
切线的斜率, 即

$$f'(x_0) = \tan \alpha, \quad (\alpha \text{ 为倾角})$$



切线方程为  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ .

法线方程为  $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ .

**例7** 求等边双曲线  $y = \frac{1}{x}$  在点  $(\frac{1}{2}, 2)$  处的切线的斜率, 并写出在该点处的切线 和法线方程.

**解** 由导数的几何意义, 得切线斜率为

$$k = y' \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{x}\right)' \Big|_{x=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = -4.$$

所求切线方程为  $y - 2 = -4(x - \frac{1}{2})$ , 即  $4x + y - 4 = 0$ .

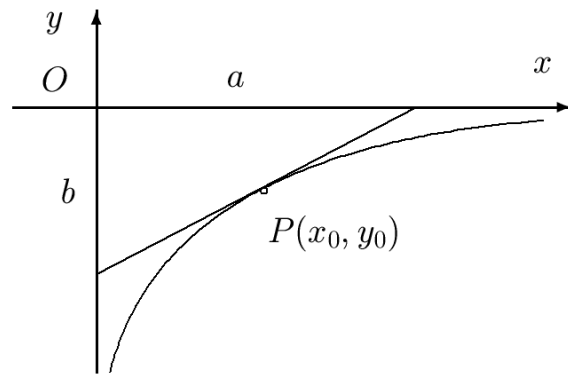
法线方程为  $y - 2 = \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2})$ , 即  $2x - 8y + 15 = 0$ .

例 8 设平面曲线的方程为  $y = f(x) = \frac{C}{x}$ , ( $C$  为非零常数), 证明曲线任一点的切线与二坐标轴所围图形的面积为定数 .

证 如图所示, 曲线方程  $y = f(x) = \frac{C}{x}$ , ( $C < 0$ ) 为其一支. 设  $P_0(x_0, y_0)$  为曲线上任一点, 即  $x_0 y_0 = C$ .

由于  $f'(x_0) = -\frac{C}{x_0^2}$ , 所以

曲线上过  $P_0$  点的方程为:



$$y - y_0 = -\frac{C}{x_0^2}(x - x_0) = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0),$$

即

$$\frac{y_0}{x_0}x + y = 2y_0,$$

或改写为截距式:

$$\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1.$$

可见, 切线在  $x$  轴和  $y$  轴上的截距分别为:

$$a = 2x_0, \quad b = 2y_0.$$

从而，切线与二坐标轴所围图形的面积为：

$$S = \frac{1}{2}|ab| = \frac{1}{2}|4x_0y_0|$$

$$= 2|x_0y_0| = 2|C| = \text{定数}.$$

## 8. 物理意义 非均匀变化量的瞬时变化率.

变速直线运动：位移对时间的导数为物体的

瞬时速度

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

交流电路：电量对时间的导数为电流强度

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}.$$

非均匀的物体：质量对长度(面积,体积)的导数为物体的线(面,体)密度.

## 9. 可导与连续的关系

**定理** 凡可导函数都是连续函数.

**证** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  可导,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$$

$$\alpha \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0) \quad \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x] = 0$$

$\therefore$  函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续.

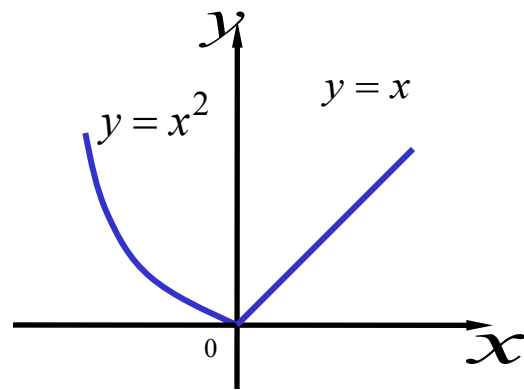
**注意：**该定理的逆定理不成立.

### ★ 不可导的连续函数举例

(1) 函数  $f(x)$  连续, 若  $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$  则称点  $x_0$  为函数  $f(x)$  的角点, 函数在角点不可导.

如:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$



在  $x = 0$  处不可导,  $x = 0$  为  $f(x)$  的角点.

(2) 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 但

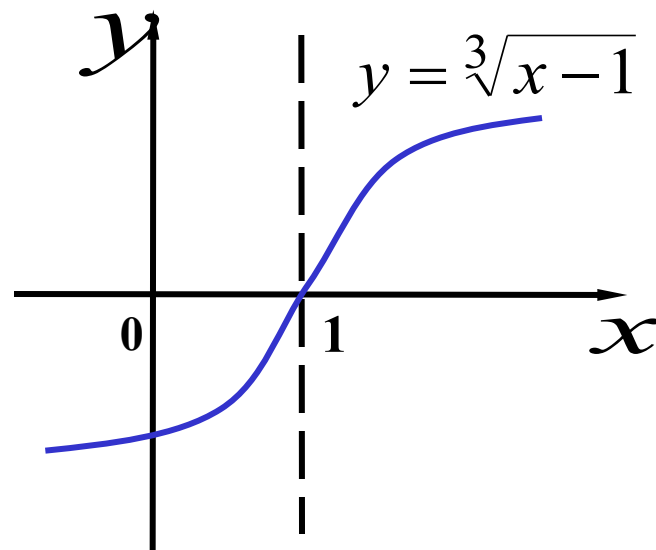
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty,$$

称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  有无穷导数.(不可导)

如:

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1},$$

在  $x=1$  处不可导.

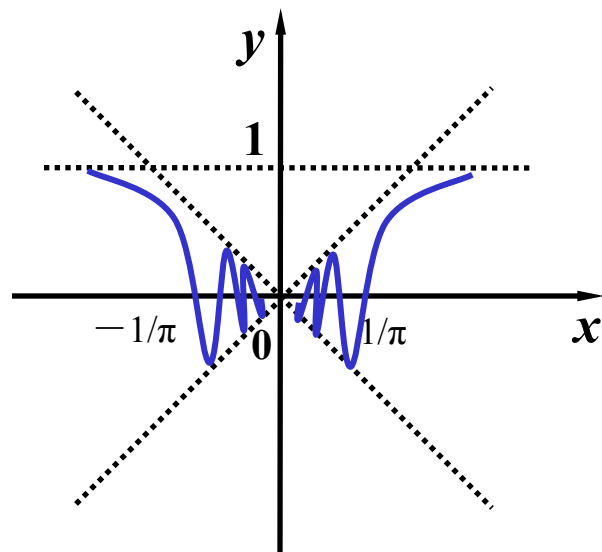


(3) 函数  $f(x)$  在连续点的左右导数都不存在 (指摆动不定), 则  $x_0$  点不可导.

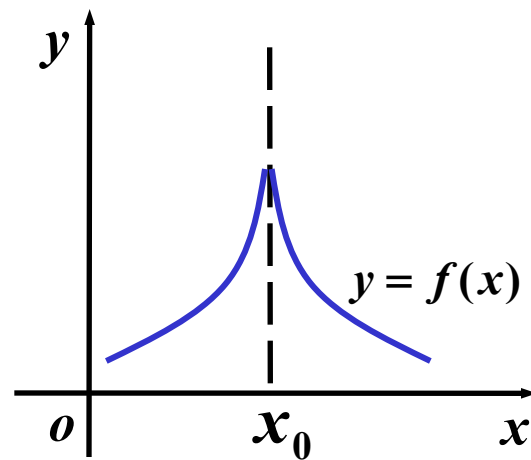
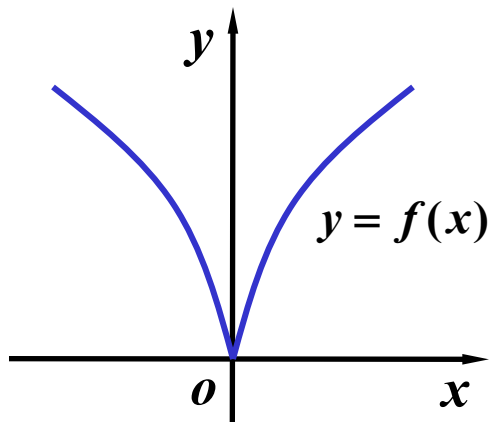
如:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在  $x=0$  处不可导.



(4) 若  $f'(x_0) = \infty$ , 且在点  $x_0$  的两个单侧导数符号相反, 则称点  $x_0$  为函数  $f(x)$  的尖点 (不可导点).



例9 讨论函数  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ,

在  $x = 0$  处的连续性与可导性.

解  $\because \sin \frac{1}{x}$  是有界函数,  $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

$\because f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \therefore f(x)$  在  $x = 0$  处连续.

但在  $x = 0$  处有  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(0 + \Delta x) \sin \frac{1}{0 + \Delta x} - 0}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}$

当  $\Delta x \rightarrow 0$  时,  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  在  $-1$  和  $1$  之间振荡而极限不存在.

$\therefore f(x)$  在  $x = 0$  处不可导.

## 2.1.5 小结与思考题

1. 导数的实质：增量比的极限；
2.  $f'(x_0) = a \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = a$ ;
3. 导数的几何意义：切线的斜率；
4. 函数可导一定连续，但连续不一定可导；
5. 求导数最基本的方法：由定义求导数；

6. 判断可导性  $\left\{ \begin{array}{l} \text{不连续, 一定不可导.} \\ \text{连续} \left\{ \begin{array}{l} \text{直接用定义;} \\ \text{看左右导数是否存在且相等.} \end{array} \right. \end{array} \right.$

## 思考题

幂函数在其定义域内 ( ).

(1) 可导; (2) 不可导; (3) 不确定。

## 思考题解答

正确地选择是 (3)

例  $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \quad x \in (-\infty, +\infty)$

在  $x = 0$  处不可导, (1) ×

$$f(x) = x^2 \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

在定义域内处处可导, (2) ×

## 课堂练习题

### 一、 填空题:

- 1、 设  $f(x)$  在  $x = x_0$  处可导, 即  $f'(x_0)$  存在, 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- 2、 已知物体的运动规律为  $s = t^3$  (米), 则该物体在  $t = 1$  秒时的速度为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

- 3、 设  $f(x) = x^2$ , 则  $f[f'(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$ ;  $f'[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

- 4、 曲线  $y = e^x$  在点  $(1, e)$  处的切线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

二、 在下列各题中均假定  $f'(x_0)$  存在, 按照导数的定义观察下列极限, 分析并指出  $A$  表示什么?

1、  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h)}{h} = A$ , 其中  $f(x_0) = 0$ ;

2、  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = A$ .

三、 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax - b, & x > 1 \end{cases}$ , 为了使函数  $f(x)$  在  $x = 1$  处连续且可导, 问  $a, b$  应取什么值?

四、 已知  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ , 求  $f'(x)$ .

## 课堂练习题答案

一、 1、  $2f'(x_0)$ ,  $-f'(x_0)$ ;      2、 3 米/秒;

3、  $4x^2$ ,  $2x^2$ ;      4、  $y = ex$ .

二、 1、  $-2f'(x_0)$ ;      2、  $2f'(x_0)$ .

三、  $a = 2, b = 1$ .

四、  $f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ .