第一章 函数与极限

第五节： 函数的连续性及其相关性质

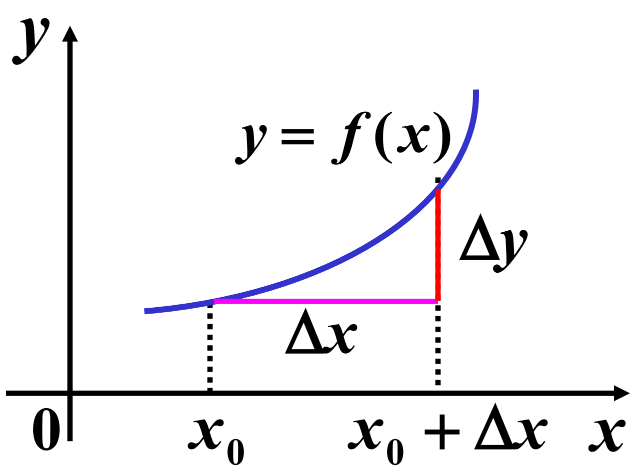
1.5.1 连续函数的概念

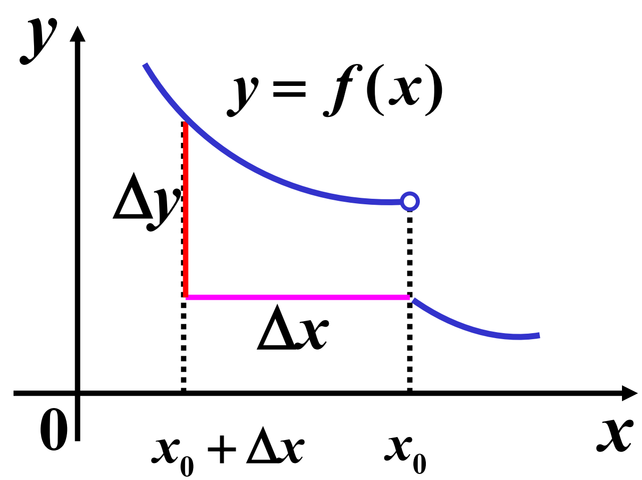
1. 函数的增量

设函数 $f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义, $\forall\, x \in U_\delta(x_0)$,

$\Delta x = x - x_0$, 称为自变量在点 x_0的增量.

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$,称为$f(x)$相应于Δx的增量.





2. 连续的定义

设函数$f(x)$在$U_{\delta}(x_0)$内有定义, 若当自变量的增量Δx趋向于零时, 对应的函数的增量Δy也趋向于零, 即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \quad 或 \quad \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数$f(x)$在点x_0连续, x_0称为$f(x)$的连续点.

设 $x=x_0+\Delta x$, $\qquad \Delta y=f(x)-f(x_0)$,

$\Delta x\to 0$ 即 $x\to x_0$, $\qquad \Delta y\to 0$ 即 $f(x)\to f(x_0)$.

设函数$f(x)$在$U_\delta(x_0)$内有定义, 若函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限存在, 且等于它在点x_0处的函数值$f(x_0)$, 即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数$f(x)$在点x_0连续.

"$\varepsilon - \delta$" 语言:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当$|x - x_0| < \delta$时,
恒有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

例1 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在$x=0$处连续.

证 $\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0,$

又 $f(0)=0,\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0),$

由连续定义可知:

函数 $f(x)$在$x=0$处连续.

3. 单侧连续

若函数$f(x)$在$(a, x_0]$内有定义，且$f(x_0 - 0) = f(x_0)$，则称$f(x)$在点x_0处<u>左连续</u>；

若函数$f(x)$在$[x_0, b)$内有定义，且$f(x_0 + 0) = f(x_0)$，则称$f(x)$在点x_0处<u>右连续</u>.

定理 1 函数 $f(x)$在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续 .

例2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x+2) \quad =2= f(0),$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x-2) \quad =-2\neq f(0),$

右连续但不左连续 ,

故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

4. 连续函数与连续区间

在开区间内每点都连续的函数叫做在该区间上的连续函数, 或者说，函数在该区间上连续.

如果函数在开区间 (a,b)上连续, 并且在左端点 $x=a$处右连续，在右端点 $x=b$处左连续, 则称函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

如：多项式函数在区间 $(-\infty,+\infty)$内是连续的.

例3 证明函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

$$\because\left|\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right|\le 1,\qquad 故\ |\Delta y|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<|\Delta x|,$$

$\therefore$ 当 $\Delta x\to 0$ 时, $\Delta y\to 0$.

即函数 $y=\sin x$ 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都是连续的.

1.5.2 函数的间断点

函数 $f(x)$在点 x_0处连续必须满足的三个 条件:

(1) $f(x)$在点x_0处有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

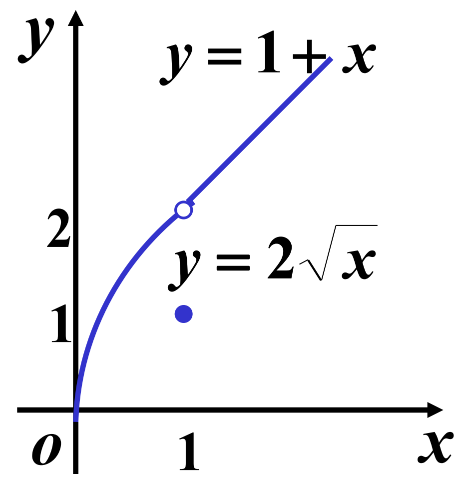
如果上述三个条件中只 要有一个不满足, 则称函数 $f(x)$在点 x_0处不连续 (或间断), 并称点 x_0为 $f(x)$的不连续点(或间断点).

1. 可去间断点 若 $f(x)$在点 x_0处的极限存在，但 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，或 $f(x)$在点 x_0处无定义，则称点 x_0为$f(x)$的可去(补)间断点.

例5 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1 \\ 1 + x, & x > 1, \end{cases}$$

在$x = 1$处的连续性.



解 $\because f(1)=1,\quad f(1-0)=2,\quad f(1+0)=2,$

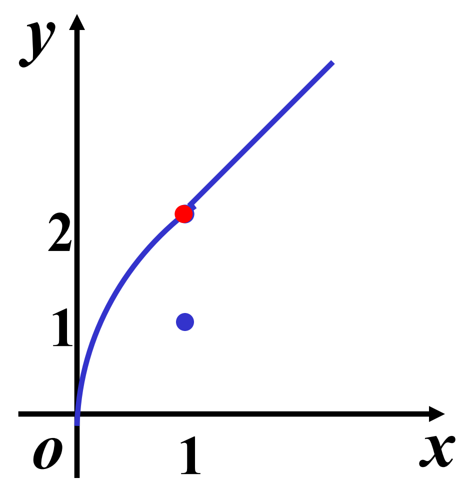
$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2\neq f(1),\ \therefore x=1$为函数的可去间断点.

注意: 可去间断点只要改变或补充间断处函数定义, 则可使其变为连续点.

如:例5中, 令 $f(1)=2$,

则 $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\le x<1, \\ 1+x, & x\ge 1, \end{cases}$

在$x=1$处连续.



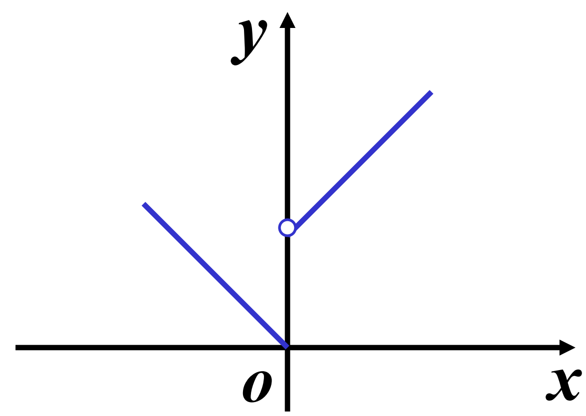
2. 跳跃间断点 若 $f(x)$在点 x_0处左，右极限都存在，但$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$的跳跃间断点.

例4 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\leq 0,\\ 1+x, & x>0,\end{cases}$ 在$x=0$处的连续性.

解 $f(0-0)=0,\quad f(0+0)=1,$

$\because f(0-0)\neq f(0+0),$

$\therefore x=0$为函数的跳跃间断点.

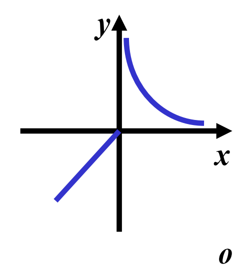


可去型与跳跃型间断点统称为第一类间断点.

特点: 函数在点x_0处的左、右极限都存在.

3.第二类间断点 若$f(x)$在点x_0处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点x_0为函数$f(x)$的第二类间断点(即非第一类间断点).

例6 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x, & x\le 0,\end{cases}$ 在$x=0$处的连续性.



解 $f(0-0)=0,\quad f(0+0)=+\infty,$

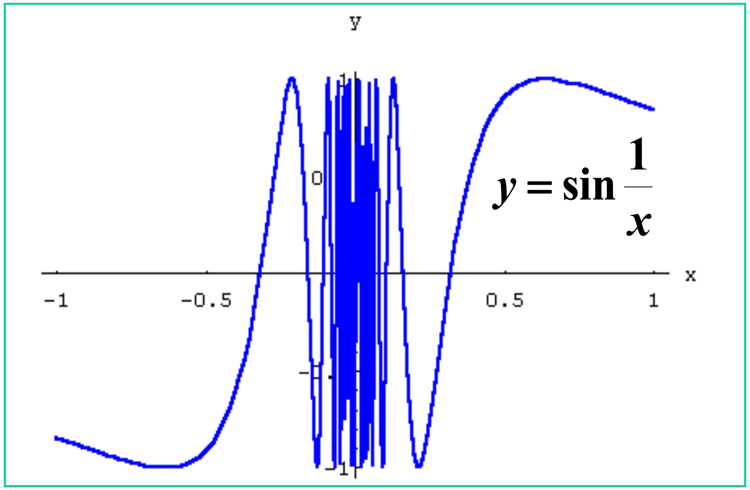
$\therefore x=0$ 称为第二类间断点：**无穷型间断点.**

例7 讨论函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\because$ 在 $x=0$ 处没有定义，

且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

$\therefore x=0$ 为第二类间断点.



这种情况称为**振荡型间断点.**

注意: 不要以为函数的间断点只是个别的几个点.

★ 狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当}x\text{是有理数时}, \\ 0, & \text{当}x\text{是无理数时}, \end{cases}$$

在定义域R内每一点处都间断,且都是第二类间断点.

★

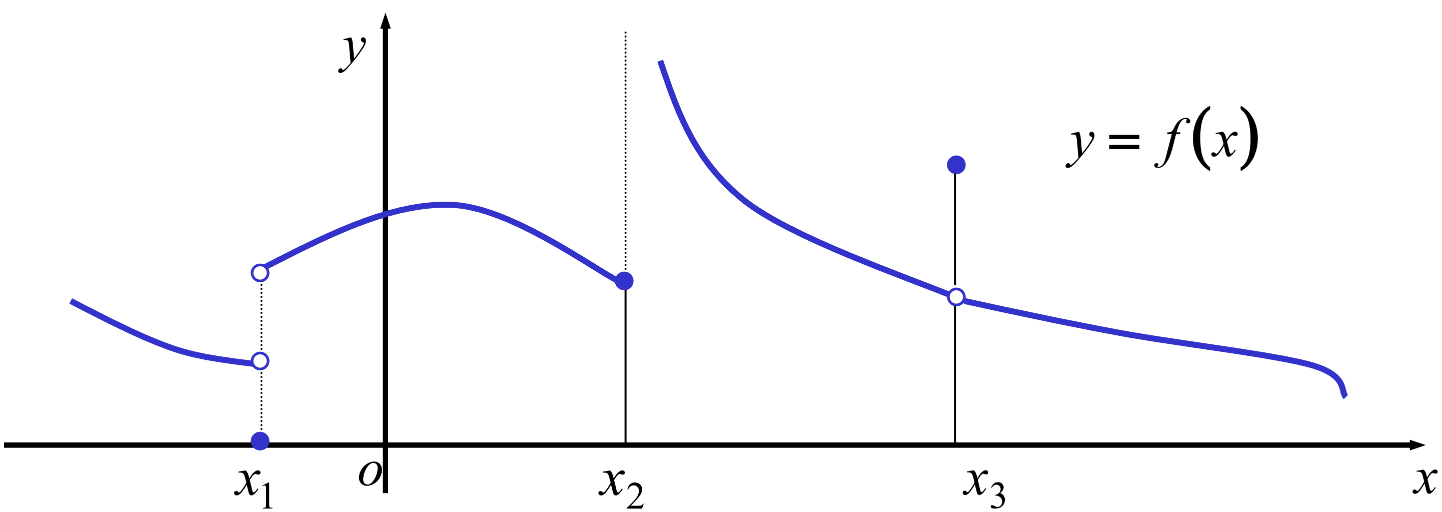
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{当}x\text{是有理数时}, \\ -x, & \text{当}x\text{是无理数时}, \end{cases}$$

仅在x=0处连续，其余各点处处间断.

★ $$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{是有理数时},\\ -1, & \text{当}x\text{是无理数时},\end{cases}$$

在定义域 R 内每一点处都间断，但其绝对值处处连续.

判断下列间断点类型:



例8 当a取何值时，

函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\geq 0,\end{cases}$ 在 $x=0$处连续.

解 $\because f(0)=a,\quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\cos x \;=1,$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(a+x) \;=a,$

要使 $f(0-0)=f(0+0)=f(0), \Rightarrow a=1,$

故当且仅当 $a=1$时，函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.

1.5.6 小结与思考题

1.函数在一点连续必须满足的三个条件;

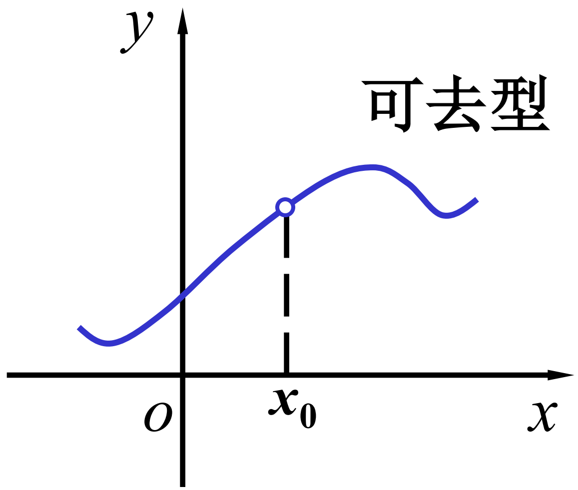
2.区间上的连续函数;

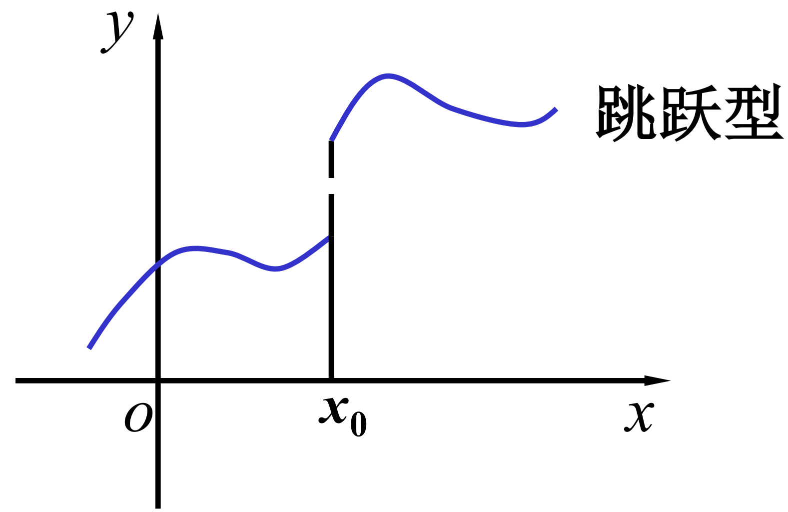
3.间断点的分类与判别;

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点为:可去型,跳跃型.}\\ \text{第二类间断点含:无穷型,振荡型.}\end{cases}$$

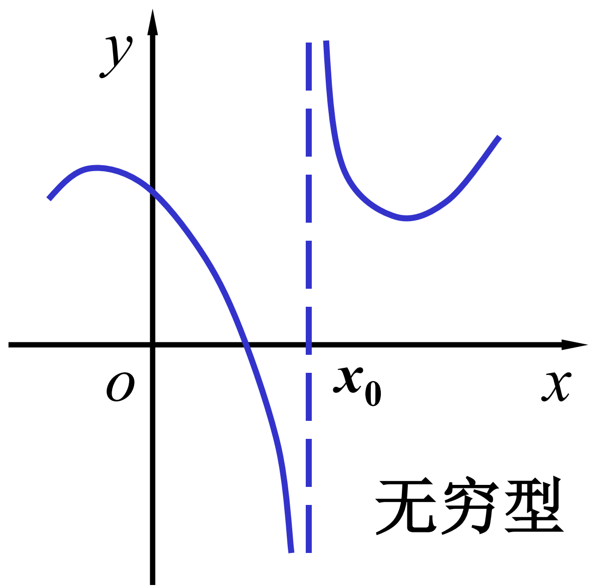
(见下图)

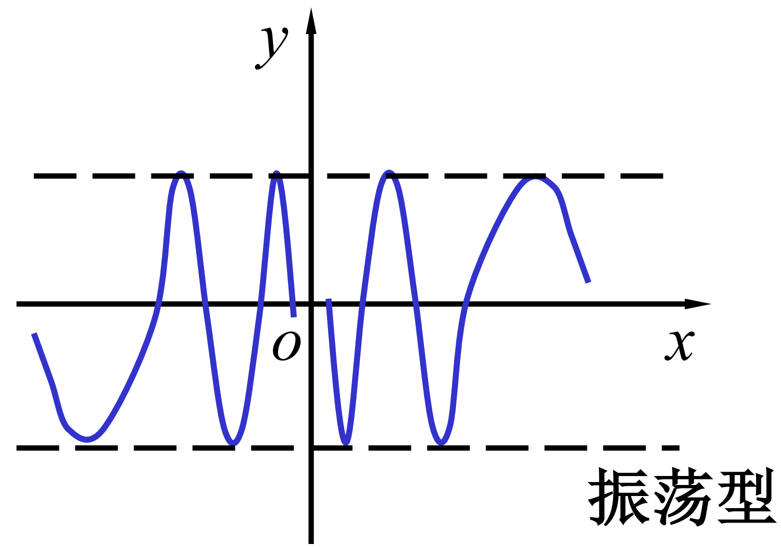
第一类间断点





第二类间断点





思考题

若$f(x)$在x_0连续，则 $|f(x)|$，$f^2(x)$在x_0是否连续？又若$|f(x)|$，$f^2(x)$在x_0连续，$f(x)$在x_0是否连续？

思考题解答

$\because f(x)$在x_0连续， $\quad \therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

且 $0\le \big||f(x)|-|f(x_0)|\big| \le |f(x)-f(x_0)|$

$$\therefore \lim_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$$

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x)=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]=f^2(x_0)$$

故$|f(x)|$、$f^2(x)$在x_0都连续.

但反之不一定成立.

例: $f(x)=\begin{cases}-1, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 在$x_0=0$不连续

但$|f(x)|$、$f^2(x)$在$x_0=0$连续

课堂练习题

一、 填空题：

1、 指出函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 在点 $x=1$ 是____型间断点；在点 $x=2$ 是____型间断点 .

2、 指出函数 $y=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$ 在点 $x=0$ 是____型间断点; 在点 $x=1$ 是____型间断点; 在点 $x=-1$ 是____型间断点 .

二、 指出函数 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$， $x\in\mathbf{R}$ 的间断点，并说明间断点的类型. 如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续.

三、试确定 a,b 的值，使函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-b}{(x-a)(x-1)}$，

（1）有无穷间断点 $x=0$；

（2）有可去间断点 $x=1$；

（3）有无穷间断点 $x=0$ 和可去间断点 $x=1$.

课堂练习题答案

一、1、可去，无穷；　2、跳跃，可去，无穷.

二、$x=0, x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 为可去间断点，　$x=k\pi(k\neq 0)$

为第二类无穷间断点.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, x\neq k\pi, k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ 0, \quad x=k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ 1, \quad x=0\end{cases} \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

三、(1)　$a=0, b\neq 1$;　(2)　$a\neq 1, b=\mathrm{e}$;　(3)　$a=0, b=\mathrm{e}$.

1.5.3 连续函数的性质

定义： 对于在区间I上有定义的函数 $f(x)$，如果有$x_0 \in I$，使得对于任一 $x \in I$都有

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0))$$

则称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$在区间I上的最大(小)值.

如，$y = 1 + \sin x$，在$[0,2\pi]$上，$y_{\max} = 2$，$y_{\min} = 0$;

性质1（最值原理）在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

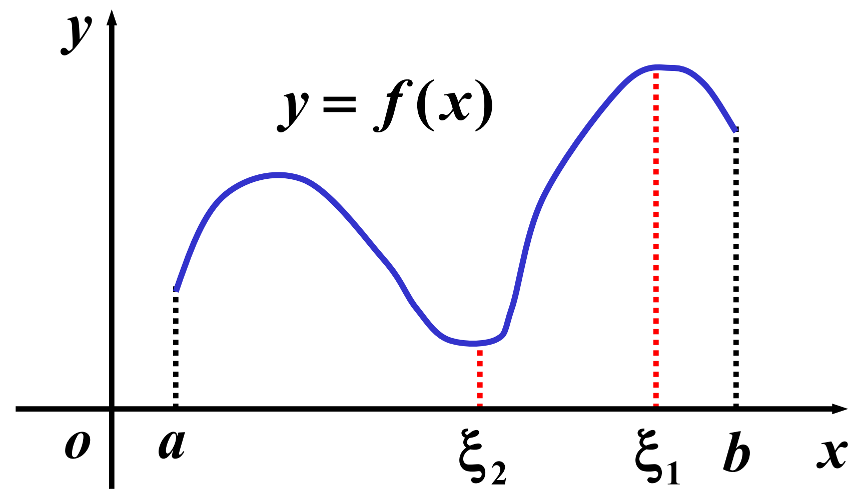
若 $f(x) \in C[a,b]$,

则 $\exists\, \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$,

使得 $\forall\, x \in [a,b]$,

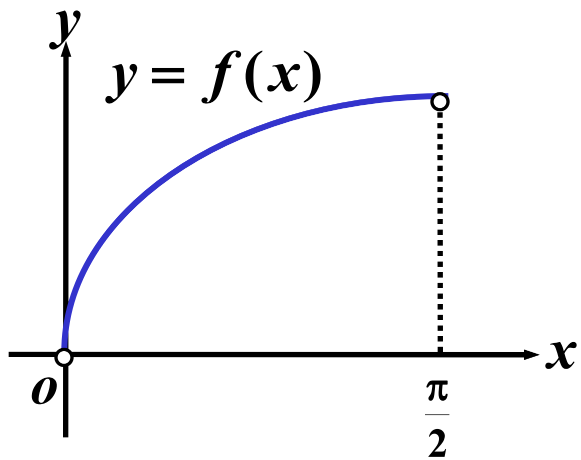
有 $f(\xi_1) \geq f(x)$,

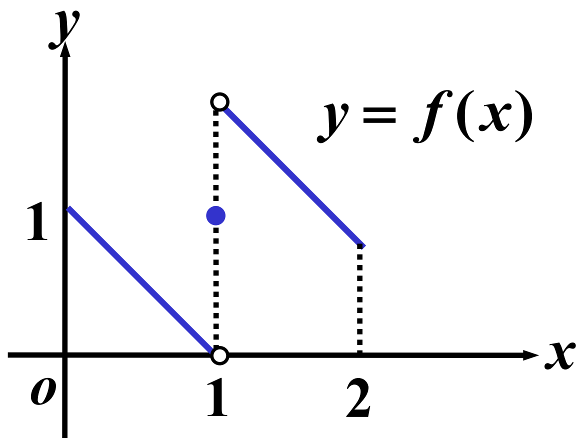
$f(\xi_2) \leq f(x)$.



注意: **1. 若区间是开区间, 定理不一定成立;**

2. 若区间内有间断点, 定理不一定成立.





性质2（有界原理） 闭区间上的连续函数必在该区间上有界.

证 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续， $\forall x \in [a,b]$,

有 $m \le f(x) \le M$， 取 $K = \max\{|m|,|M|\}$,

则有 $|f(x)| \le K$. $\therefore$ 函数$f(x)$在$[a,b]$上有界.

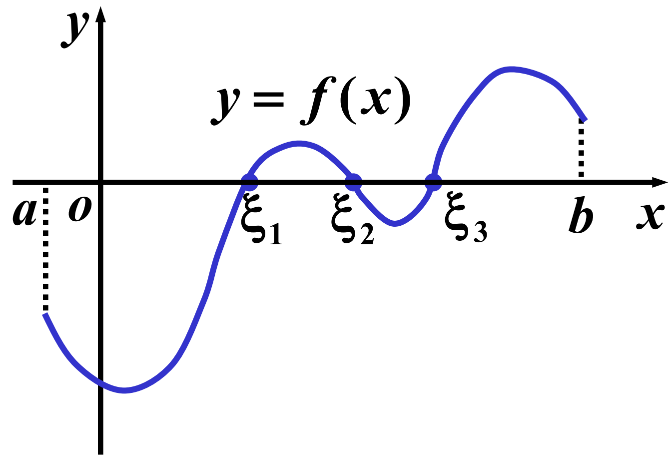
使 $f(x_0)=0$ 的 x_0 称为 $f(x)$ 的零点.

性质 3（零点原理） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b)<0$），那么在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使 $f(\xi)=0$.

即方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少存在一个实根 .

几何解释： **连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点**

位于x轴的不同侧，则曲线弧与x轴至少有一个交点.



性质 4（介值原理） 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \text{ 及 } f(b)=B,$$

那么，对于A与B之间的任意一个数C，在开区间(a,b)内至少有一点ξ，使得$f(\xi)=C \quad (a<\xi<b)$.

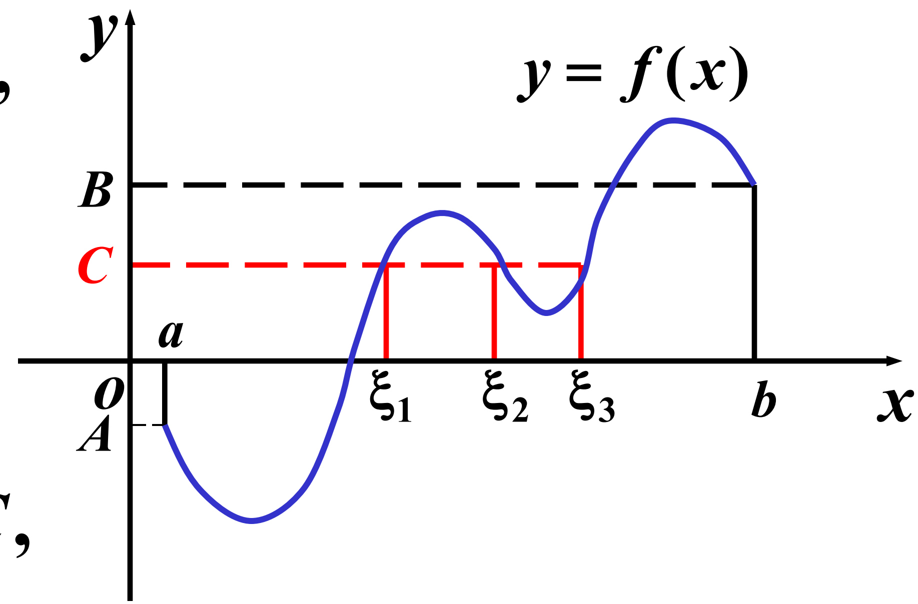
证 设$\varphi(x) = f(x) - C$,

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续,

且$\varphi(a) = f(a) - C$

$= A - C$,

$\varphi(b) = f(b) - C = B - C$,



$\therefore \varphi(a) \cdot \varphi(b) < 0$. 由零点定理, $\exists \xi \in (a,b)$,使

$\varphi(\xi) = 0$, 即 $\varphi(\xi) = f(\xi) - C = 0$, $\therefore f(\xi) = C$.

几何解释: 连续曲线弧 $y = f(x)$与水平直线 $y = C$至少有一个交点.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值与最小值之间的任何值。

例9 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一根.

证 令 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

又 $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -2 < 0$, 由零点定理,

$\exists \xi \in (0,1)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即 $\xi^3 - 4\xi^2 + 1 = 0$,

$\therefore$ 方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一根 ξ.

例10 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(a)<a$，$f(b)>b$. 证明$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证 令 $F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$[a,b]$上连续，

而 $F(a)=f(a)-a<0$，

$F(b)=f(b)-b>0$， 由零点定理，

$\exists\xi\in(a,b)$， 使 $F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$，

即 $f(\xi)=\xi$.

1.5.4 初等函数的连续性

1、连续函数的四则运算

定理3 若函数$f(x)$, $g(x)$在点x_0处连续,

则$f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$

在点x_0处也连续.

如: $\sin x, \cos x$在$(-\infty,+\infty)$内连续,

故$\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$在其定义域内连续.

2、反函数与复合函数的连续性

定理4　严格单调的连续函数必有严格同单调的连续反函数.

如: $y=\sin x$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上单调增加且连续,

故 $y=\arcsin x$ 在$[-1,1]$上也是单调增加且连续.

同理 $y=\arccos x$ 在$[-1,1]$上单调减少且连续;

$y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$在 $[-\infty,+\infty]$上单调 且连续.

反三角函数在其定义域内皆连续.

定理 5 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, 函数 $f(u)$在点a连续,

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a} f(u)=f(a)=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.

证 $\because f(u)$在点 $u=a$连续,

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta>0$, 使当 $|u-a|<\eta$时,

恒有$|f(u)-f(a)|<\varepsilon$成立.

又 $\because \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,

对于$\eta>0$, $\exists\delta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$时,

恒有$|\varphi(x)-a| = |u-a| < \eta$成立.

将上两步合起来:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,$ 使当$0 < |x - x_0| < \delta$时,

$|f(u) - f(a)| = |f[\varphi(x)] - f(a)| < \varepsilon$ 成立.

$$\therefore \lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f(a) = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)].$$

$$f(a) = \lim_{u \to a} f(u)$$

意义： 1. 极限符号可以与函数符号互换;

2. 求极限可用变量代换 $(u=\varphi(x))$ 的理论依据;

例11 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\ln[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln e=1.$$

例12 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解 令 $e^x-1=y$, 则 $x=\ln(1+y)$,

当 $x\to 0$ 时, $y\to 0$.

$$原式=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}=1.$$

同理可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

定理 6 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续.

注意：定理6是定理5的特殊情况.

如： $u=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续，

$y=\sin u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，

$\therefore\ y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续.

3、基本初等函数的连续性

★ 三角函数,反三角函数在其定义域内连续.

★ 指数函数 $y=a^x \quad (a>0,\ a\neq 1)$

在$(-\infty,+\infty)$内单调且连续;

★ 对数函数 $y=\log_a x \quad (a>0,\ a\neq 1)$

在$(0,+\infty)$内单调且连续;

★ $y=x^\mu \ =a^{\mu\log_a x} \longrightarrow y=a^u,\quad u=\mu\log_a x.$

在$(0,+\infty)$内连续, 讨论μ不同值.

定理7　基本初等函数在其定义域内连续.

定理8　初等函数在其定义区间内连续.

定义区间是指包含在定义域内的区间.

注意: 1. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续.

2. 初等函数求极限的方法代入法.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (x_0 \in \text{定义区间})}$$

如, $y=\sqrt{\cos x-1}$, $D: x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$

这些孤立点的邻域内没有定义.

$y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$, $D: x=0$, 及$x\geq 1$,

在0点的邻域内没有定义.

函数在区间$[1,+\infty)$上连续.

例13 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\sin\sqrt{e^x-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to1}\sin\sqrt{e^x-1}=\sin\sqrt{e^1-1}=\sin\sqrt{e-1}$.

例14 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{0}{2}=0.$$

1.5.5 双曲函数

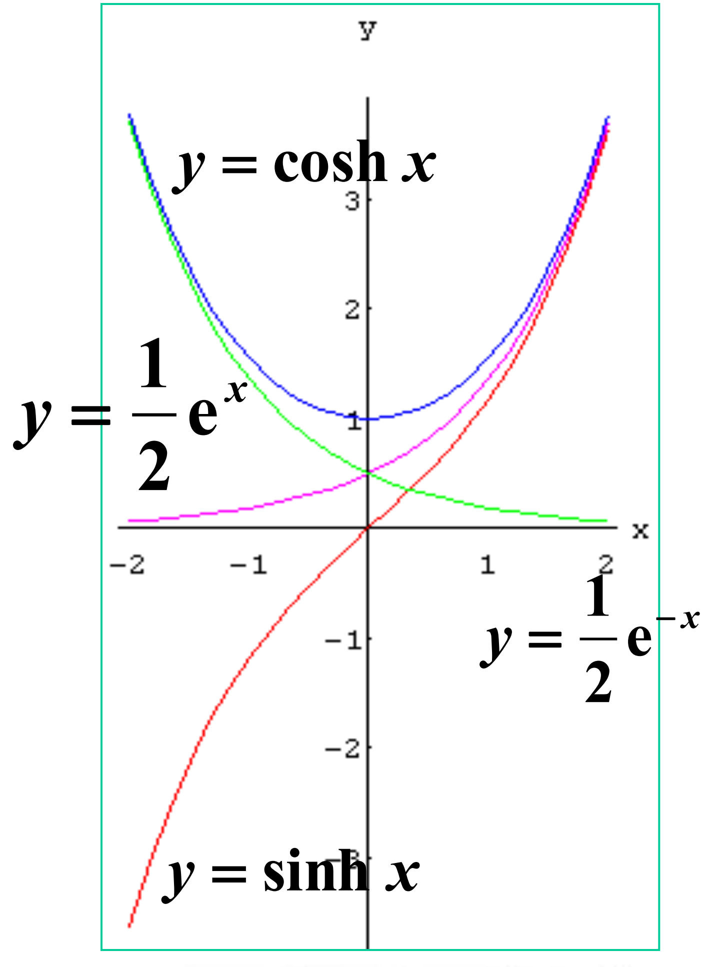
1. 双曲函数

双曲正弦 $\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

$D:(-\infty,+\infty)$,　奇函数.

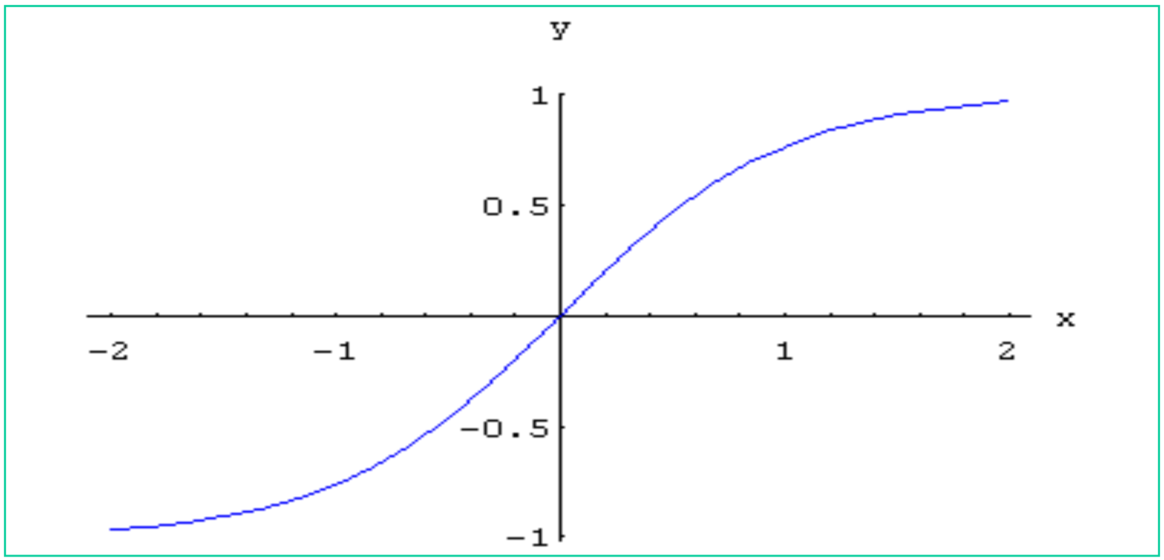
双曲余弦 $\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

$D:(-\infty,+\infty)$,　偶函数.



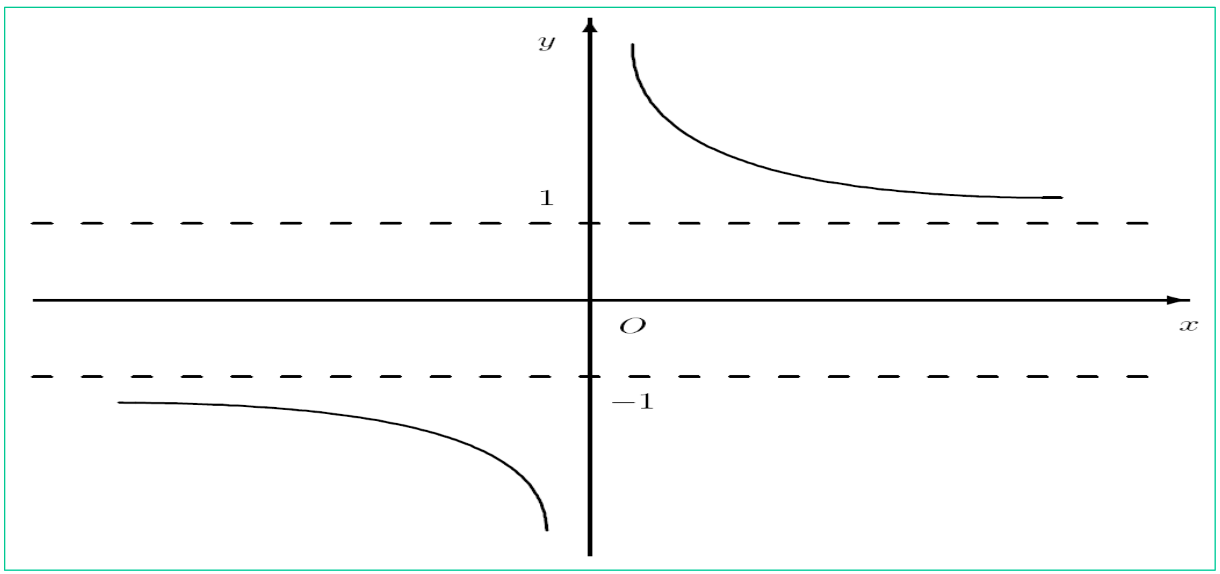
$$\text{双曲正切}\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$D:(-\infty,+\infty)$ 奇函数, 有界函数,



双曲余切 $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$D:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，奇函数，无界函数，



双曲函数常用公式

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y;$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y;$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x;$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

2. 反双曲函数

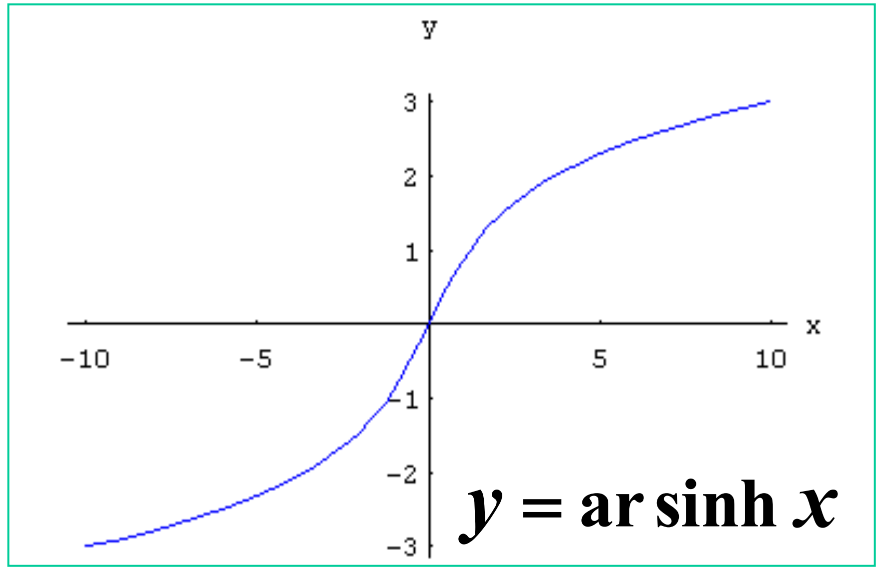
反双曲正弦 $y = \operatorname{arcsinh} x$

$$y = \operatorname{arcsinh} x$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$D: (-\infty, +\infty)$

奇函数,



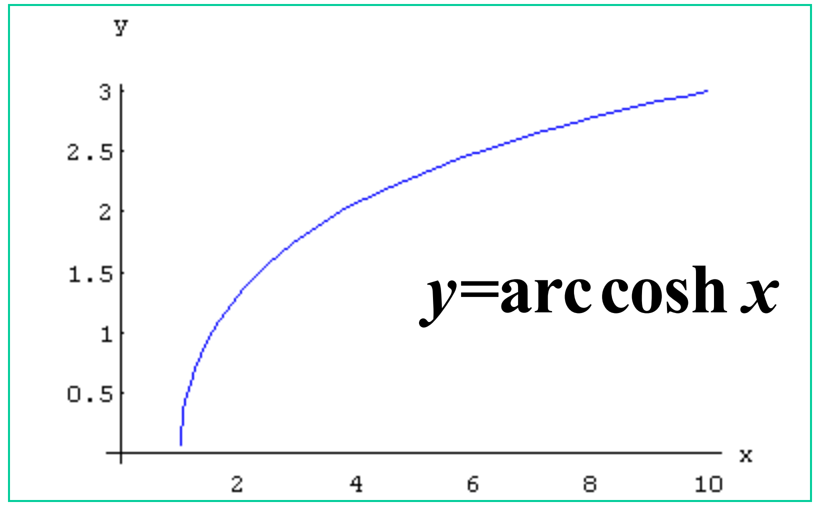
在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

反双曲余弦 $y = \operatorname{arccosh} x$

$$y = \operatorname{arccosh} x$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$D: [1, +\infty)$$

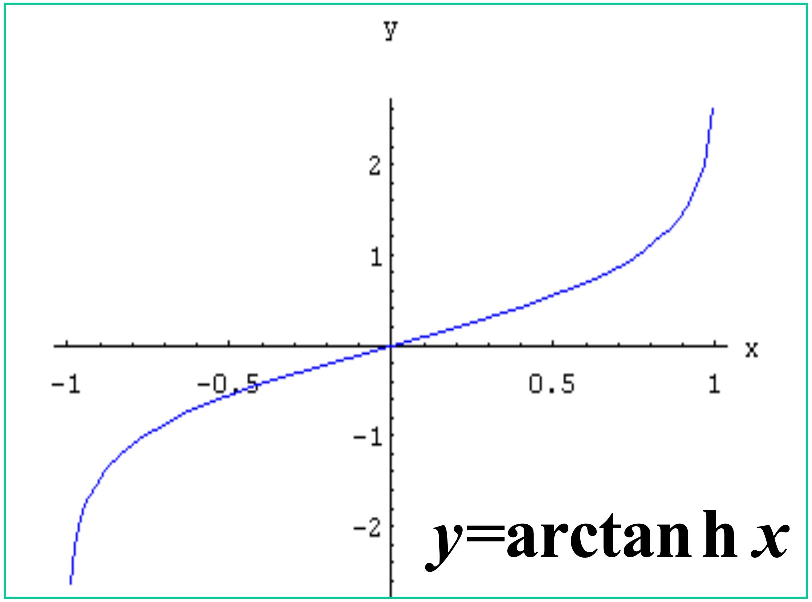


在 $[1, +\infty)$ 内单调增加.

反双曲正切 $y = \operatorname{arctan h} x$

$$y = \operatorname{arc tanh} x$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$



$D:(-1,1)$

奇函数,

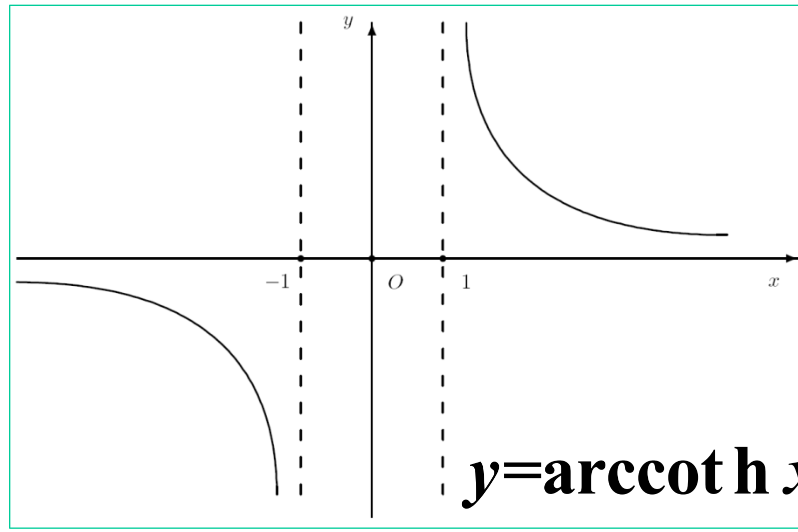
在 $(-1,1)$ 内单调增加.

反双曲余切 $y = \operatorname{arccot h} x$

$$y = \operatorname{arccoth} x$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}.$$

$D:(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$



奇函数,

在 $(-1,1)$ 内单调增加.

1.5.6　小结与思考题

1、四个定理

最值定理;有界性定理; 零点定理; 介值定理.

注意: (1) 闭区间；(2) 连续性．(两点必满足)

2、解题思路

(1) **直接法：**先用最值定理，再用介值定理;

(2) **辅助函数法：**先作辅助函数,再用零点定理。

3、连续函数的运算

连续函数的四则运算；反函数的连续性；复合函数的连续性 .

两个定理（5, 6）; 两点意义.

初等函数的连续性：

定义区间与定义域的区别;

求极限的又一种方法：代入法 .

思考题

下述命题是否正确？

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内必有零点.

思考题解答

不正确.

例函数 $f(x)=\begin{cases} e, & 0<x\le 1 \\ -2, & x=0 \end{cases}$

$f(x)$在$(0,1)$内连续, $f(0)\cdot f(1)=-2e<0.$

但$f(x)$在$(0,1)$内无零点.

课堂练习题

一、 填空题：

1、$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+3x+4}=$____；2、$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\tan^2 x}=$____；

3、函数 $f(x)=\dfrac{x^4+x+1}{x^2+x-6}$ 的连续性区间为____________；

4、设 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1\,; \\ |x-1|, & |x|>1,\end{cases}$ 确定

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=$____________；$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}f(x)=$____________.

二、设 $f(x)=\begin{cases} a+x^2, & x<0; \\ 1, & x=0; \\ \ln(b+x+x^2), & x>0, \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处

连续，试确定 a 和 b 的值.

三、 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $f(0)=0$，

若 $|g(x)|\le|f(x)|$，证明函数 $g(x)$ 在点 $x=0$

处连续.

四、 证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0, b>0$，至少有

一个正根，并且它不超过 $a+b$.

五、若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，

$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 则在 $[x_1, x_n]$上必有

ξ,使 $$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

六、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， $a < c < d < b$,试证：

对任意正数p和q至少有一点 $\xi \in [c, d]$, 使

$$pf(c) + qf(d) = (p+q)f(\xi).$$

课堂练习题答案

一、1、2；　2、0；　3、$(-\infty,-3),(-3,2),(2,+\infty)$；

4、$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，　$\dfrac{5}{2}$　.

二、$a=1,\quad b=\mathrm{e}$.