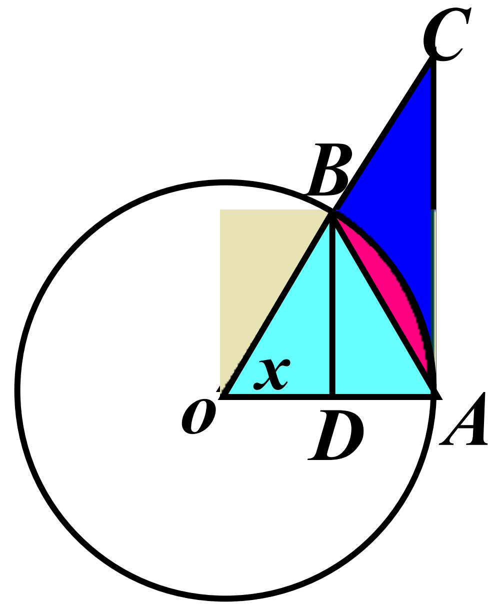
第一章 函数与极限

第四节： 两个重要极限及无穷小的比较

1　两个重要极限

1、 $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$



设单位圆 O, 圆心角$\angle AOB = x$,

$(0 < x < \dfrac{\pi}{2})$,作单位圆的切线，得ΔACO.

扇形OAB的圆心角为x, ΔOAB的高为BD,

于是$\sin x = BD$, $x =$ 弧AB, $\tan x = AC$,

$\therefore \sin x < x < \tan x,$ 即 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1,$

上式对于 $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立.

即，当 $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1.$

根据夹逼准则：

$$\boxed{\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

例17 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

例18 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan kx}{x}$.

解 原式 $=k\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos kx}\bullet\dfrac{\sin kx}{kx}=k.$

例19 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}2nR\sin\dfrac{\pi}{n}$.

解 原式 $=2\pi R\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=2\pi R.$

2、 $$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}}$$

（1） 证明 $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}.$

当 $x \geq 1$时， 有 $[x] \leq x < [x]+1,$

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1},$$

而 $$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1} = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]} \cdot \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]}) = \mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}\cdot\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1}$$

$$=\mathrm{e},$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}.$$

（2） 证明 $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}.$

设 $x=-t$，则

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})=\mathrm{e}.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}$$

综上可得：$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}}$

例20　证明极限：$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}}$

证　设 $x=t^{-1}$，则

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{t}=\mathrm{e}.$$

例21　求极限 $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}$.

解　原式 $=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{-x})^{-x}}$

$$=\mathrm{e}^{-1}.$$

例22 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{2+x}\right)^{2x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^2\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{-4}$

$=\mathrm{e}^2$.

2　无穷小的比较

1、无穷小：极限为零的变量称之.

若$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$(或$X > 0$)，当$0 < |x - x_0| < \delta$(或$|x| > X$)时，均有$|f(x)| < \varepsilon$成立，则称函数$f(x)$当 $x \to x_0$（或$x \to \infty$）时为无穷小，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad (\text{或} \lim_{x \to \infty} f(x) = 0).$$

比如： $\because \lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0,$

$\therefore$ 函数 $\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小.

又如： $\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0,$

$\therefore$ 函数 $\frac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

注意：

1. 无穷小是变量,不能与很小的数混淆;

2. 零是可以作为无穷小的唯一的常数.

2、无穷小与函数极限的关系:

定理 6 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$

其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小.

证 必要性 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,$ 令 $\alpha(x)=f(x)-A,$

则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,$ $\therefore f(x)=A+\alpha(x).$

充分性 设 $f(x)=A+\alpha(x),$

其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小,

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(A+\alpha(x))=A+\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=A.$

意义： 1. 将一般极限问题转化为无穷小问题;

2.给出了函数$f(x)$在x_0附近的近似表达式

$f(x) \approx A$,误差为$\alpha(x)$.

3、无穷小的运算性质:

性质1 有限个无穷小的代数和是无穷小.

证 设α及β是当$x \to \infty$时的两个无穷小,

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时，有

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\beta| < \frac{\varepsilon}{2},$$ 即

$$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$\therefore \alpha \pm \beta \to 0 \ (x \to \infty)$$

注意： 无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

性质 2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证　设函数u在$\overset{o}{U}(x_0, \delta_1)$内有界，则$\exists M > 0$,

使得当$0<|x-x_0|<\delta_1$时恒有$|u|\le M$.

又设α是当$x\to x_0$时的无穷小,

$\therefore \forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0,$使得当$0<|x-x_0|<\delta_2$时

恒有$|\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有

$|u\cdot\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,\quad \therefore u\cdot\alpha$为无穷小.

推论1　有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论2　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3　有限个无穷小的乘积也是无穷小.

如,当$x \to 0$时, $x\sin\frac{1}{x}$, $x^2\arctan\frac{1}{x}$ 都是无穷小

4、无穷大：绝对值无限增大的变量称之.

若$\forall M>0$, $\exists \delta>0$(或$X>0$), 当$0<|x-x_0|<\delta$ (或$|x|>X$) 时，均有$|f(x)|>M$ 成立，则称函数$f(x)$当 $x\to x_0$（或$x\to\infty$）时为无穷大，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \quad (\text{或}\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty).$$

特殊情形：正无穷大，负无穷大.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty \quad (\text{或} \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty)$$

注意：

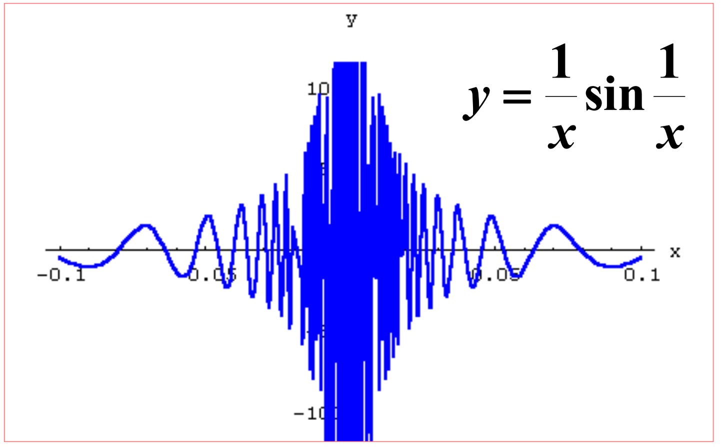
1. 无穷大是变量,不能与很大的数混淆.

2. 切勿将 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 认为是极限存在.

3. 无穷大是一种特殊的无界变量，但无界变量未必是无穷大.

例23 证明：当 $x \to 0$ 时，函数 $y = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

无界，但非无穷大.



证 (1) 取 $\left\{x_k = \frac{1}{2k\pi + \pi/2}\right\}$

有 $x_k \to 0 \ (k \to \infty)$,

而 $y(x_k) = 2k\pi + \pi/2 \to \infty$. 无界.

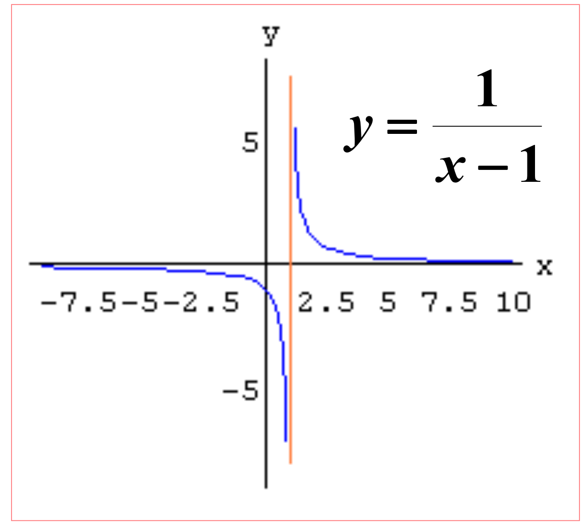
(2) 取 $\left\{x_k = \frac{1}{2k\pi}\right\}$, $x_k \to 0(k \to \infty)$,

但 $y(x_k) = 2k\pi\sin 2k\pi = 0$. 非无穷大.

例24 **证明** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$

证 $\forall M>0$. 要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$,

只要 $|x-1|<\dfrac{1}{M}$, 取 $\delta=\dfrac{1}{M}$,



当 $0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$时, 就有 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$. $\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, **称直线** $x=x_0$**为函数** $y=f(x)$

铅直渐近线

5、无穷小与无穷大的关系

定理7　无穷大的倒数为非零无穷小；

非零无穷小的倒数为无穷大.

证　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty.$

$\therefore \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0,$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

恒有 $|f(x)|>\dfrac{1}{\varepsilon}$, 即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon.$

$\therefore$ 当 $x\to x_0$ 时, $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

反之,设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$,且 $f(x) \neq 0$.

$\therefore \forall M > 0, \exists \delta > 0$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

恒有 $|f(x)| < \dfrac{1}{M}$,由于 $f(x) \neq 0$,从而 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| > M$.

$\therefore$ 当 $x \to x_0$ 时,$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

意义: 关于无穷大的讨论,都可归结为关于无穷小的讨论.

6、无穷小的比较

如：当$x\to 0$时，$x, x^2, \sin x, x^2\sin\frac{1}{x}$都是无穷小.

观察各极限

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0,$ x^2比$3x$要快得多；

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$ $\sin x$与x大致相同；

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在. **不可比.**

极限不同，趋向于零的“快慢”程度也不同.

设α,β是同一过程中的两个无穷小,且$\alpha \neq 0$.

(1) 若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$,则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小,

记作 $\beta = o(\alpha)$;

(2) 若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C(C \neq 0)$,则$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小,

记作 $\beta = O(\alpha)$;

特殊地,若$C = 1$,则称β与α是等价的无穷小,

记作$\alpha \sim \beta$;

(3) 若$\beta = O(\alpha^k),(k > 0)$,则$\beta$是$\alpha$的$k$阶无穷小.

例25 证明:当$x \to 0$时,$4x\tan^3 x$为x的四阶无穷小.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{4x\tan^3 x}{x^4} = 4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^3 = 4,$$

故当$x \to 0$时,$4x\tan^3 x$为x的四阶无穷小.

例26 当$x \to 0$时,求$\tan x - \sin x$关于x的阶数.

解 $$\because \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2},$$

$\therefore \tan x - \sin x$为$x$的三阶无穷小.

常用的等价无穷小： 当$x \to 0$时,

$$\sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim$$

$$\sim e^x - 1 \sim x, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

函数的无穷小表达式:

$$\because \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1, \ \therefore \lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 0, \quad \text{即}\ \alpha - \beta = o(\alpha),$$

于是, $\alpha = \beta + o(\alpha)$, 或 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

如, $\sin x = x + o(x)$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

7、等价无穷小替换：

定理 8（等价无穷小替换定理）

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

证 $$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}\right)$$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

例27 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解 当$x\to 0$时，$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，$\tan 2x \sim 2x$.

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2} = 8.$$

注意: 千万不能滥用等价无穷小代换！

（对于代数和中各无穷小项不能分别替换！）

例28 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

错解 当 $x\to 0$ 时, $\tan x\sim x$, $\sin x\sim x$.

原式 $\cancel{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{(2x)^3}=0.$

解 当 $x\to 0$ 时, $\sin 2x\sim 2x$,

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3,$$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\dfrac{1}{16}$. 即, $\tan x-\sin x=\dfrac{1}{2}x^3+o(x^3)$.

例29 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x-\cos x+1}{\sin 3x}$.

解 $\because \tan 5x = 5x + o(x), \qquad \sin 3x \sim 3x,$

$$1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{5x+o(x)+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{3x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\left(5+\frac{o(x)}{x}+\frac{1}{2}x+\frac{o(x^2)}{x}\right) = \frac{5}{3}.$$

1.3.6　小结与思考题

1、一个准则： 夹逼准则.

2、两个重要极限：

设 α 为某过程中的无穷小，

$$1^0\ \lim_{\text{某过程}} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1;\quad 2^0\ \lim_{\text{某过程}} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \mathrm{e}.$$

3、无穷小与无穷大的关系.

4、无穷小的比较:

反映了同一过程中，两无穷小趋于零的速度快慢，但并不是所有的无穷小都可进行比较.

高(低)阶无穷小；等价无穷小；无穷小的阶.

5、等价无穷小的替换:

求极限的又一种方法，注意适用条件.

思考题

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3^x+9^x\right)^{\frac{1}{x}}$

思考题解答

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3^x+9^x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(9^x\right)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{3^x}+1\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=9\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3^x}\right)^{3^x}\right]^{\frac{1}{3^x\cdot x}}=9\cdot \mathrm{e}^0=9$$

课堂练习题

一、填空题:

1、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x} =$ ______；

2、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x} =$ ______；

3、 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{e}{x})^{x} =$ ______；

4、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 2x} =$ ______；

5、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x} =$ ______；

6、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2\arctan x} =$ ______；

7、 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n} =$ ______；

8、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x^n}{(\sin x)^m} =$ ______；

二、求下列各极限:

1、 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$; 2、 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$;

3、 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan x)^{\cot x}$; 4、 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

5、 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}\right)^{n}$ 6、 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+ax)^{\frac{1}{n}}-1}{x}$.

三、求下列各极限：

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\tan x\sin x}$；　　2、$\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{\alpha-\beta}$；

3、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x-\sin\beta x}{x}$；　　4、$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x-a}$.

四、设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}\sin\frac{\pi}{2}x+\cos(a+bx)}{x^{2n}+1}$

求：1、$f(x)$的表达式. 2、确定 a,b 的值, 使得

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$，　　$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=f(-1)$.

课堂练习题答案

一、1、$2/3$；　2、1；　3、e^{-e}；　4、$3/2$；

5、2；　6、∞；　7、x；　8、$\begin{cases} 0, m < n \\ 1, m = n \\ \infty, m > n \end{cases}$.

二、1、e^{-1}；　2、e^{2a}；　3、e^{3}；

4、e^{-2}　5、e^{-1}；　6、$\dfrac{a}{n}$.

三、1、$\frac{1}{2}$;　2、e^{β};　3、$\alpha-\beta$;　4、$\sec^2 a$.

四、1、$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin\frac{\pi}{2}x, & |x|>1;\\ \frac{1+\cos(a+b)}{2}, & x=1;\\ \frac{1+\cos(a-b)}{2}, & x=-1;\\ \cos(a+bx), & |x|<1.\end{cases}$$

2、$a=(i+j)\pi,\ b=(i-j)\pi,(i,j=0,\pm1,2,\cdots)$.