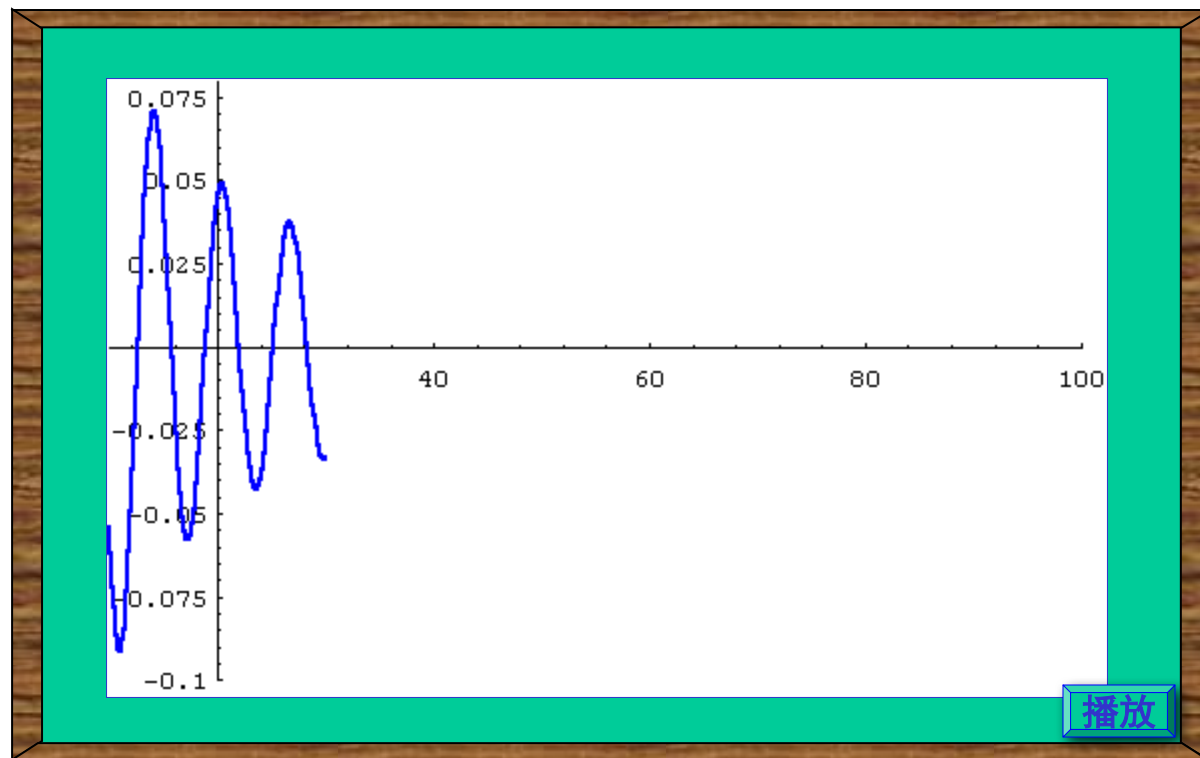


第一章 函数与极限

第三节： 函数极限的定义与性质

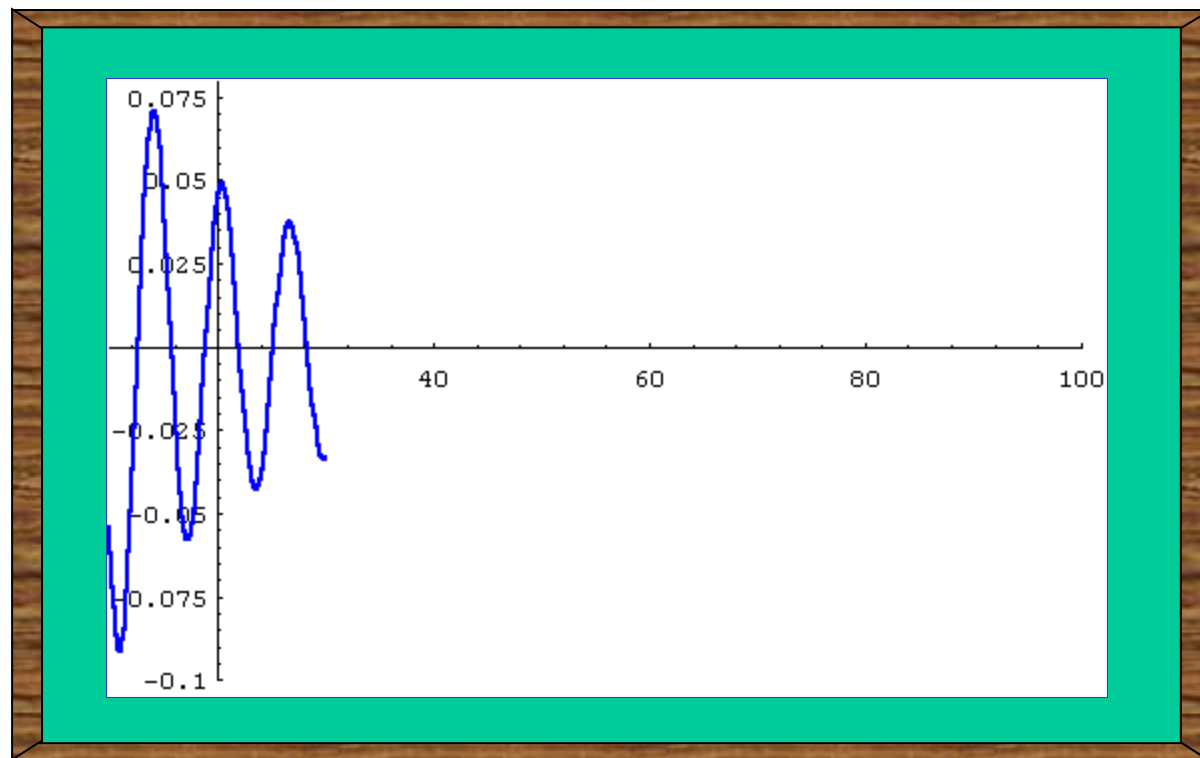
1.3.1 自变量趋于无穷时函数的极限

观察函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势.



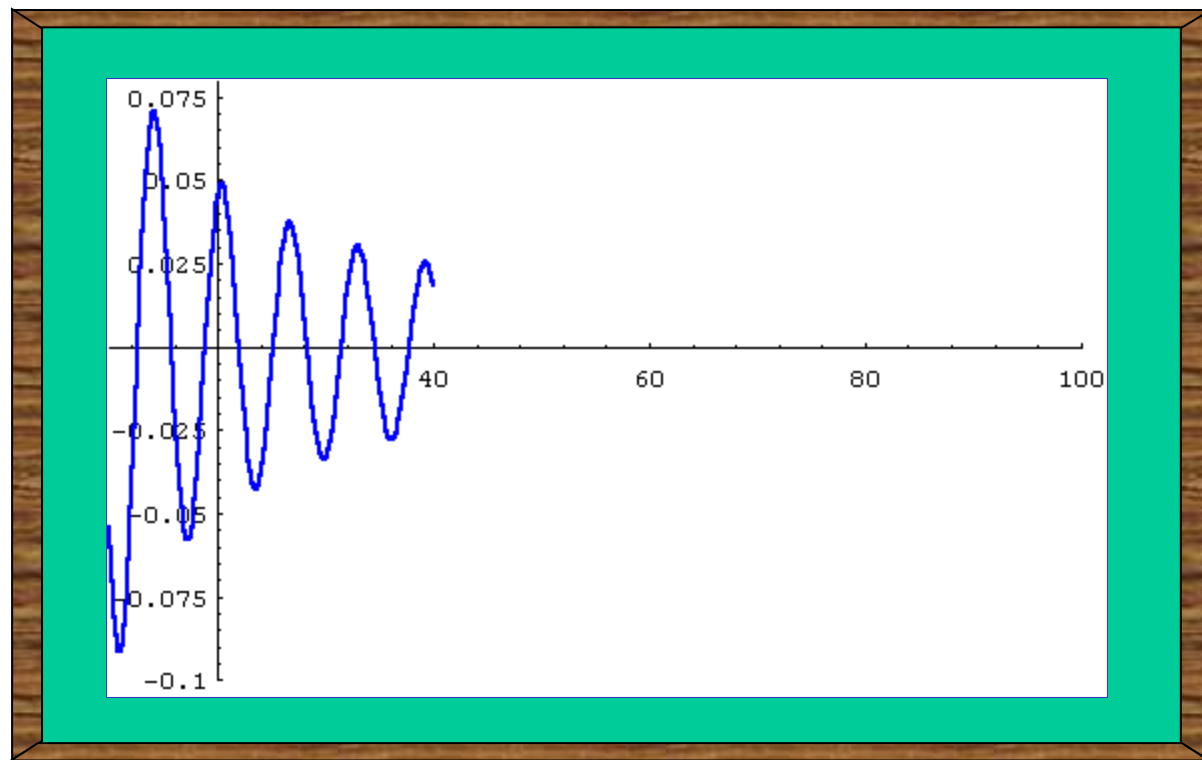
1.3.1 自变量趋于无穷时函数的极限

观察函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势.



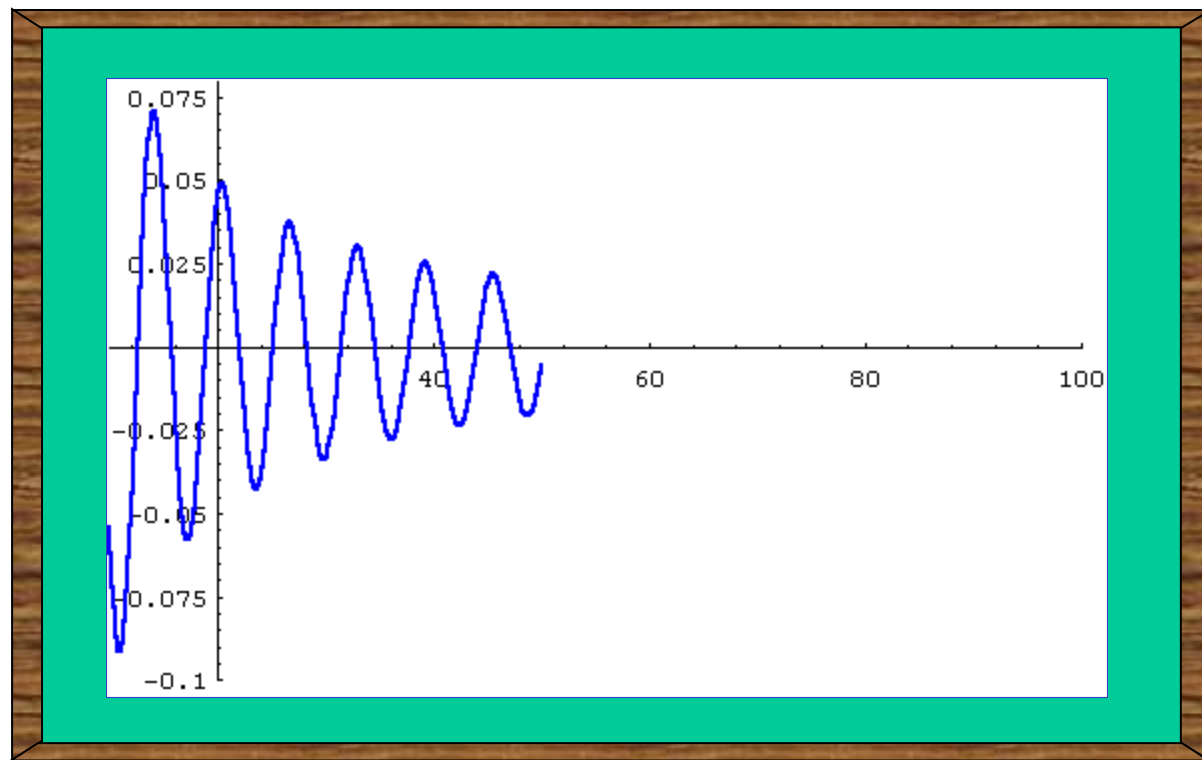
1.3.1 自变量趋于无穷时函数的极限

观察函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势.



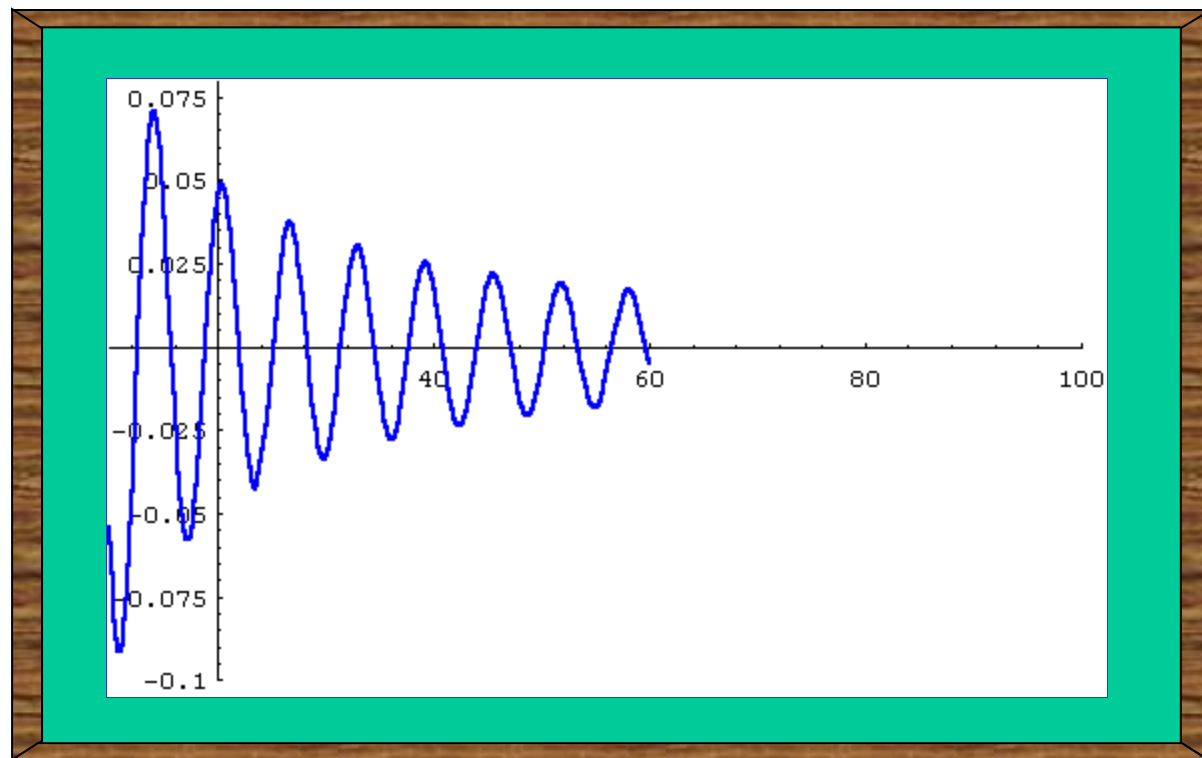
1.3.1 自变量趋于无穷时函数的极限

观察函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势.



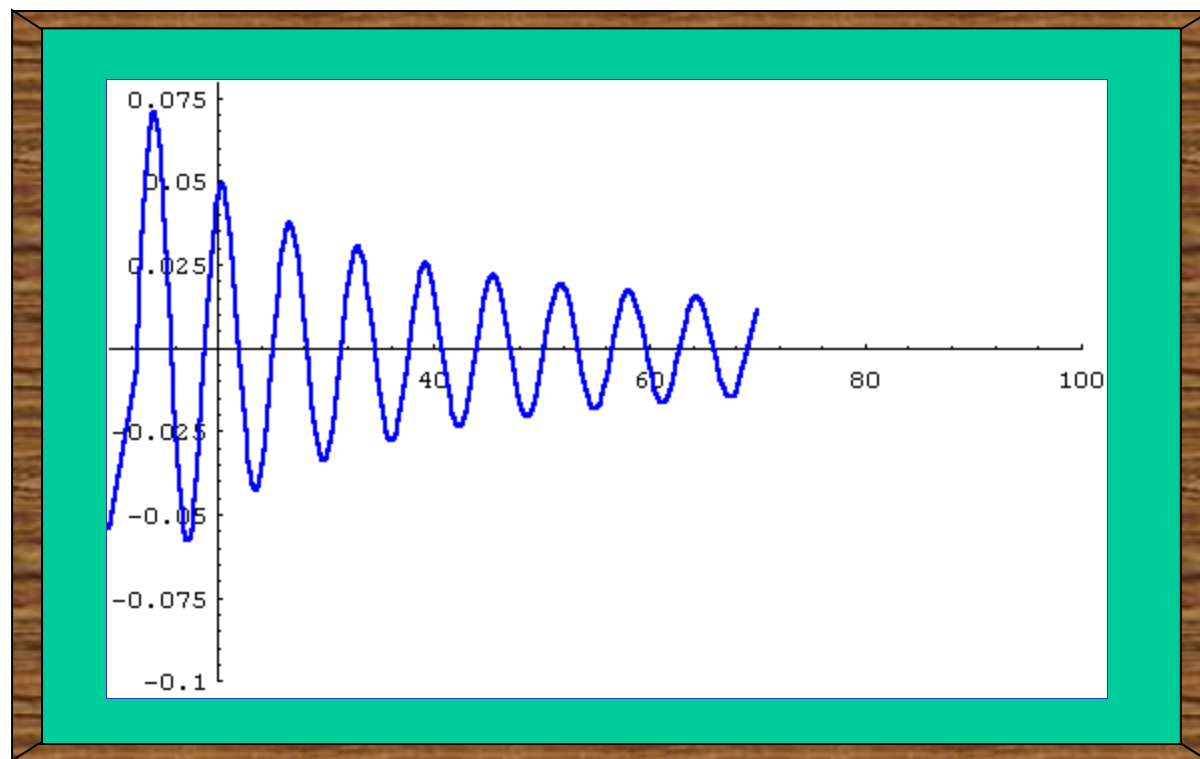
1.3.1 自变量趋于无穷时函数的极限

观察函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势.



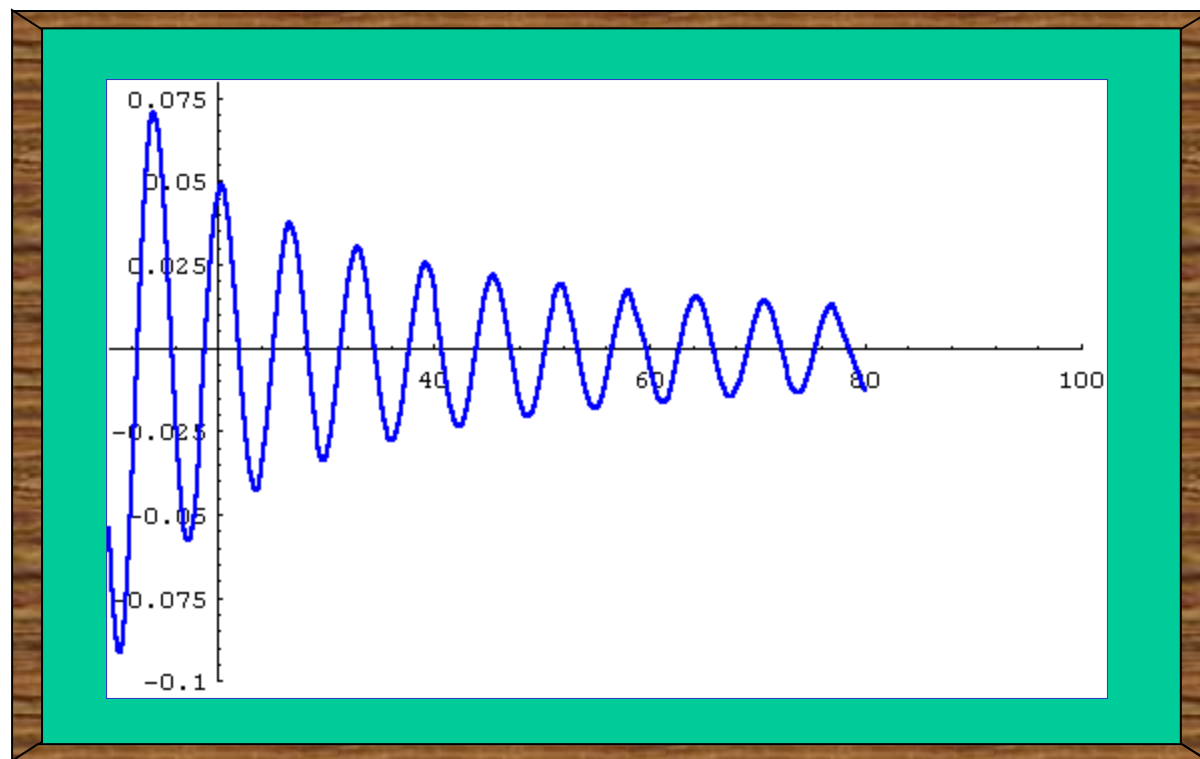
1.3.1 自变量趋于无穷时函数的极限

观察函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势.



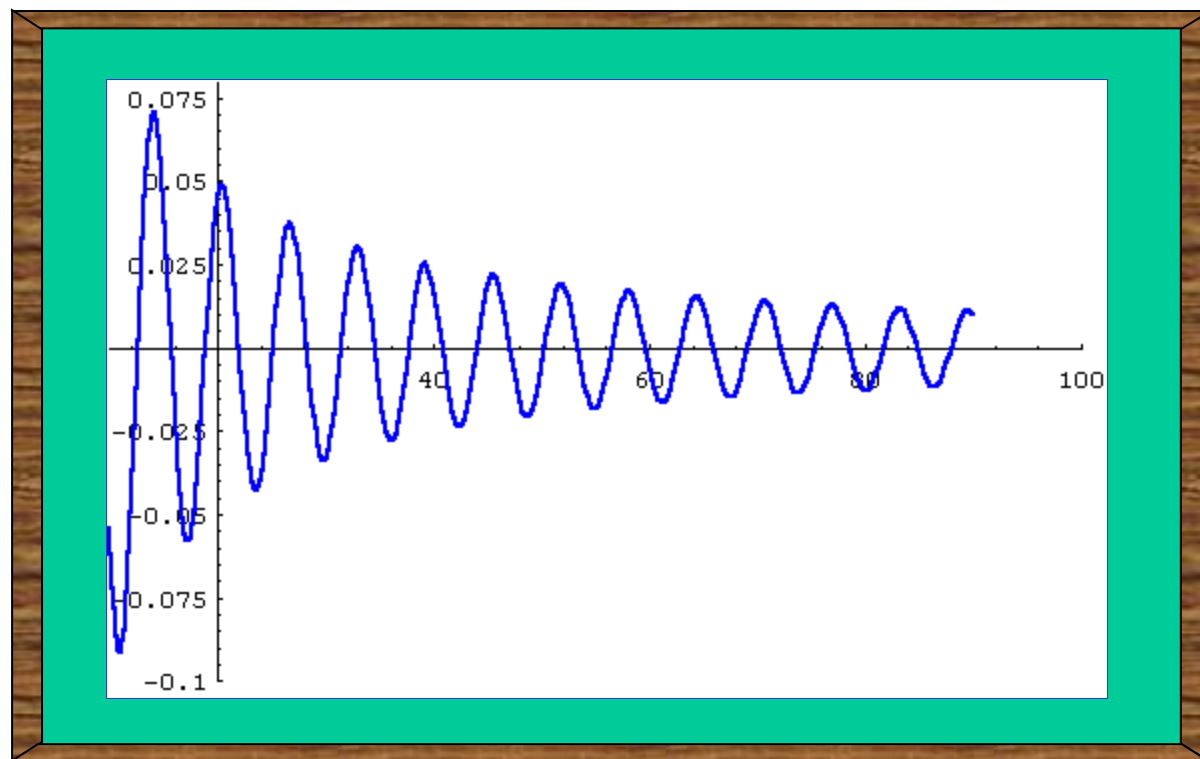
1.3.1 自变量趋于无穷时函数的极限

观察函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势.



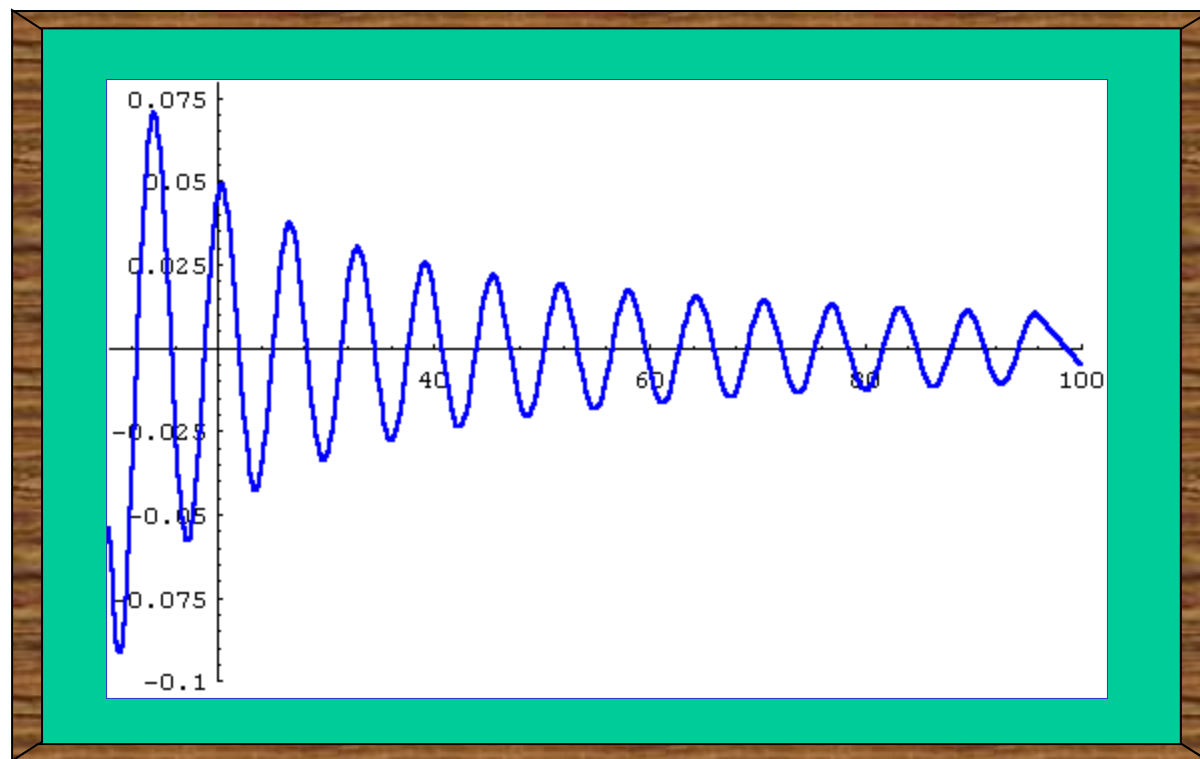
1.3.1 自变量趋于无穷时函数的极限

观察函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势.



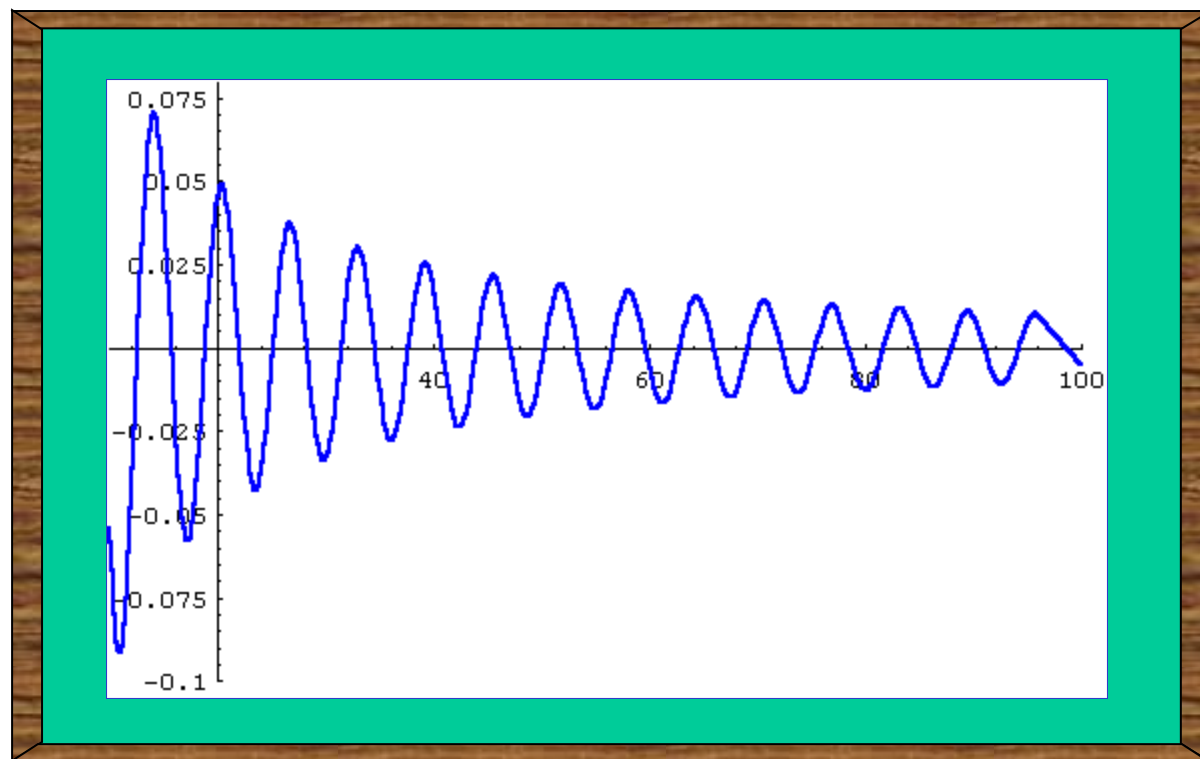
1.3.1 自变量趋于无穷时函数的极限

观察函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势.



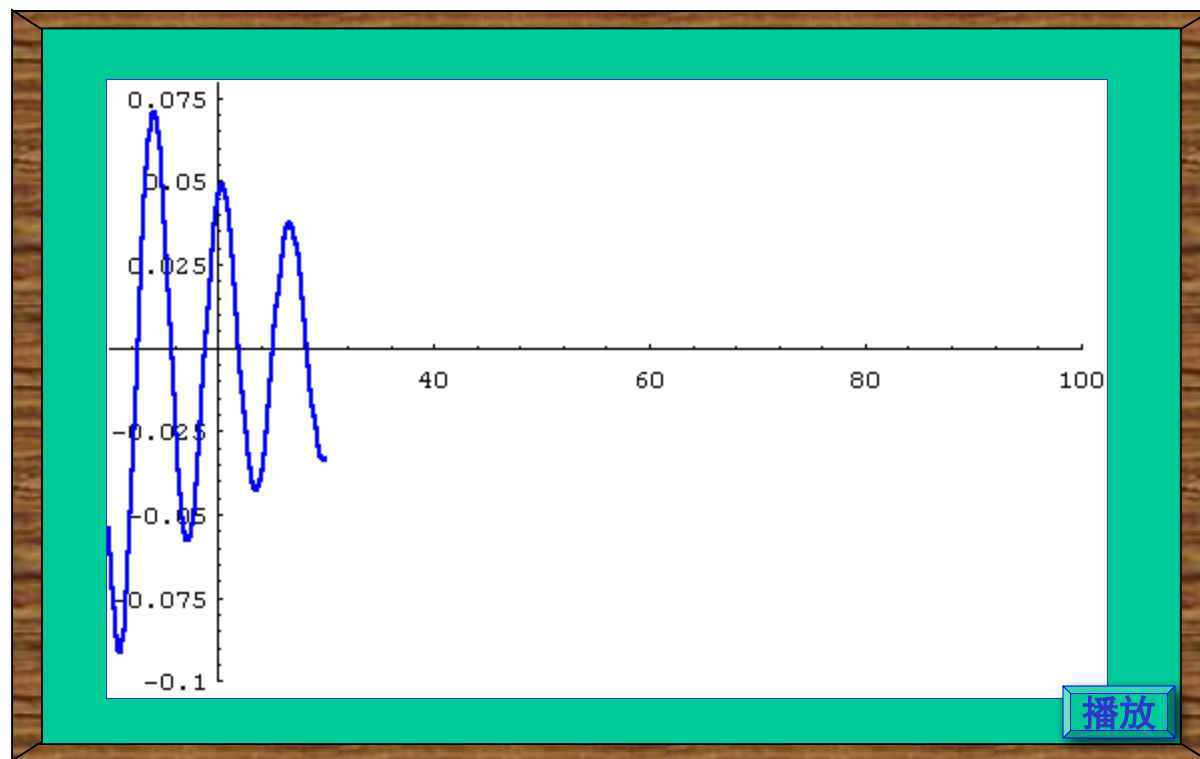
1.3.1 自变量趋于无穷时函数的极限

观察函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势.



1.3.1 自变量趋于无穷时函数的极限

观察函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的变化趋势.



问题：函数 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A .

通过上面演示实验的观察：

当 x 无限增大时， $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题：如何用数学语言刻划函数“无限接近”.

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小；

$|x| > X$ 表示 $x \rightarrow \infty$ 的过程.

1、函数极限定义：

若对于任意给定 $\varepsilon > 0$ (无论多小), 总存在正数 X , 使得对于适合不等式 $|x| > X$ 的一切 x , 所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时极限存在, 其值为 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$$

“ $\varepsilon - X$ ” 定义 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{使当 } |x| > X \text{ 时, 恒有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

2、另外两种情形：

1⁰. $x \rightarrow +\infty$ 情形： $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

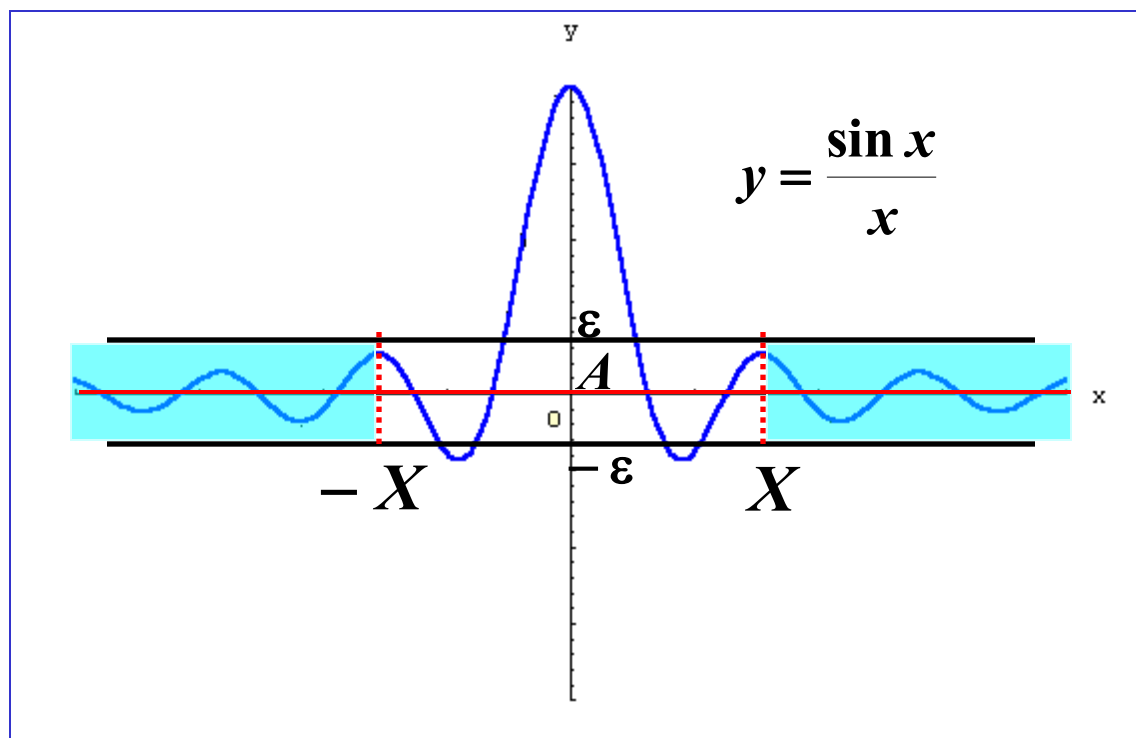
2⁰. $x \rightarrow -\infty$ 情形： $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $x < -X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

定理： $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

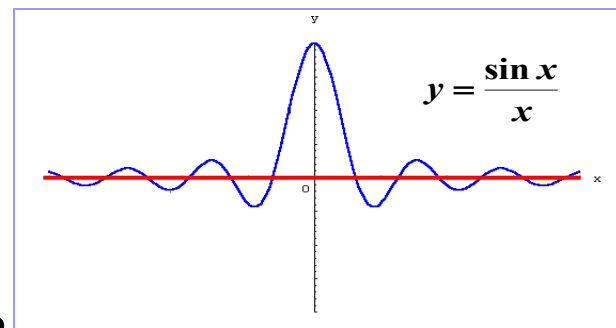
3、几何解释：



当 $x < -X$ 或 $x > X$ 时, 函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线 $y = A$ 为中心线, 宽为 2ϵ 的带形区域内。

例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

证 $\because \left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| = \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} < \varepsilon,$



$\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\varepsilon}$, 则当 $|x| > X$ 时恒有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 0 \right| < \varepsilon, \quad \text{故 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$, 则直线 $y = c$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的水平渐近线.

例 2 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{1}{2}$.

证 不妨设 $|x| > 1$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 解不等式

$$\left| \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2|2x+1|} \leq \frac{1}{4(|x|-1)} < \varepsilon,$$

$$\text{即 } |x| > \frac{1}{4\varepsilon} + 1. \quad \forall \varepsilon > 0, \text{ 取 } X = 1 + \frac{1}{4\varepsilon}$$

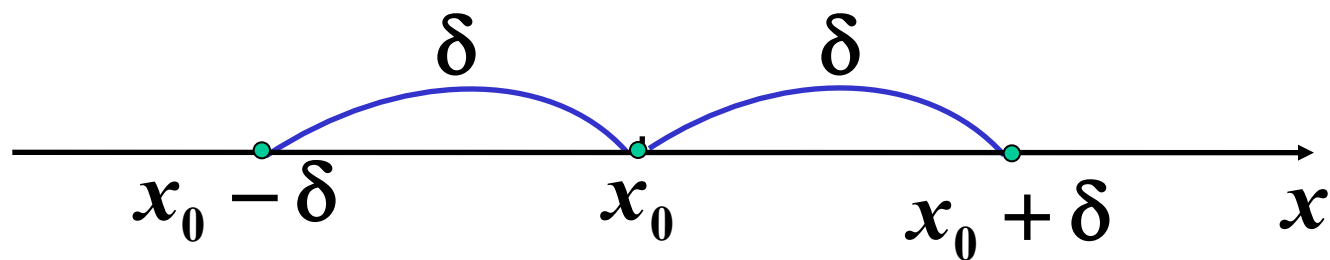
当 $|x| > X$ 时, 有 $\left| \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ 成立.

1.3.2 自变量趋于定点时函数的极限

问题: 函数 $y = f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中, 对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A .

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;

$0 < |x - x_0| < \delta$ 表示 $x \rightarrow x_0$ 的过程.



点 x_0 的去心 δ 邻域, δ 体现 x 接近 x_0 程度.

1、函数极限定义：

若对于任意给定 $\varepsilon > 0$ (无论多小), 总存在正数 δ , 使得对适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x , 所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在, 其值为 A , 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$$

“ ε - δ ” 定义

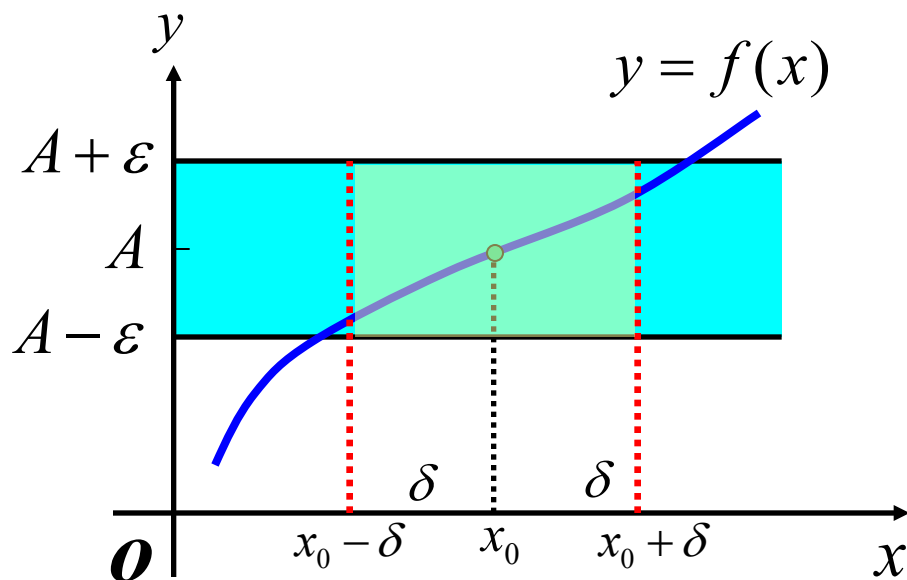
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

注 1. 函数极限与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义无关;
意: 2. δ 与任意给定的正数 ε 有关.

2、几何解释:

当 x 在 x_0 的去心 δ 邻域时, 函数 $y = f(x)$ 图形完全落在以直线 $y = A$ 为中心线, 宽为 2ε 的带形区域内.



显然, 找到一个 δ 后, δ 越小越好。

3、单侧极限:

左极限: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 - 0 \\ (x \rightarrow x_0^-)}} f(x) = A$, 或 $f(x_0 - 0) = A$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < x_0 - x < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

右极限: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 + 0 \\ (x \rightarrow x_0^+)}} f(x) = A$, 或 $f(x_0 + 0) = A$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < x - x_0 < \delta, |f(x) - A| < \varepsilon.$$

定理 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

例3 设 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

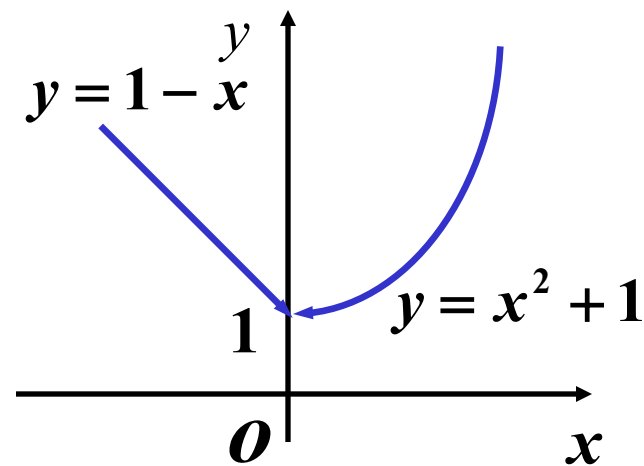
解 $x = 0$ 是函数的分段点, 两个单侧极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1,$$

左右极限存在且相等,

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$



例 4 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

证 函数在点 $x=1$ 处没有定义.

$$\because |f(x) - A| = \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x - 1| \quad \text{任给 } \varepsilon > 0,$$

要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 只要取 $\delta = \varepsilon$,

当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$,

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

例 5 证明: 当 $x_0 > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

$$\text{证 } \because |f(x) - A| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}},$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 只要 $|x - x_0| < \sqrt{x_0} \varepsilon$

且 x 不取负值. 因此, 取 $\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0} \varepsilon\}$,

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就有 $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$,

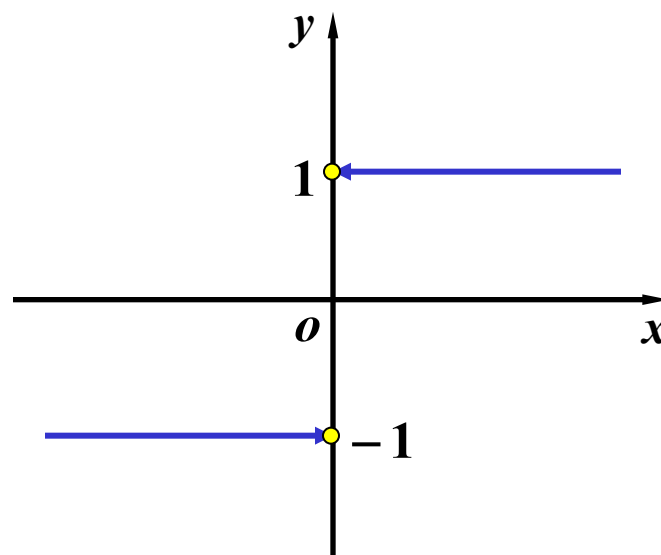
$$\therefore \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

例 6 验证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 不存在.

$$\text{证 } \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$



左右极限存在但不相等, $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

1.3.6 小结与思考题

函数极限统一定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A.$$

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists$ 某时刻, 从此以后, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立.

思考题

试问函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 10, & x = 0 \\ 5 + x^2, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的左、

右极限是否存在？当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x)$ 的极限是否存在？

思考题解答

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (5 + x^2) = 5, \quad \text{左极限存在,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad \text{右极限存在,}$$

$$\because \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 不存在.}$$

课堂练习题

一、填空题:

1、当 $x \rightarrow 2$ 时, $y = x^2 \rightarrow 4$, 问当 δ 取____时,
只要 $0 < |x - 2| < \delta$, 必有 $|y - 4| < 0.001$.

2、当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \rightarrow 1$, 问当 X 取_____时, 只要 $|x| > X$, 必有 $|y - 1| < 0.01$.

二、用函数极限的定义 证明:

$$1、\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1 - 4x^2}{2x + 1} = 2, \quad 2、\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0.$$

课堂练习题答案

一、 1、 $\min\{a, 0.001 / (a + 4)\}, (a > 0);$

2、 $\sqrt{397}$, 或 20 .

二、 1、 $\delta = \frac{1}{2} \varepsilon ;$

2、 $X = \frac{1}{\varepsilon^2} .$

1.3.3 函数极限的性质与运算

1、唯一性

定理 2 若 $\lim f(x)$ 存在,则极限唯一.

证 以 $x \rightarrow x_0$ 为例:

假设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B,$

由定义: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 和 $|f(x) - B| < \varepsilon$ 同时成立. 于是

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

$$\begin{aligned} |A - B| &= |[f(x) - B] - [f(x) - A]| \\ &\leq |f(x) - B| + |f(x) - A| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

因 2ε 任意小, 所以 $A = B$, 即极限唯一.

同理当 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在时其极限值也唯一.

2、局部有界性

定理 3 若在某个过程下, $f(x)$ 有极限, 则存在过程的一个时刻, 在此时刻以后 $f(x)$ 有界.

证 由极限定义, 对 $\varepsilon = 1$, 存在 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < 1$. 于是

$$|f(x)| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|.$$

记 $M = 1 + |A|$, 则 $M > 0$, 当 $|x| > X$ 时,

有 $|f(x)| < M$, 即 $f(x)$ 有界.

同理可证, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则存在正数

δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x)$ 有界.

3、保号性

定理(保号性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$),

则 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in \overset{o}{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

推论 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 且 $A < B$

则 $\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{o}{U}(x_0, \delta)$, 有 $f(x) < g(x)$.

推论 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in \overset{o}{U}(x_0, \delta)$ 时,

$f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

推论 (保序性) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$.

若 $\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{o}{U}(x_0, \delta)$, 有 $f(x) \leq g(x)$, 则 $A \leq B$.

4、子列收敛性 (函数极限与数列极限的关系)

定义：设在 $x \rightarrow a$ (a 可以是 x_0 , x_0^+ , 或 x_0^-) 的过程中有数列 $x_n (\neq a) \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$)，则称数列 $\{f(x_n)\}$ 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时的子列。

定理 4 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 数列 $\{f(x_n)\}$ 是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的一个子列, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

证 $\because \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

又 $\because \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$,

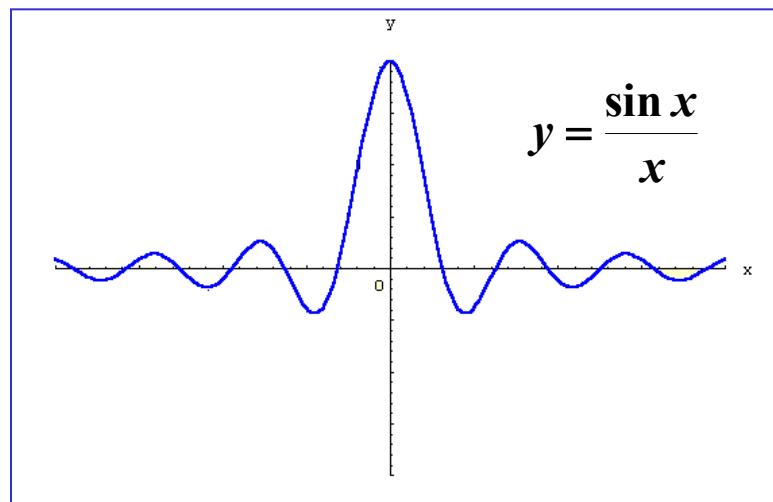
$\therefore$ 对上述 $\delta > 0, \exists N > 0$, 使当 $n > N$ 时, 恒有 $0 < |x_n - x_0| < \delta$.

从而有 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

如：若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} \sin \frac{n+1}{n^2} = 1$$



函数极限与数列极限的关系（Heine 定理）

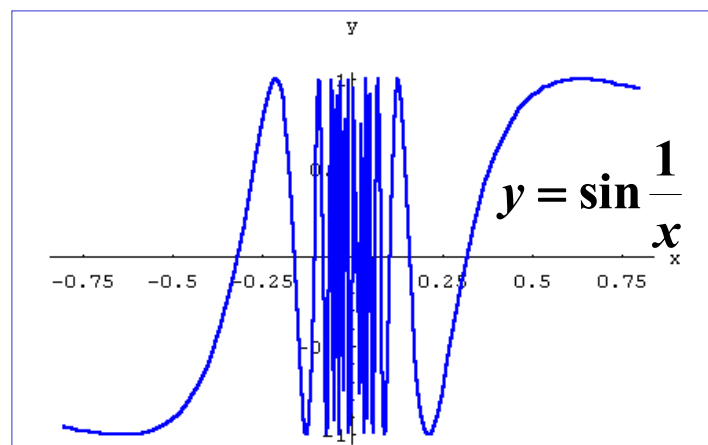
函数极限存在的充要条件是它的任何子列的极限都存在且相等。

例 7 证明极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

证 取 $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n\pi} \right\}$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 且 $x_n \neq 0$;

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0$



取 $\{y_n\} = \left\{ \frac{1}{\frac{4n+1}{2}\pi} \right\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 且 $y_n \neq 0$;

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{4n+1}{2}\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$,

二者不相等, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

5. 极限运算法则

定理 5 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则

$$(1) \quad \lim [f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$$

$$(2) \quad \lim [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$

$$(3) \quad \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad \text{其中 } B \neq 0.$$

证 (3) $\because \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0.$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = |B| > 0.$$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - a| < \delta \text{ 时,}$

$$\text{有 } |f(x) - A| < \varepsilon, \quad |g(x) - B| < \varepsilon,$$

和 $||g(x)| - |B|| < \frac{1}{2}|B|$, 即 $|g(x)| > \frac{1}{2}|B|$ 同成立.

$$\begin{aligned} \text{于是 } \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| &= \left| \frac{Bf(x) - Ag(x)}{Bg(x)} \right| \\ &= \left| \frac{B[f(x) - A] - A[g(x) - B]}{Bg(x)} \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{|B| |f(x) - A| + |A| |g(x) - B|}{|B| |g(x)|} < \frac{|A| + |B|}{B^2 / 2} \varepsilon$$

$\therefore$ (3)成立.

推论1 如果 $\lim f(x)$ 存在,而 c 为常数,则

$$\lim [cf(x)] = c \lim f(x).$$

即, 常数因子可以提到极限记号外面.

推论2 如果 $\lim f(x)$ 存在,而 n 是正整数,则

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

6. 求极限方法举例

例8 求极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5}$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \because \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= (\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3 \neq 0,\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5)} = \frac{2^3 - 1}{3} = \frac{7}{3}.$$

小结: 1. 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= a_0 \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^n + a_1 \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \cdots + a_n = f(x_0).\end{aligned}$$

2. 设 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0) \neq 0$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

若 $Q(x_0) = 0$, 则商的法则不能应用.

例9 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

解 $\because \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 3) = 0$, 商的法则不能用

又 $\because \lim_{x \rightarrow 1} (4x - 1) = 3 \neq 0$,

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{4x - 1} = \frac{0}{3} = 0.$$

由无穷小与无穷大的关系,得

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \infty.$$

例10 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$.

解 当 $x \rightarrow 1$ 时, 分子, 分母的极限都是零. $(\frac{0}{0})$

先约去不为零的无穷小因子 $x - 1$ 后再求极限.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 3)(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x + 3} = \frac{1}{2}.$$

(消去零因子法)

例11 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1}$.

解 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 分子, 分母的极限都是无穷大 ($\frac{\infty}{\infty}$)

先用 x^3 去除分子分母, 分出无穷小, 再求极限.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{7x^3 + 4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^3}}{7 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{7}.$$

(无穷小项分离法)

注意： 当 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$ 和 n 为非负整数时有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n = m, \\ 0, & \text{当 } n > m, \\ \infty, & \text{当 } n < m, \end{cases}$$

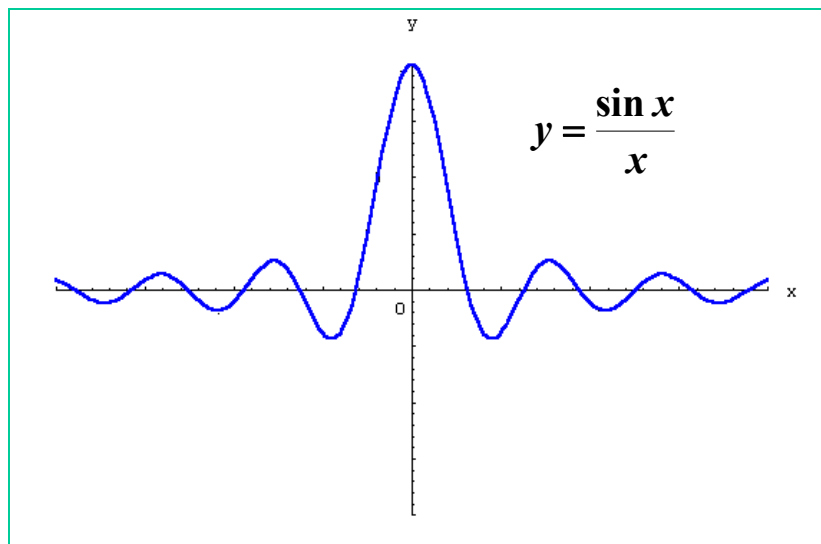
无穷小项分离法：以分母中自变量的最高次幂除分子,分母,以分出无穷小,然后再求极限.

例12 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

解 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 为无穷小,

而 $\sin x$ 是有界函数.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$



例13 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

解 原式 $= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}$.

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}.$$

$$\because \left| \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right| \leq 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = 0.$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0.$$

例14 已知极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b) = 0$, 求 a, b .

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} [(1 - a)x - 1 - b + \frac{2}{x + 1}] = 0$.

则

$$1 - a = 0, -1 - b = 0,$$

$$\text{或 } a = 1, b = -1.$$

7. 函数极限的夹逼准则

准则 I' 如果当 $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$ (或 $|x| > M$) 时, 有

$$(1) \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

$$(2) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = A, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A,$$

那末 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)$ 存在, 且等于 A .

准则 I 和准则 I' 统称为**夹逼准则**.

例15 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sin^2 x + 1)^{\frac{1}{x}}$.

解 显然 $1 \leq (2\sin^2 x + 1)^{\frac{1}{x}} \leq 3^{\frac{1}{x}}$.

由于 $|3^{\frac{1}{x}} - 1| = 3^{\frac{1}{x}} - 1 < \varepsilon, x > \log_3^{-1}(1 + \varepsilon)$,

所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \log_3^{-1}(1 + \varepsilon)$, 当 $x > X$ 时,

恒有 $|3^{\frac{1}{x}} - 1| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{\frac{1}{x}} = 1$.

所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sin^2 x + 1)^{\frac{1}{x}} = 1$.

例16 证明极限: $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] = 1.$

证 因为 $\left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x} \right] + 1.$ 所以

当 $x > 0$ 时, $1 - x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1.$

当 $x < 0$ 时, $1 \leq x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1 - x.$

利用夹逼准则: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$

另证：当 $|x| < 1$ 时，设 $\frac{1}{x} = [\frac{1}{x}] + r(x)$ ，其中

$$0 \leq r(x) < 1. \quad \text{于是}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x[\frac{1}{x}] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\frac{1}{x}]}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\frac{1}{x}]}{[\frac{1}{x}] + r(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{r(x)}{[\frac{1}{x}]} \right)^{-1} = 1. \quad \text{类似} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] = 1. \end{aligned}$$

1.3.6 小结与思考题

1、极限的四则运算法则及其推论;

2、极限求法;

- a. 多项式与分式函数代入法求极限;
- b. 消去零因子法求极限;
- c. 无穷小项分离法求极限;
- d. 利用无穷小运算性质求极限;
- e. 利用左右极限求分段函数极限.

思考题

在某个过程中，若 $f(x)$ 有极限， $g(x)$ 无极限，那么 $f(x) + g(x)$ 是否有极限？为什么？

思考题解答

没有极限.

假设 $f(x) + g(x)$ 有极限, $\because f(x)$ 有极限,

由极限运算法则可知:

$g(x) = [f(x) + g(x)] - f(x)$ 必有极限,

与已知矛盾, 故假设错误.

课堂练习题

一、填空题:

1、 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3}{x - 3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

4、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

5、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)^{20} (3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、求下列各极限:

1、 $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$

2、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$

3、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 1}{4^x + 1}$

4、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - x^n}{x^m + x^n - 2}$

课堂练习题答案

一、 1、 -5; 2、 3; 3、 2; 4、 0; 5、 $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$.

二、 1、 -2; 2、 $\frac{1}{2}$; 3、 0; 4、 $\frac{m-n}{m+n}$.