第一章 函数与极限

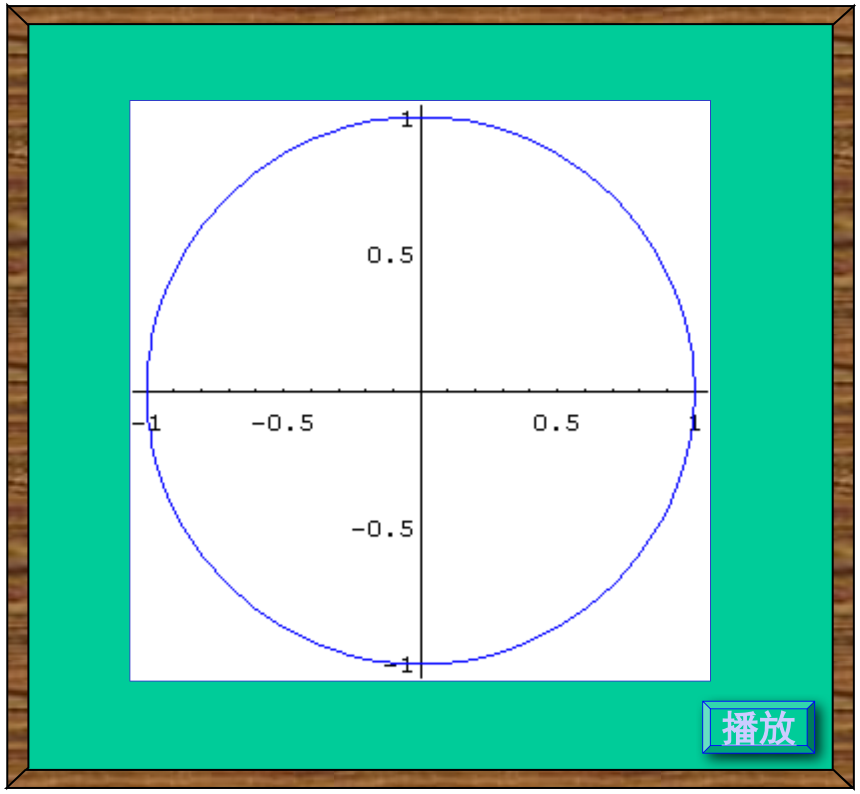
第二节： 数列的极限

1.2.1　数列极限的定义

1、割圆术

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”

——刘徽

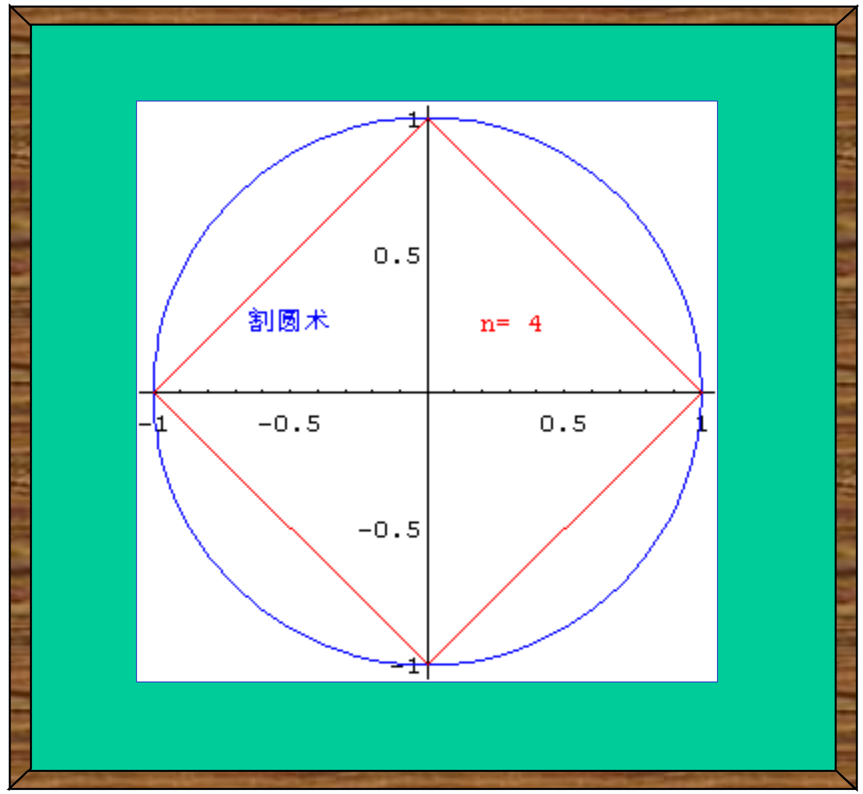


1.2.1　数列极限的定义

1、割圆术

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”

——刘徽

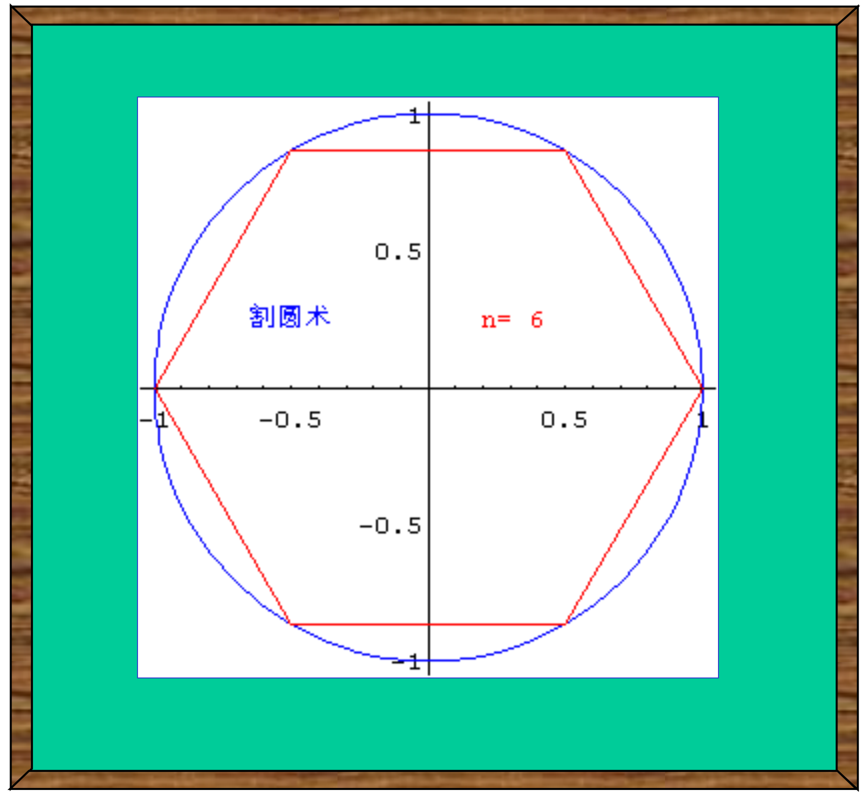


1.2.1 数列极限的定义

1、割圆术

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”

——刘徽

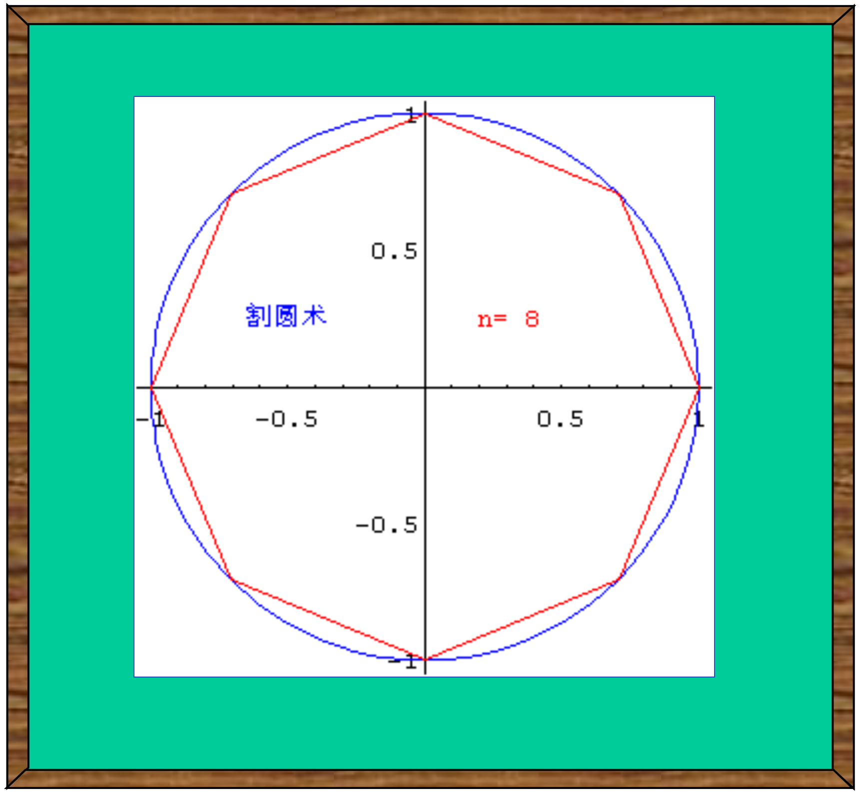


1.2.1 数列极限的定义

1、割圆术

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”

——刘徽

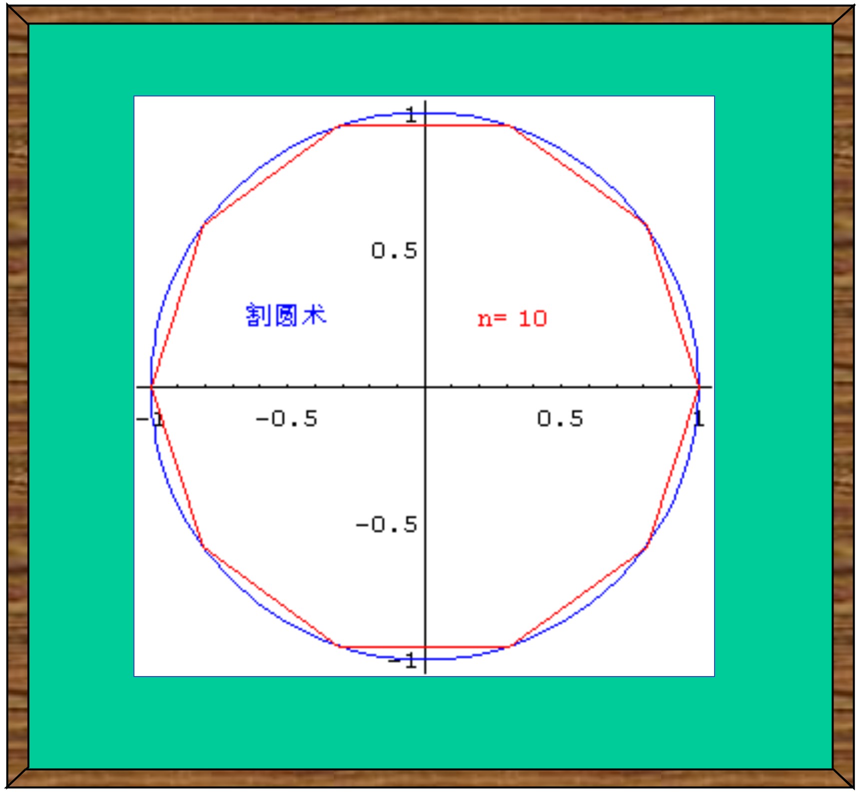


1.2.1 数列极限的定义

1、割圆术

"割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。"

——刘徽

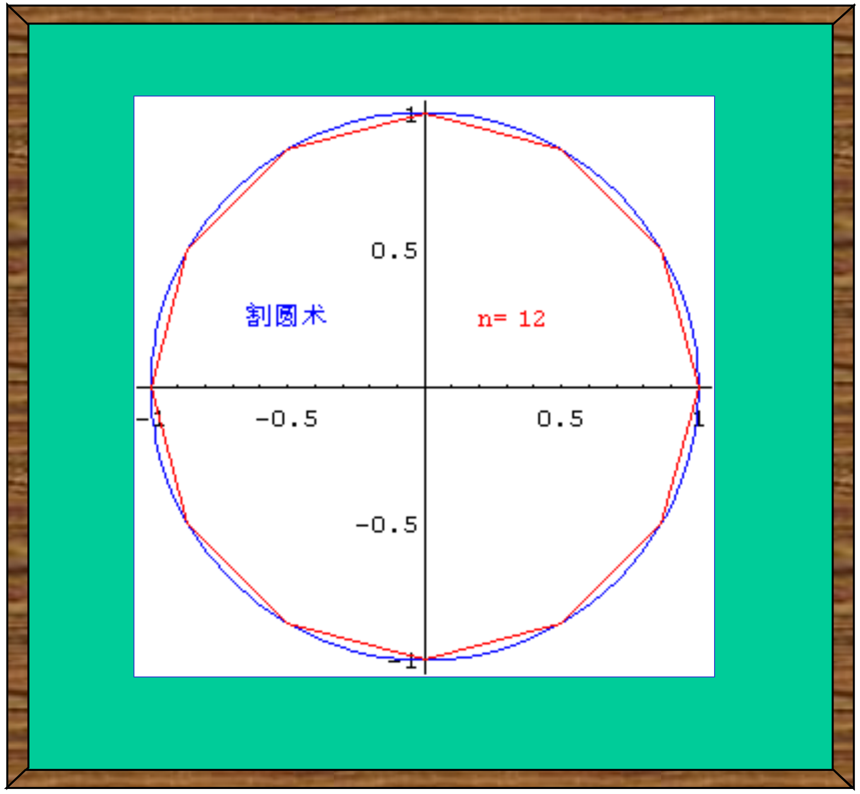


1.2.1 数列极限的定义

1、割圆术

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”

——刘徽

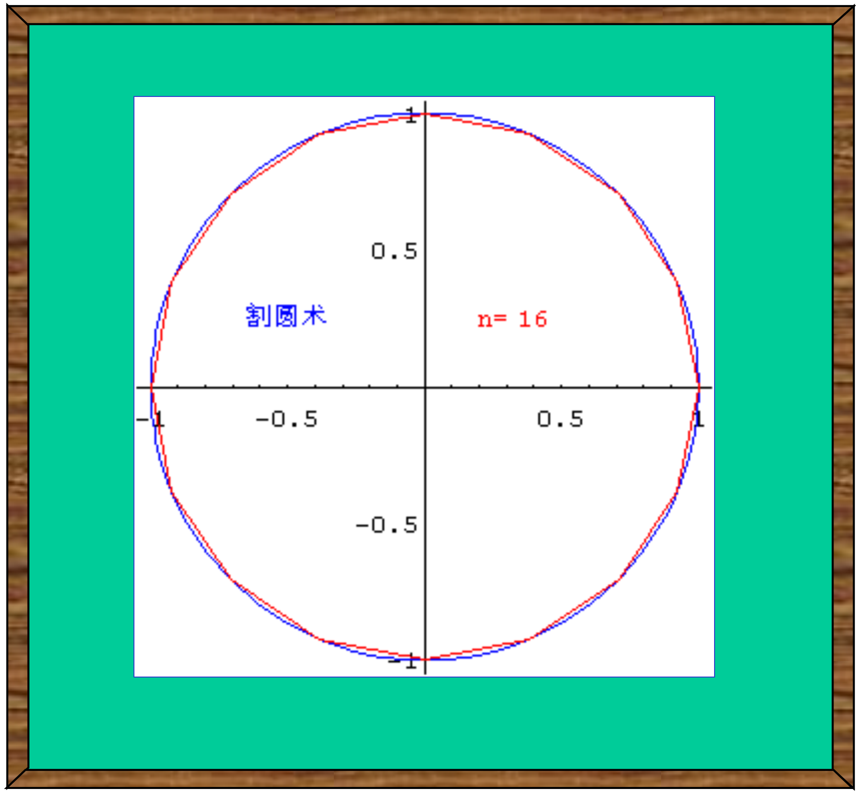


1.2.1　数列极限的定义

1、割圆术

“割之弥细， 所失弥少， 割之又割， 以至于不可割， 则与圆周合体而无所失矣。”

——刘徽

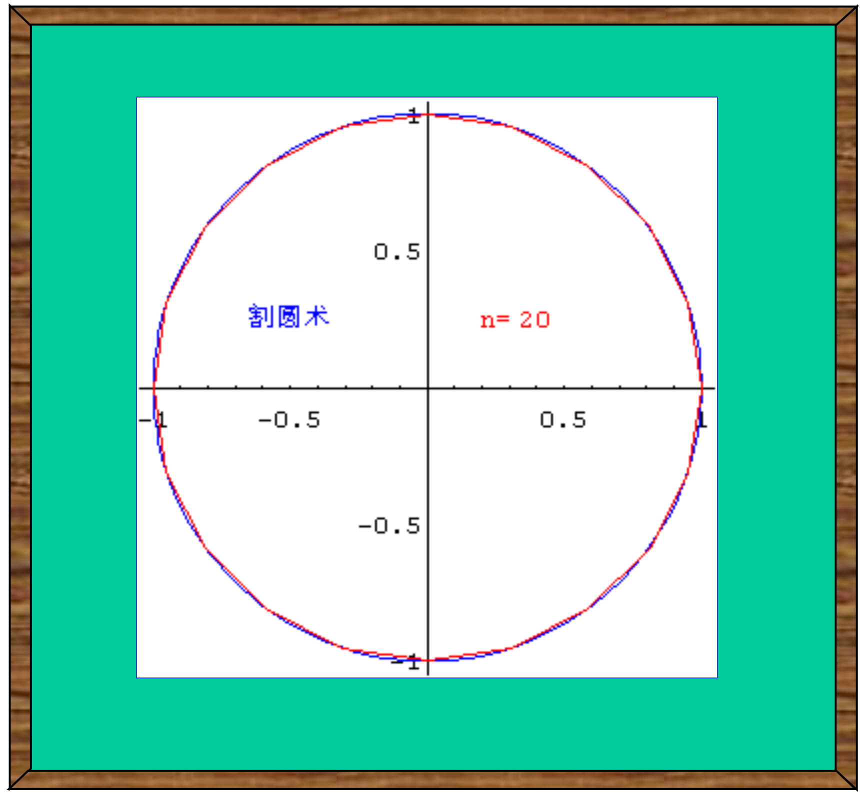


1.2.1　数列极限的定义

1、割圆术

“割之弥细， 所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”

——刘徽

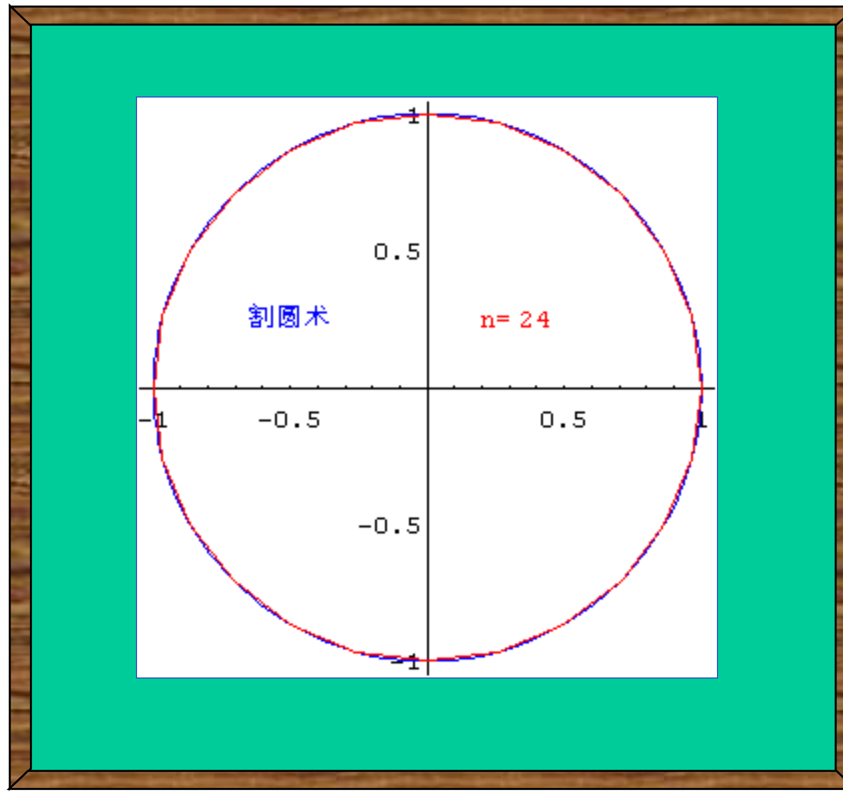


1.2.1 数列极限的定义

1、割圆术

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”

——刘徽

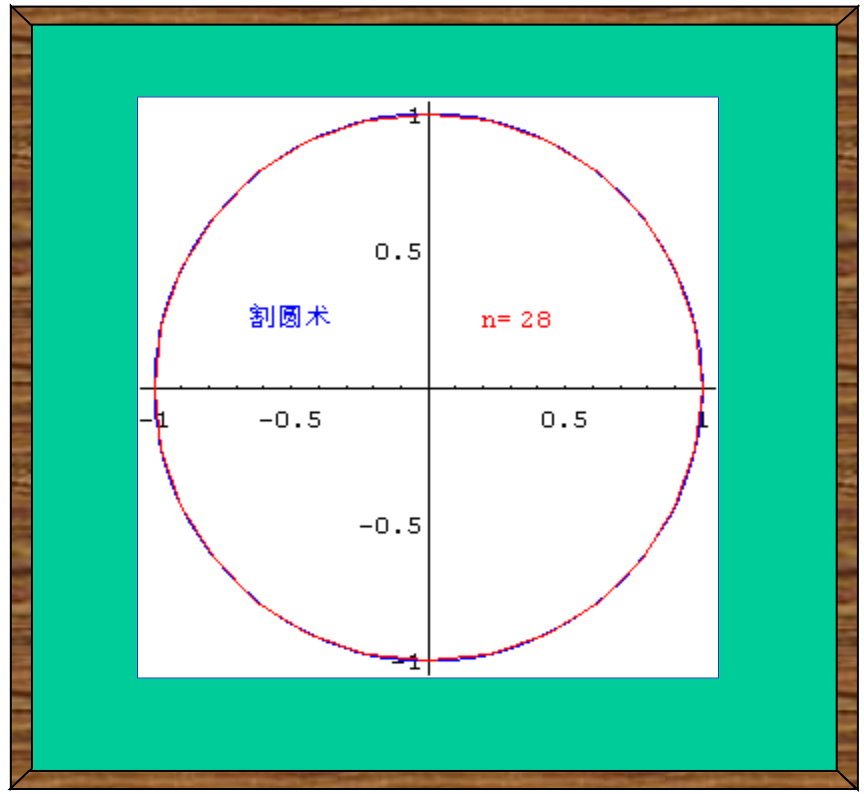


1.2.1　数列极限的定义

1、割圆术

“割之弥细， 所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”

——刘徽

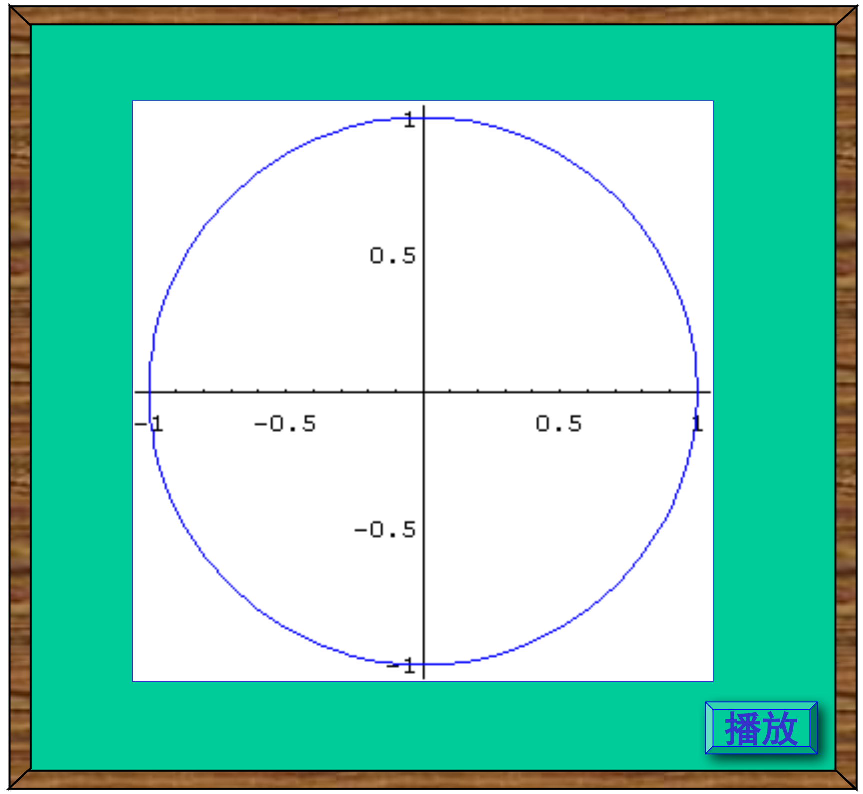


1.2.1　数列极限的定义

1、割圆术

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”

——刘徽



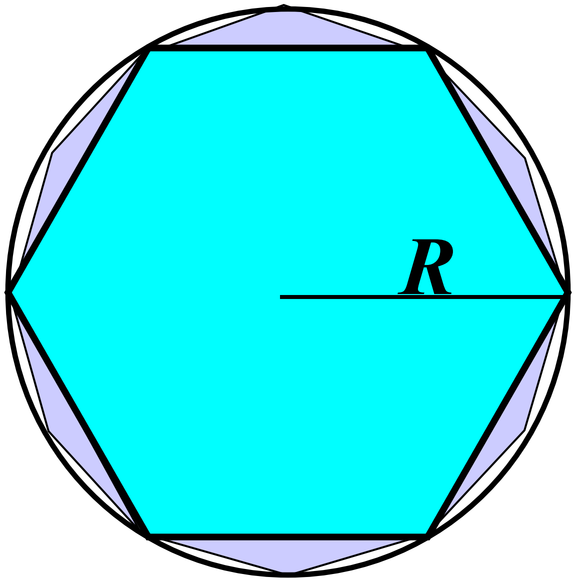
欲求圆面积S,先求:

正六边形的面积 A_1

正十二边形的面积 A_2

…… ……

正$6\times 2^{n-1}$形的面积 A_n



$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots \longrightarrow S$$

2、截丈问题

“一尺之棰，日截其半，万世不竭”

自惠施的《庄子·天下篇》

第一天截下的杖长为 $X_1 = \frac{1}{2}$;

第二天截下的杖长总和为 $X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$;

…… ……

第n天截下的杖长总和为 $X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$;

$$X_n = 1 - \frac{1}{2^n} \longrightarrow 1$$

3、数列概念

按自然数编号依次排列的一列数

$$\{x_n\}: \quad x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \tag{1}$$

称为无穷数列, 简称数列，其中的每个数称为数列的项, x_n称为通项(一般项).

如：$\{2^n\}$：　$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots;$

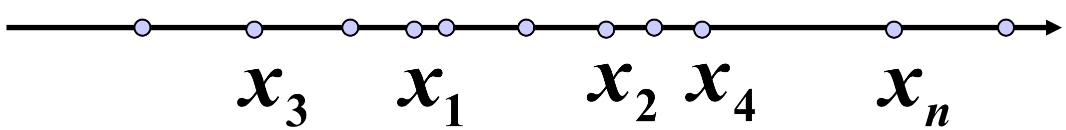
$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$：　$\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \cdots, \dfrac{1}{2^n}, \cdots;$

$$\left\{(-1)^{n-1}\right\} \qquad 1,-1,\ 1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots;$$

$$\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}: \qquad 2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots;$$

$$\{x_n\}: \quad \sqrt{3},\sqrt{3+\sqrt{3}},\cdots,\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}},\cdots$$

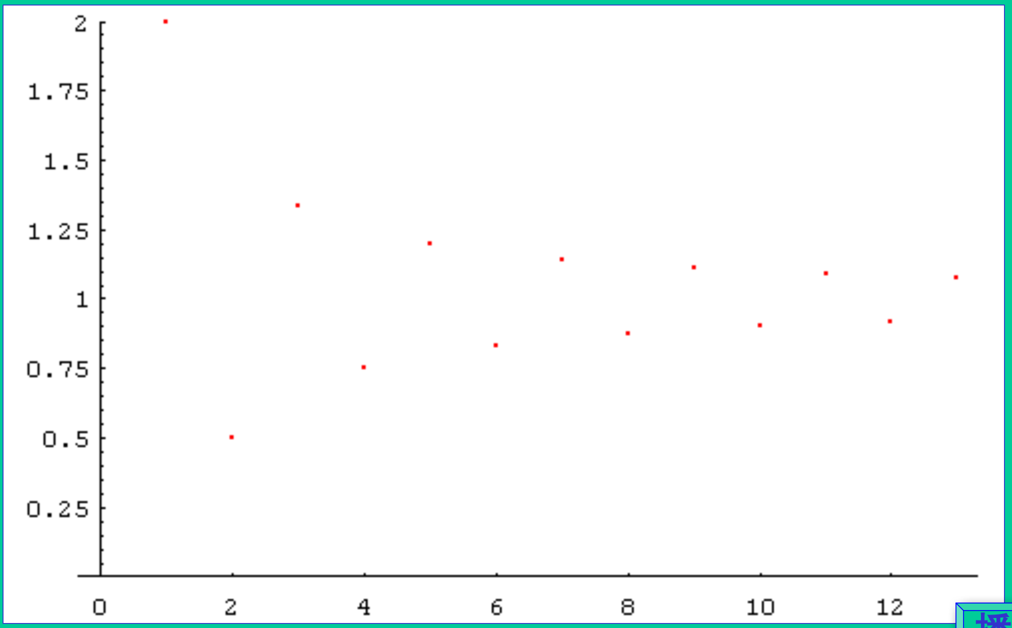
注意： 1. 数列对应着数轴上一个点列. 可看作一动点在数轴上依次取 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$.



2.数列是整标函数 $x_n = f(n)$.

4、数列极限

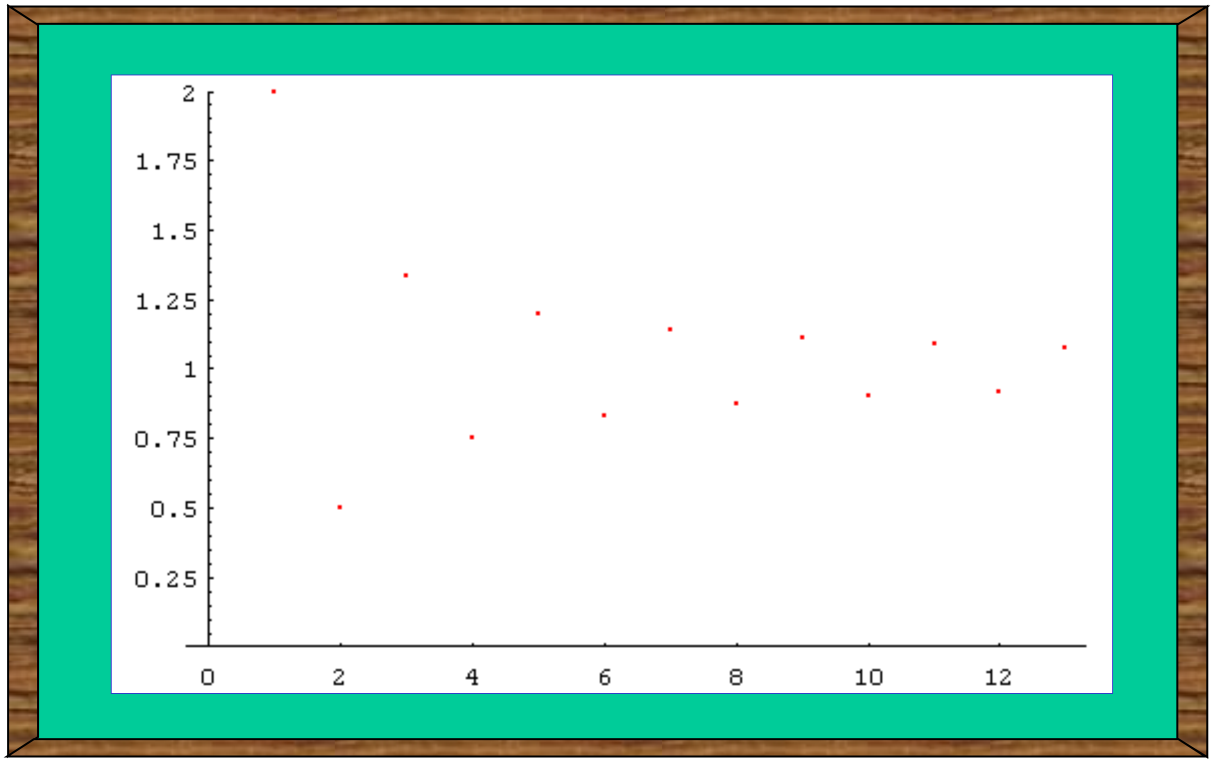
观察数列 $\left\{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当 $n \to \infty$ 时的变化趋势



播放

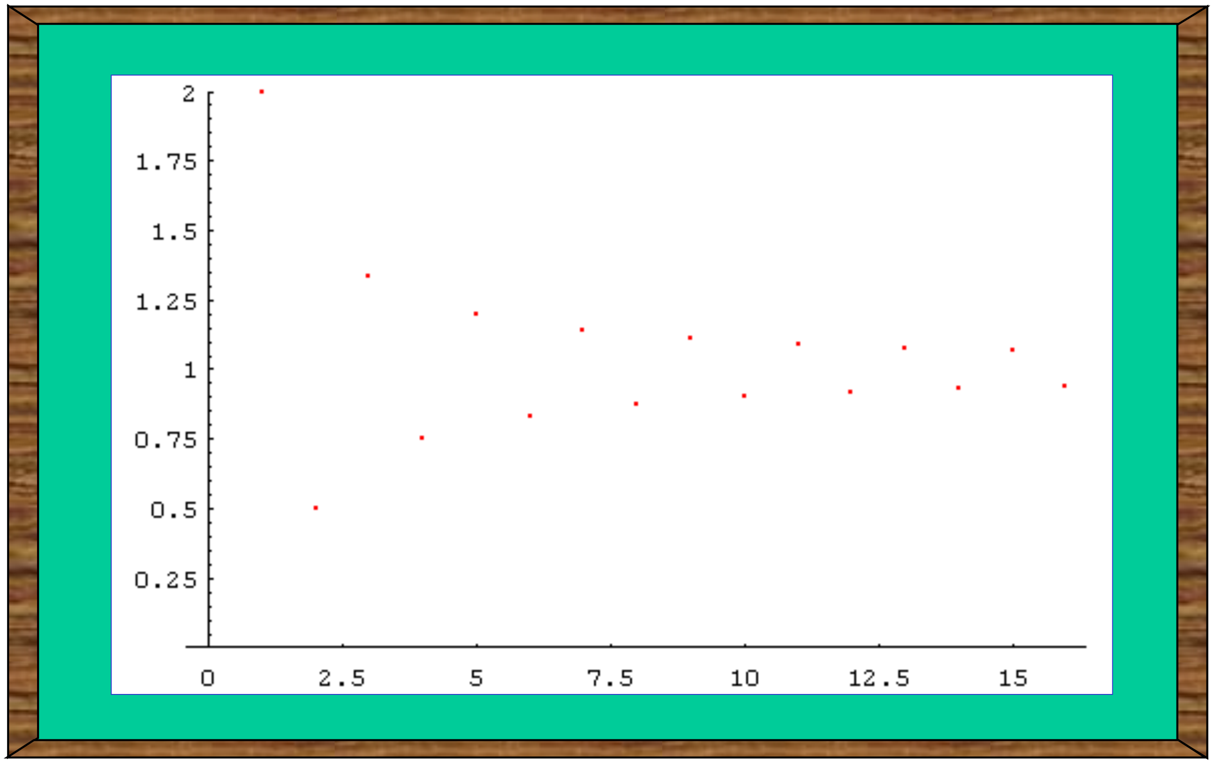
4. 数列极限：

观察数列 $\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势



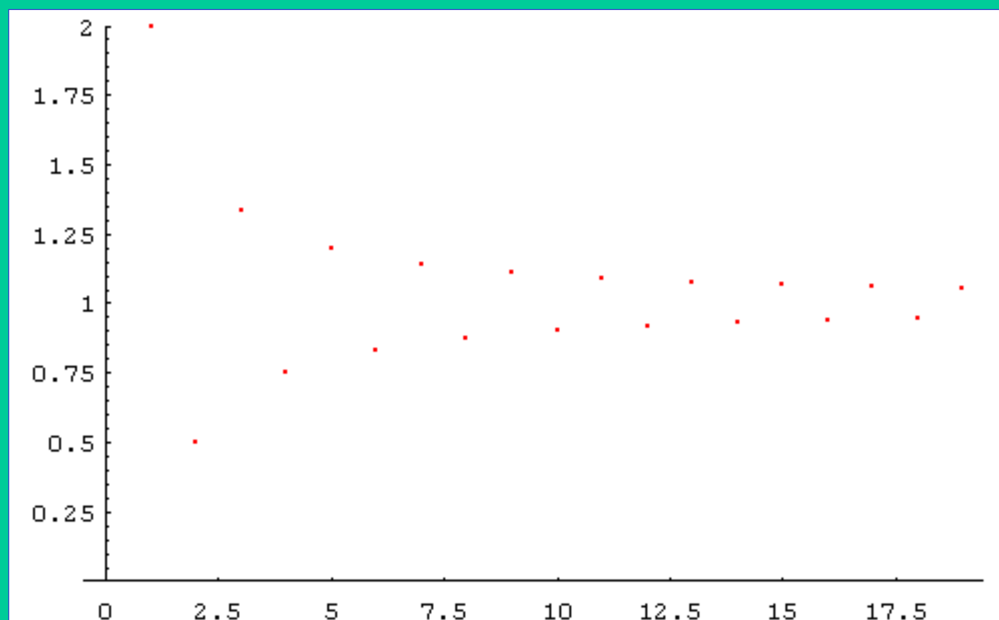
4. 数列极限：

观察数列 $\left\{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势



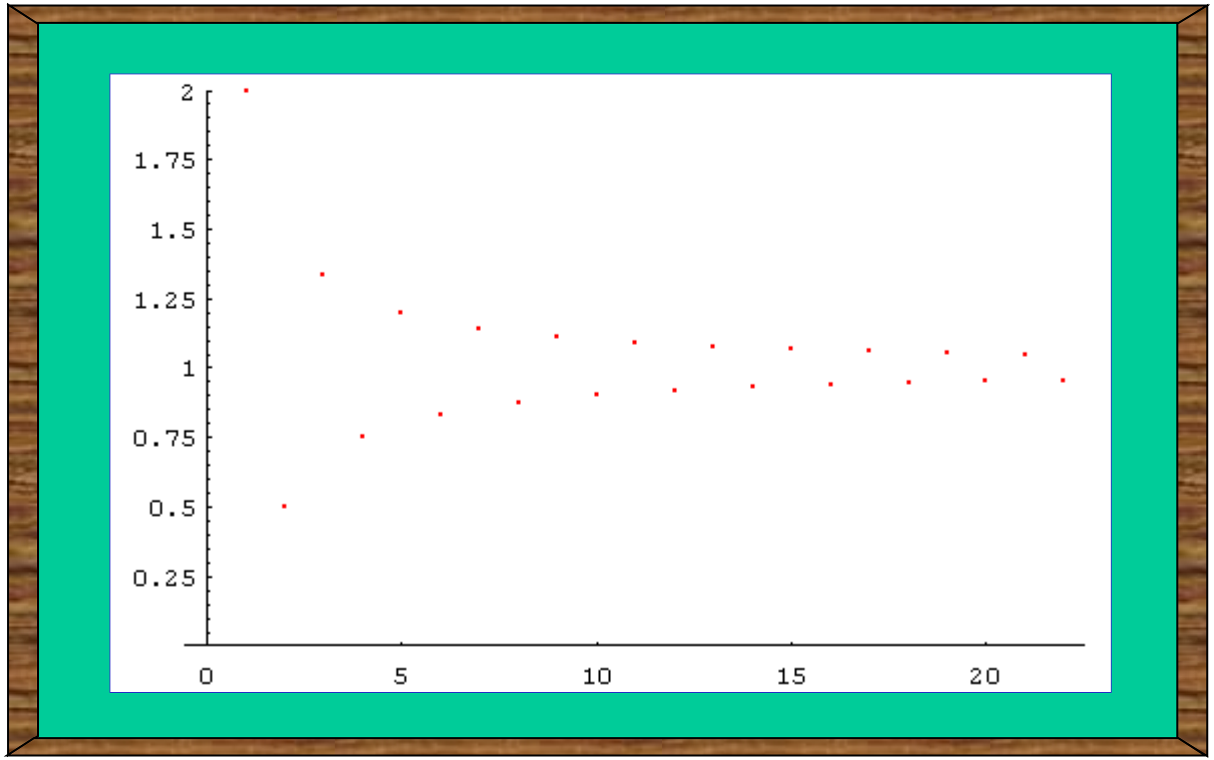
4. 数列极限：

观察数列 $\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势



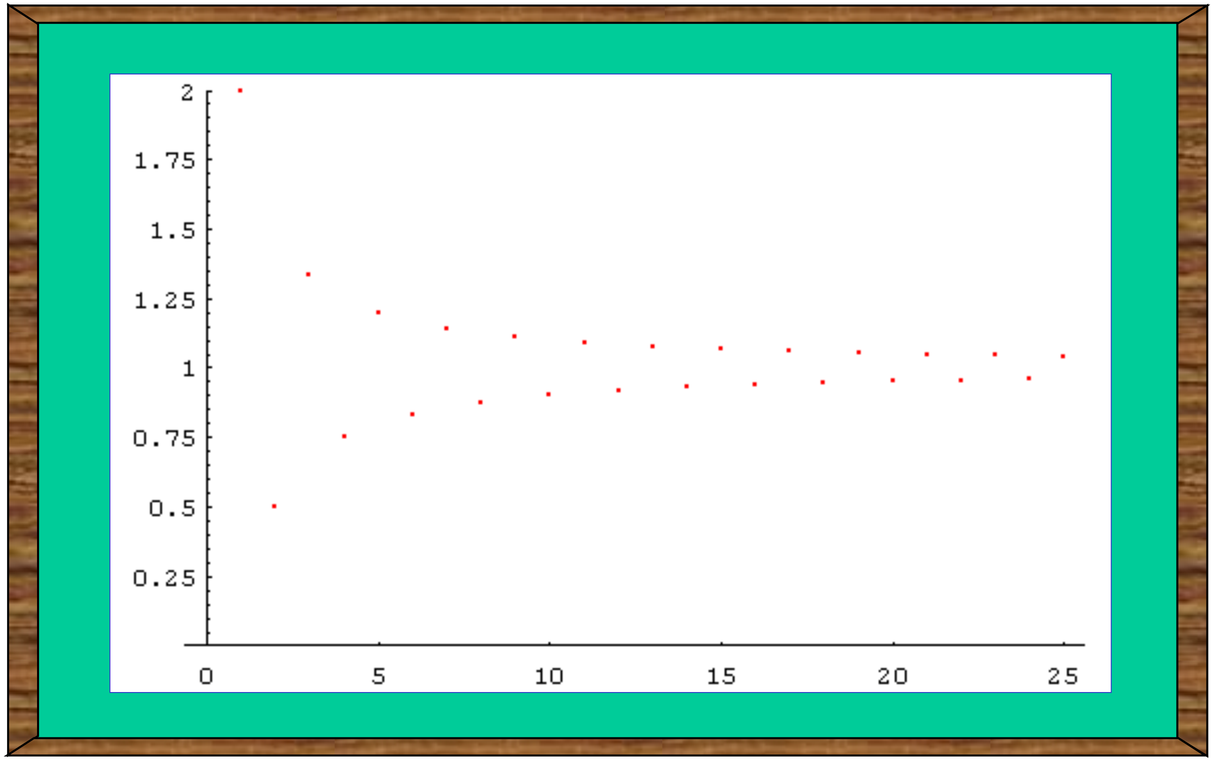
4. 数列极限：

观察数列 $\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势



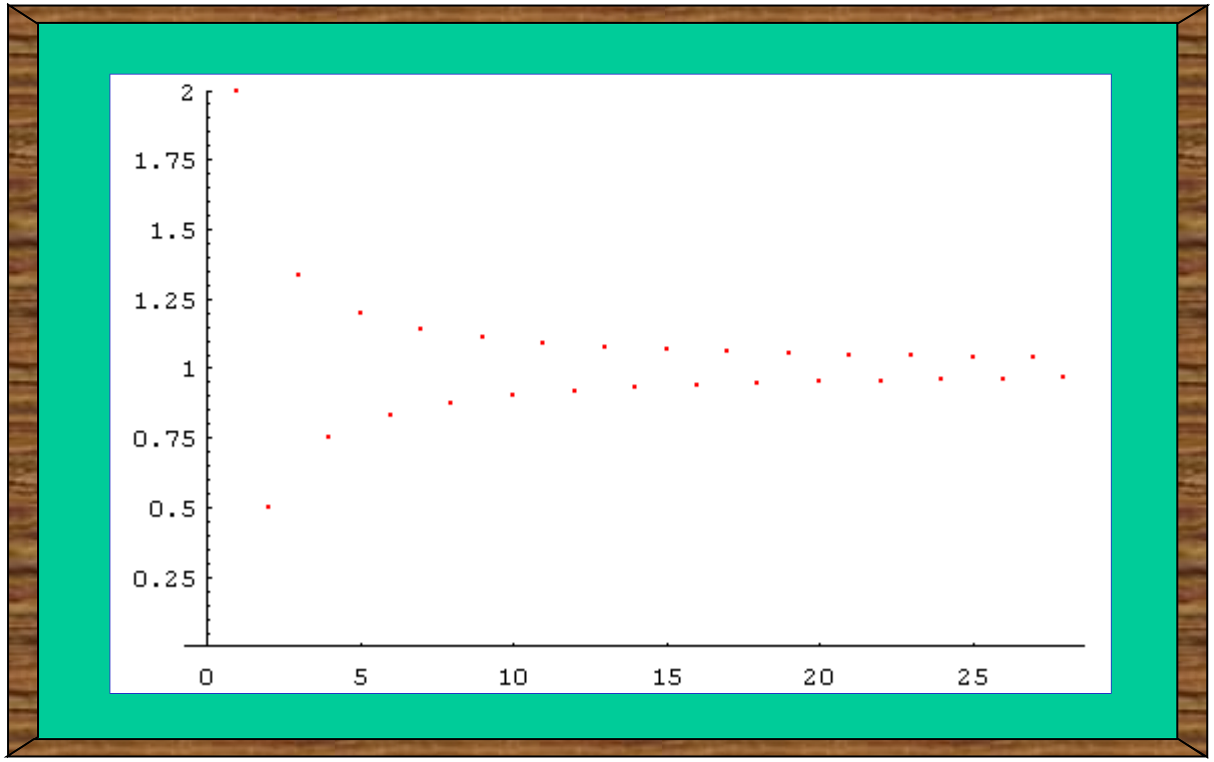
4. 数列极限：

观察数列 $\left\{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势



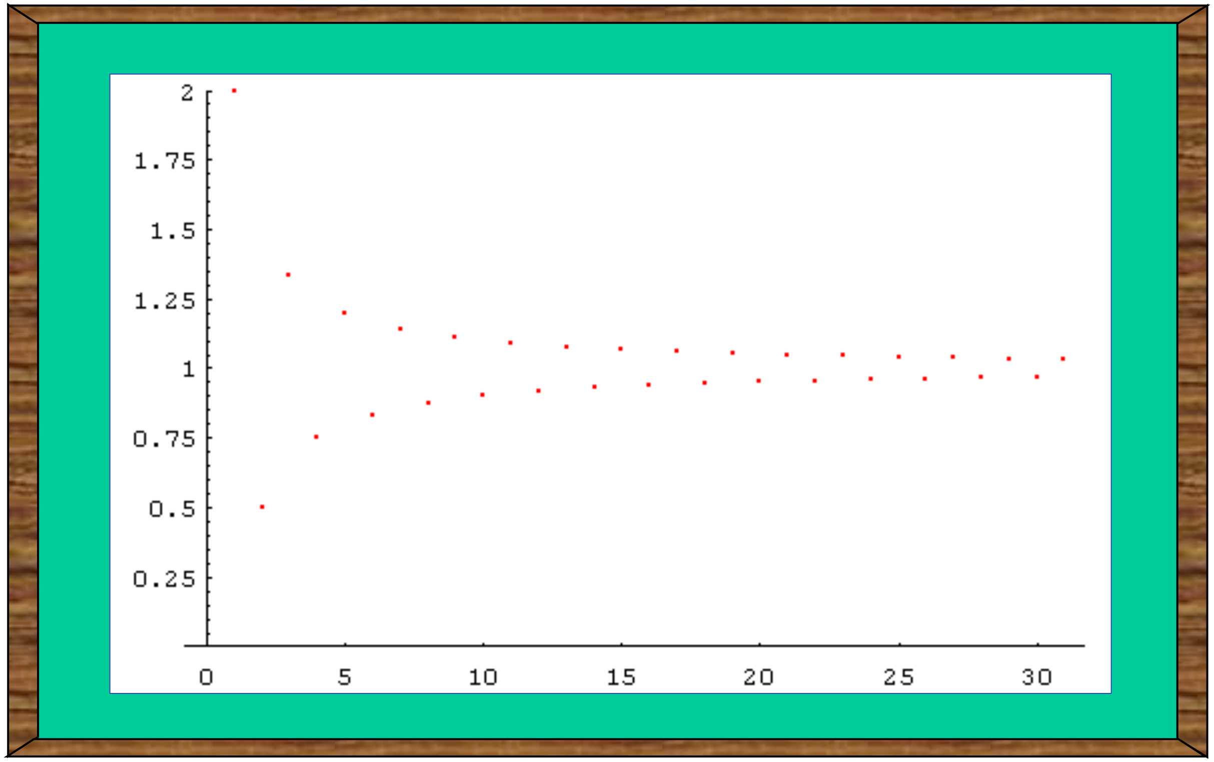
4. 数列极限：

观察数列 $\left\{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势



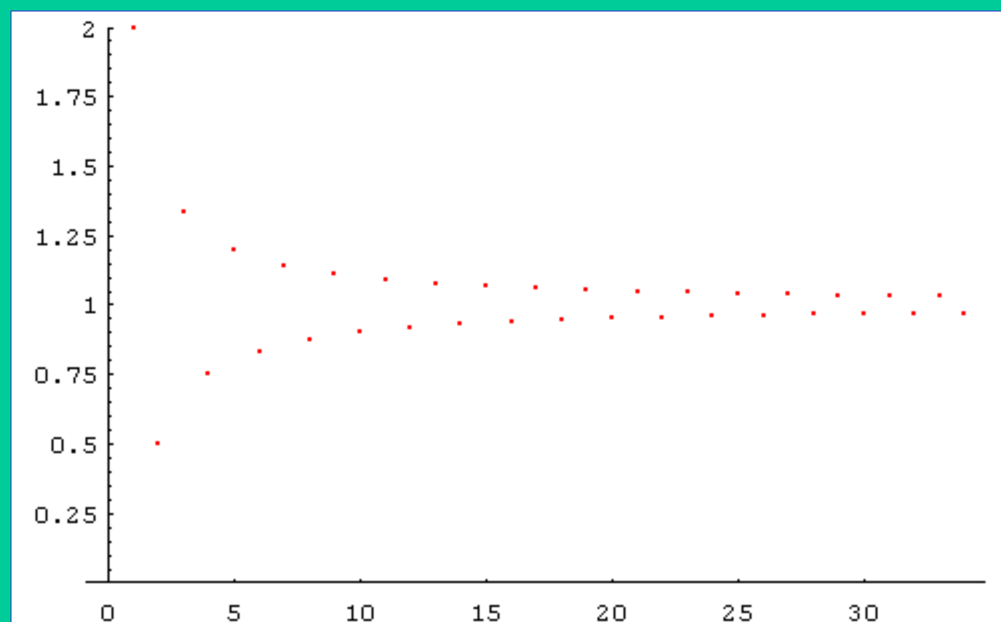
4. 数列极限：

观察数列 $\left\{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势



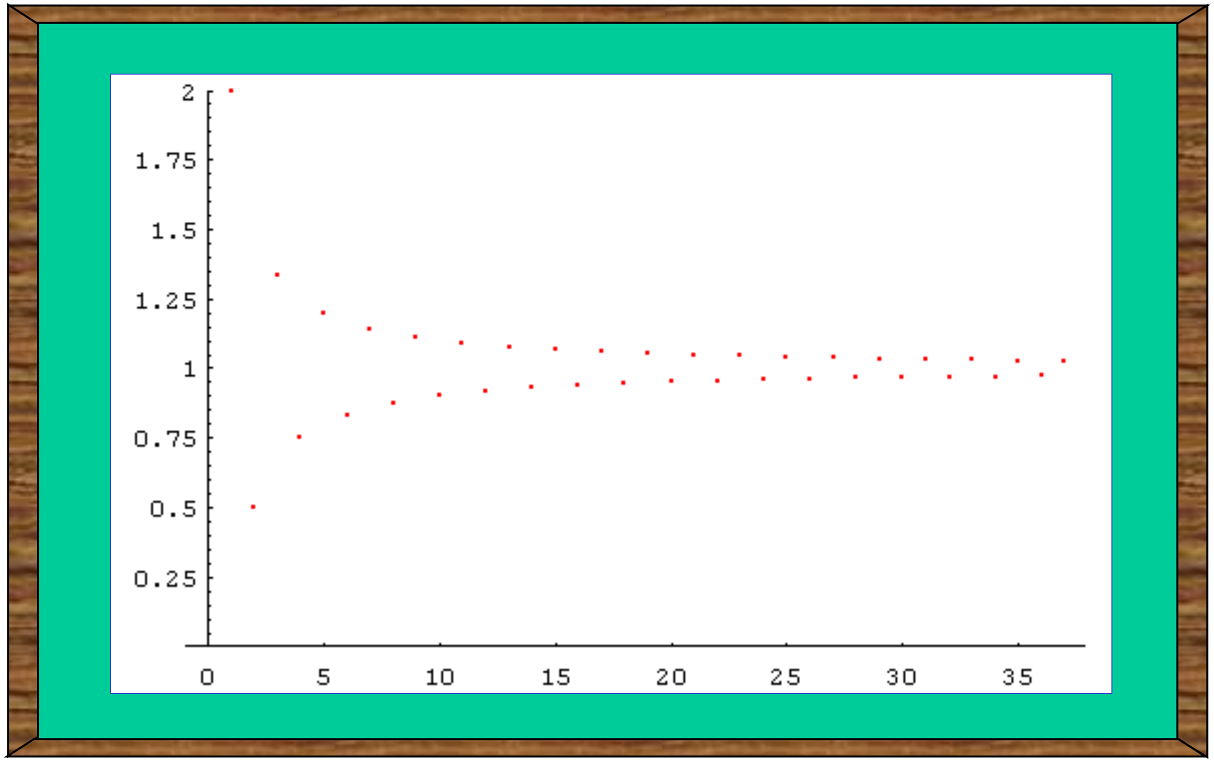
4. 数列极限：

观察数列 $\left\{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势



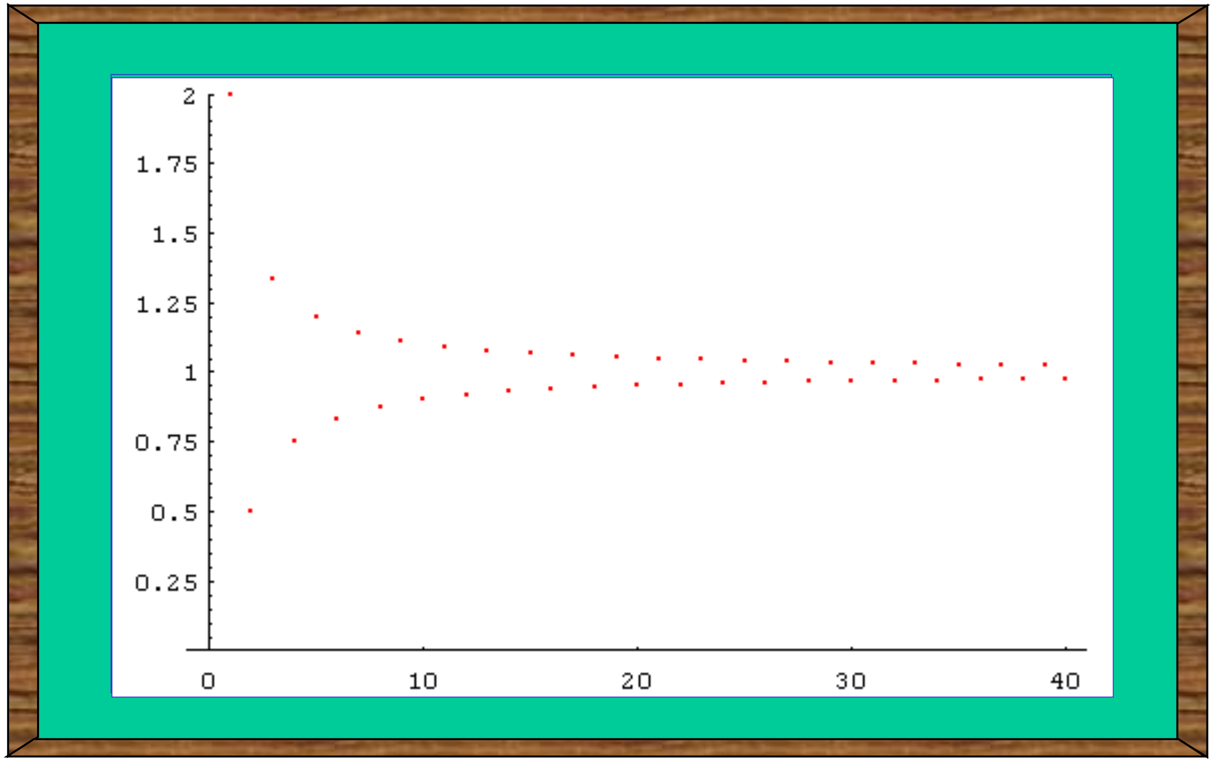
4. 数列极限：

观察数列$\left\{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$当$n\to\infty$ 时的变化趋势



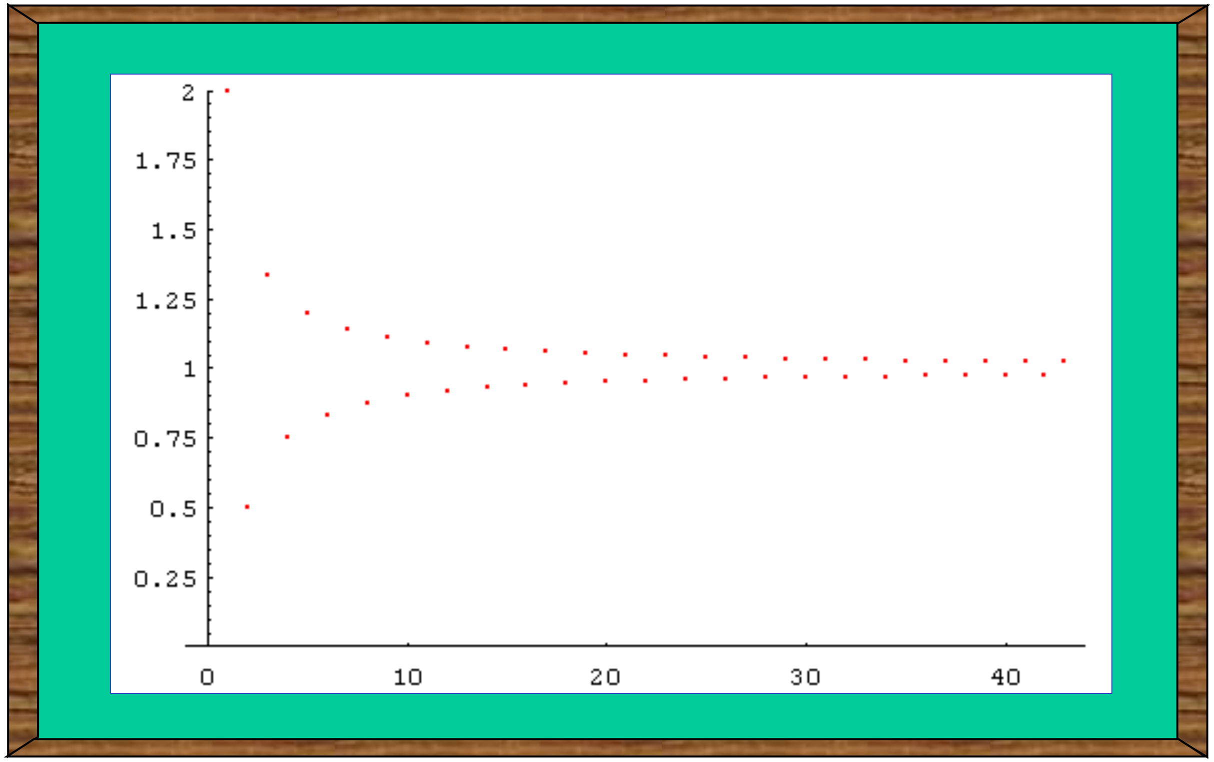
4. 数列极限：

观察数列 $\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势



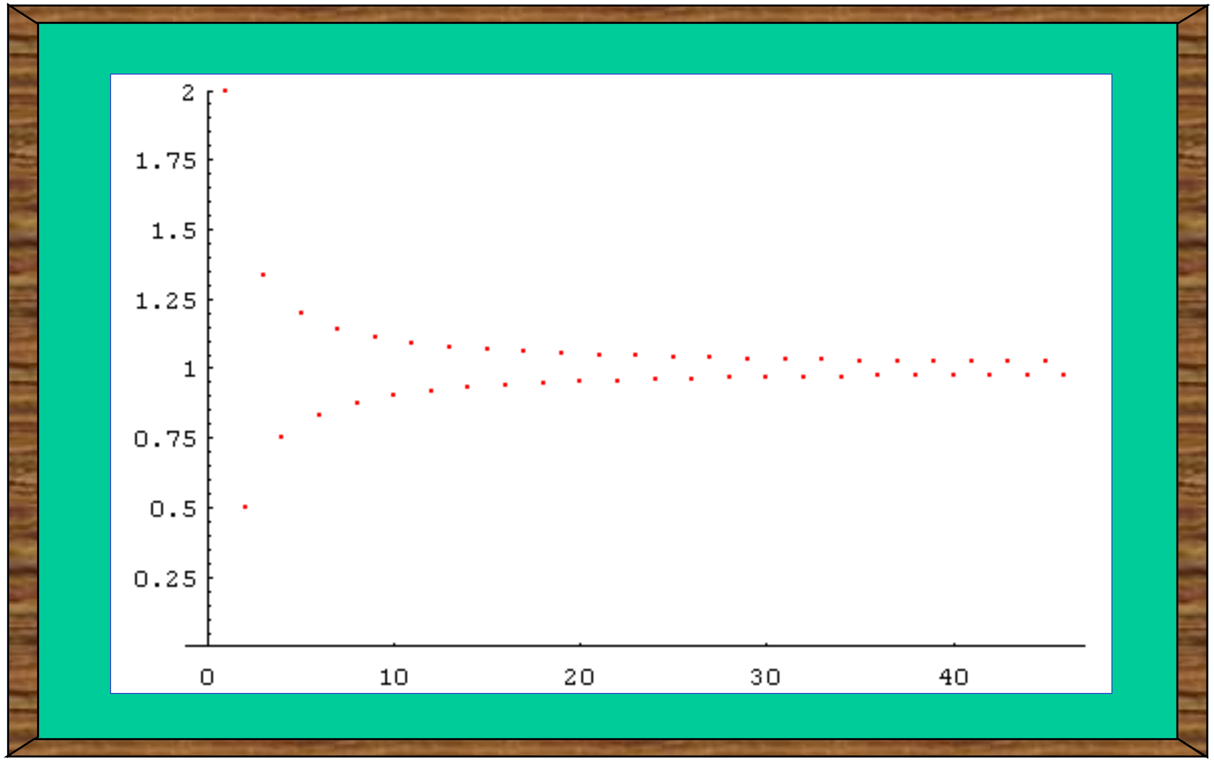
4. 数列极限:

观察数列 $\left\{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势



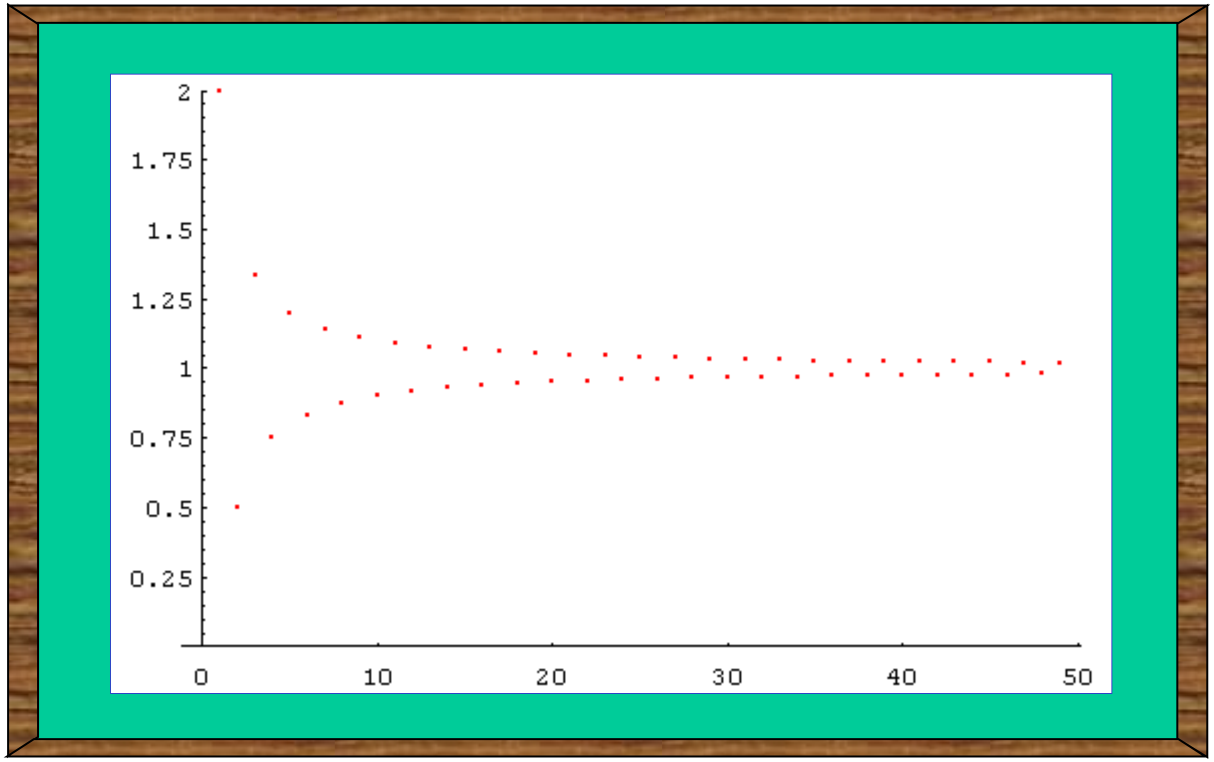
4. 数列极限：

观察数列 $\left\{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势



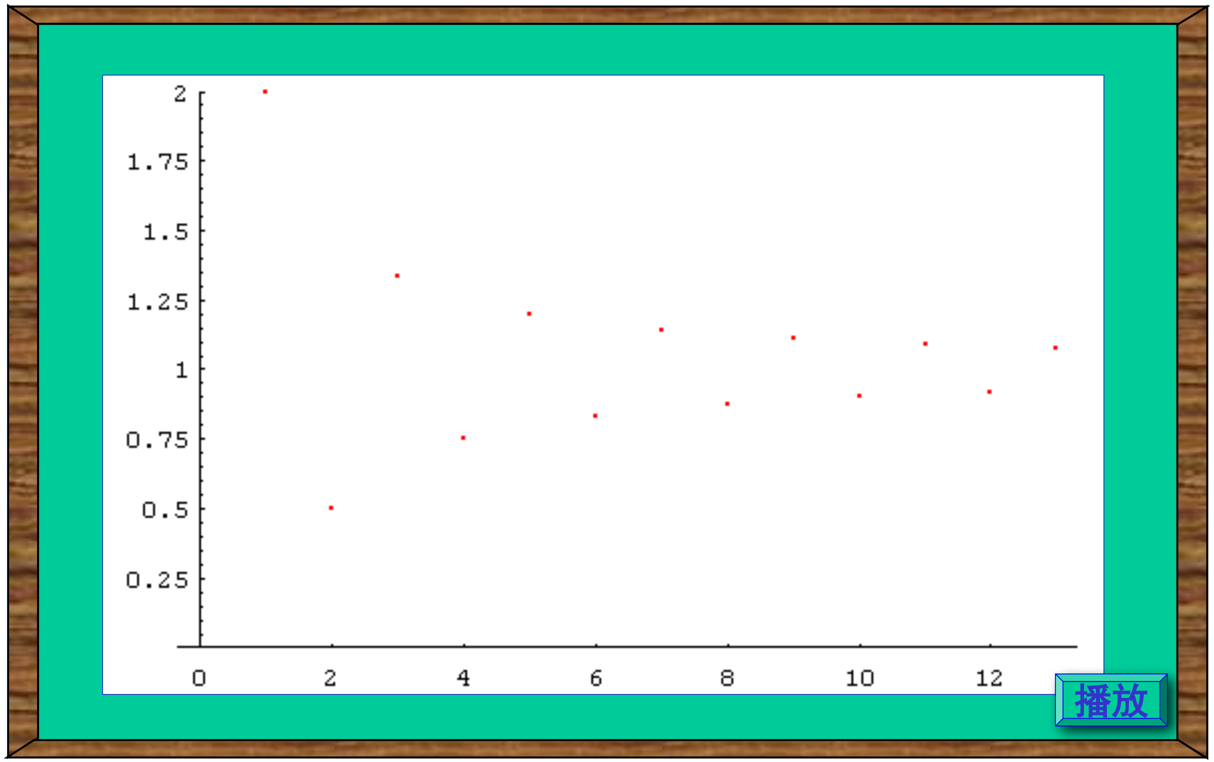
4．数列极限：

观察数列 $\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势



4. 数列极限：

观察数列 $\left\{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势



问题: 当n无限增大时，x_n是否无限地接近于某确定的数值？ 如何确定该值？

通过上面演示实验的观察：

当 n 无限增大时, $x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于 1.

问题: "无限接近"意味着什么?如何用数学语言刻划它.

$$\because \quad |x_n - 1| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n},$$

给定 $\frac{1}{100}$,由 $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$,只要 $n > 100$时,有 $|x_n - 1| < \frac{1}{100}$,

给定 $\frac{1}{1000}$，只要 $n > 1000$ 时，有 $|x_n - 1| < \frac{1}{1000}$，

给定 $\frac{1}{10000}$，只要 $n > 10000$ 时，有 $|x_n - 1| < \frac{1}{10000}$，

给定 $\varepsilon > 0$，只要 $n > N(= [\frac{1}{\varepsilon}])$ 时，有 $|x_n - 1| < \varepsilon$ 成立.

定义 若对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 N，使得对 $n > N$ 的一切 x_n，不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

均成立，则称常数 a 为数列 x_n 的极限（或称 x_n 收敛于 a），记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，或 $x_n \to a \quad (n \to \infty)$.

若数列没有极限，就说数列发散.

注意：

1.不等式$|x_n - a| < \varepsilon$刻划了x_n与a的无限接近；

2.N与任意给定的正数ε有关.

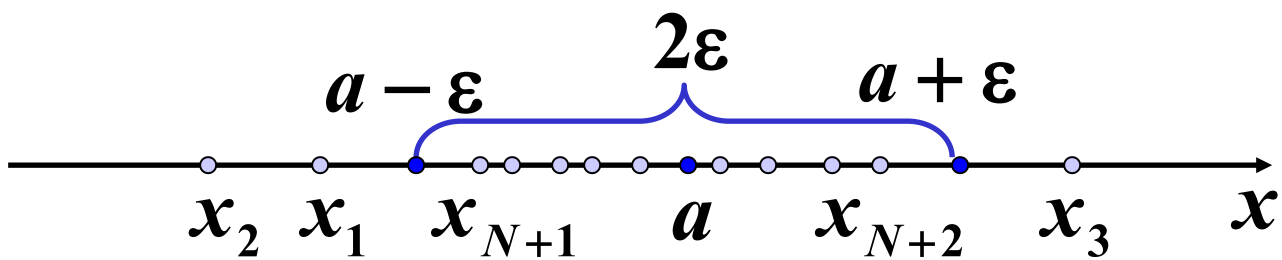
极限的"$\varepsilon - N$"定义：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当$n > N$时，恒有$|x_n - a| < \varepsilon$.

其中$\forall$：每一个或任给的；$\exists$：至少有一个或存在.

5. 几何解释:



当$n>N$时，所有的点x_n度落在$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$内只有有限个点（至多$N$个点）落在该区间内。

注意： 数列极限的定义未给出求极限的方法。

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

证 $\left|x_n - 1\right| = \left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$

任给 $\varepsilon > 0$，要 $\left|x_n - 1\right| < \varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$，或 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$，

所以，取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n > N$ 时，

就有 $\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n} - 1\right| < \varepsilon$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n} = 1.$

例 2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p}{n^\alpha} = 0$，**其中** $\alpha>0$, p **为常数。**

证 任给 $\varepsilon > 0$，因为 $\left|\dfrac{p}{n^\alpha} - 0\right| = \dfrac{|p|}{n^\alpha} < \varepsilon$， 即

$$n > \left(\frac{|p|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.\quad \text{所以,}\quad \text{取}N = \left[\left(\frac{|p|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right],$$

则当$n > N$时,就有 $\left|\dfrac{p}{n^\alpha} - 0\right| < \varepsilon$, 即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p}{n^\alpha} = 0.$

例 3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,其中$|q| < 1$.

证 任给$\varepsilon > 0$, 若$q = 0$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$;

若$0 < |q| < 1$, $|x_n - 0| = |q^n| < \varepsilon$, $n\ln|q| < \ln\varepsilon$,

$\therefore n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$, 取$N = \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$, 则当$n > N$时,

就有$\left|q^n - 0\right| < \varepsilon$, $\quad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$

例 4 设$x_n > 0$,且$\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$,求证

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

证 任给$\varepsilon > 0$, $\because \lim_{n\to\infty} x_n = a$,

$\therefore \exists N$,使得当$n > N$时,恒有$\left|x_n - a\right| < \varepsilon_1$,

从而有$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \dfrac{\left|x_n - a\right|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \dfrac{\left|x_n - a\right|}{\sqrt{a}} < \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{a}} = \varepsilon$

故$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$

例 5 证明：当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$

证 当 $a=1$ 时，结论显然成立。

（1）当 $a>1$时，由于 $\forall\varepsilon>0$，有

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon,$$

即 $\frac{1}{n}\ln a<\ln(1+\varepsilon),$ 或 $n>\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}.$

故取 $N\geq\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)},$ 或 $N=\left[\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right].$

于是，当 $n>N$时，必有 $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon.$

（2）当 $0<a<1$时，由于 $\forall 0<\varepsilon<1$，有

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=1-\sqrt[n]{a}<\varepsilon,$$

即 $\frac{1}{n}\ln a>\ln(1-\varepsilon)$，或 $n>\frac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}$.

故取 $N\geq\frac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}$，或 $N=\left[\frac{\ln a}{\ln(1-\varepsilon)}\right]$.

于是，当 $n>N$时，必有 $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon.$

综上可知：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$

小结：用定义证明数列极限时,关键是对任意给定的 $\varepsilon>0$, 找出N, 或说明N存在即可.

6、数列极限的性质

（1）唯一性

定理 1 每个收敛的数列只有一个极限.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$， 由定义，

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2$，使得 当 $n > N_1$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$；

当 $n > N_2$ 时，恒有 $|x_n - b| < \varepsilon$； 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，

则当 $n > N$ 时，有 $|a - b| = |(x_n - b) - (x_n - a)|$

$\le |x_n - b| + |x_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$

上式仅当$a=b$时才能成立.

(2) 有界性

对数列x_n，若存在正数M，使得一切自然数n，恒有$|x_n| \le M$成立，则称数列x_n有界，否则，称为无界. 如，

数列 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$，有界；数列 $x_n = 2^n$，无界.

几何意义：数轴上对应于有界数列的点x_n都落在闭区间$[-M, M]$上.

定理 2　收敛数列必有界.

证　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,　由定义,　取$\varepsilon = 1$,

则$\exists N$,使得当$n > N$时,恒有$|x_n - a| < 1$,

即有 $a - 1 < x_n < a + 1$.

令 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, |a| + 1\}$,

则对一切自然数n,皆有$|x_n| \le M$, 故$\{x_n\}$有界.

注意：有界性是数列收敛的必要条件。因此，

无界数列必发散。

例 6 证明数列$x_n=(-1)^{n+1}$是发散的.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 由定义, 对于$\varepsilon=\frac{1}{2}$,

则$\exists N$,使得当$n>N$时,有$|x_n-a|<\frac{1}{2}$成立,

即当$n>N$时,$x_n\in\left(a-\frac{1}{2},a+\frac{1}{2}\right)$, 区间长度为1.

而x_n无休止地反复取$1,-1$两个数,**不可能同时位于长度为1的区间内.**

事实上,$\{x_n\}$是有界的,但却发散.

(3)　保号性

定理 3（保号性）设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, 若 $a > 0$ (a<0) 则必存在正整数 N, 当 $n > N$ 时，有

$$y_n > 0 \ (\ y_n < 0 \ ).$$

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, 且 $a > 0$, 由极限定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 特别对小于 a 的 ε, 即 $0 < \varepsilon < a$, 总存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有 $|y_n - a| < \varepsilon$, 即

$$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon.$$

因为 $a>\varepsilon, a-\varepsilon>0$, 所以 $y_n>a-\varepsilon>0.$

当 $a<0$ 时，证法类似.

推论 1.1 若存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有 $y_n>0$($y_n<0$), $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$, 则必有 $a\geqslant 0$ (或 $a\leqslant 0$).

(4) 保序性

定理 4 若存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$y_n \geq z_n$， 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = b$,

则 $a \geq b$ 。

(5) 子列的收敛性

在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子列.

如, $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots x_n, \cdots$ $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$

注意: 在子列 $\{x_{n_k}\}$ 中, 一般项 x_{n_k} 是第 k 项, 而

在原数列$\{x_n\}$中却是第 n_k 项，显然，$n_k \geq k$.

引理　收敛数列的任一子列收敛且极限相同.

证　设数列$\{x_{n_k}\}$是数列$\{x_n\}$的任一子数列.

$$\because \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

$\therefore \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$使 $n > N$ 时,恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

取 $K = N$,　则当 $k > K$ 时,　$n_k > n_K \geq N$.

$$\therefore \quad |x_{n_k} - a| < \varepsilon. \qquad \therefore \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

1.2.2 无穷小与无穷大

1、无穷小

极限为零的数列称之.

若对于任意给定的正数ε(不论它多么小),

总存在正整数 N, 使得对于一切 $n > N$, 均有

$|y_n| < \varepsilon$ 恒成立, 则称数列 $\{y_n\}$ 为无穷小, 记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \quad \text{或} \quad y_n \to 0\ (n \to \infty).$$

如，数列 $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 是 $n \to \infty$ 时的无穷小.

2、无穷大

绝对值无限增大的数列称之.

若对于任意给定的正数M(不论它多么大), 总存在正整数N，使得对于一切 $n>N$, 均有$|y_n|>M$ 恒成立, 则称数列$\{y_n\}$为无穷大, 记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty \quad 或 \quad y_n \to \infty (n\to\infty).$$

定理5 若数列y_n为无穷大, 则y_n^{-1}为无穷小；反之，若数列y_n为非零无穷小, 则y_n^{-1}为无穷大。

证 设数列 y_n 为无穷大, 即对于任意 $\varepsilon > 0$，取

$M = \varepsilon^{-1}$, 总存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有

$|y_n| > M = \varepsilon^{-1}$ 恒成立，即 $|y_n^{-1}| < \varepsilon$ 恒成立。

反之，设 y_n 为非零无穷小, 即对于任意 $M > 0$,

取 $\varepsilon = M^{-1}$, 总存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有

$|y_n| < \varepsilon = M^{-1}$ 恒成立，即 $|y_n^{-1}| > M$ 恒成立。

意义： 将一般极限问题转化为无穷小问题.

数列的无穷小常用 α_n, β_n 等符号表示.

3. 无穷小的运算性质

性质1　有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

证　设α_n, β_n为两个无穷小, 即对于任意$\varepsilon > 0$,

存在$N > 0$，使得当$n > N$时，恒有$|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

$|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ 同时成立。于是

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \therefore \alpha_n \pm \beta_n \to 0\,(n \to \infty).$$

注意: 无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

例如, $n \to \infty$时, $\dfrac{1}{n}$是无穷小,

但n个$\frac{1}{n}$之和为1不是无穷小.

性质2　有界数列与无穷小的乘积仍是无穷小.

证　设$\{y_n\}$为有界数列, 即对于任意自然数n,

存在正数M，使得$|y_n|<M$。

由于α_n为无穷小, 即对于任意$\varepsilon>0$,

存在$N>0$，使得当$n>N$时，恒有$|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{M}$,

成立，从而　$|y_n\alpha_n|=|y_n||\alpha_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$

即，$y_n\alpha_n$为无穷小。

推论2　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3　有限个无穷小的乘积也是无穷小.

性质3　无穷小比非零极限列仍为无穷小.

证　设α_n为无穷小，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \neq 0$, 即

对于 $\varepsilon = |a|/2$ ，总存在正整数 N ，当 $n > N$ 时

$$|y_n - a| < |a|/2. \text{ 即 } a - \frac{1}{2}|a| < y_n < a + \frac{1}{2}|a|, \text{ 于是}$$

$$|y_n| > \left||a| - \frac{1}{2}|a|\right| = \frac{1}{2}|a|, \text{ 或 } \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|a|},$$

即 y_n^{-1} 有界。　由性质 2 知，$\alpha_n y_n^{-1}$ 为无穷小。

定理 6 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \Leftrightarrow y_n = a + \alpha_n$,其中 α_n 为无穷小.

证 必要性 设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, 即 $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $|y_n - a| < \varepsilon$.

$\therefore \alpha_n = y_n - a$ 为无穷小 $\therefore y_n = a + \alpha_n$.

充分性 设 $y_n = a + \alpha_n$, 其中 α_n 为无穷小,

即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时,

$|y_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$。

1.2.3 极限的四则运算

定理 7～9 设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} z_n = b$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[y_n \pm z_n] = a \pm b$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[y_n \cdot z_n] = a \cdot b$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{z_n} = \dfrac{a}{b}$, 其中$b \neq 0$.

证（3） 设$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$， $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = b$，且$b \neq 0$， 则

$$y_n = a + \alpha_n,\quad z_n = b + \beta_n,$$

其中α_n, β_n为无穷小，且使$z_n = b + \beta_n \neq 0$，于是

$$\frac{y_n}{z_n} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} = \frac{a}{b} + \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)}.$$

因$\lim\limits_{n\to\infty} b(b+\beta_n) = b^2 \neq 0$，且$b\alpha_n - a\beta_n$为无穷小，

所以，由无穷小性质 3，分式： $\dfrac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)}$

为无穷小，再由定理 6 ，定理得证。

推论 4 设 $\lim_{n\to\infty} y_n$ 存在，c 为常数，则

$$\lim_{n\to\infty} cy_n = c\lim_{n\to\infty} y_n.$$

推论 5 设 $\lim_{n\to\infty} y_n$ 存在，m 为正整数，则

$$\lim_{n\to\infty}(y_n)^m = (\lim_{n\to\infty} y_n)^m.$$

问题： $\lim_{n\to\infty}(y_n)^m = (\lim_{n\to\infty} y_n)^m, m \in \mathbf{R}?$

例7 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right).$

解 当 $n\to\infty$时,是无穷小之和. 先变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 8 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n-1}{2n-1}$.

解 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n-1}{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-2/n-1/n^2}{2/n-1/n^2}$,

由于上式分母极限为零，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)=0.$

因此，商的法则不可用，但原式的倒数有极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n^2-2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2/n-1/n^2}{3-2/n-1/n^2}=0,$$

由定理 5 知：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n-1}{2n-1}=\infty.$

例 9 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(a+aq+\cdots+aq^{n-1})$，

其中 $a\neq 0,\ |q|<1$.

解 因为 $a+aq+\cdots+aq^{n-1}=\dfrac{a}{1-q}-\dfrac{aq^n}{1-q}$，

所以 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{1-q}-\dfrac{aq^n}{1-q}\right)=\dfrac{a}{1-q}$。

例 10 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right].$

解 由于 $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right),$

所以，原式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

1.2.4 极限存在两准则

1. 夹逼准则

准则Ⅰ 若数列x_n, y_n及z_n满足下列条件:

(1) $y_n \le x_n \le z_n, \quad (n > N)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a,$

则数列x_n的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

注意 用夹逼准则求极限关 键是求出y_n与z_n，且y_n与z_n的极限易求且相等 .

证 $\because y_n \to a,\quad z_n \to a,\quad \therefore \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 > 0,$

使得 当 $n > N_1$时, 恒有$|y_n - a| < \varepsilon,$

和$|z_n - a| < \varepsilon,$ 取 $N_0 = \max\{N, N_1\},$

则当 $n > N_0$ **时,**

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \qquad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon,$$

即 $$a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon,$$

即$|x_n - a| < \varepsilon$成立,

$$\therefore \lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

例11 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 $\because \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=1$, 由夹逼定理

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

例12 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

解 因为 $\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}>\left(3^n\right)^{\frac{1}{n}}=3$. 又

$$\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}=3\left(\frac{1}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}+1\right)^{\frac{1}{n}}<3\times 3^{\frac{1}{n}}.$$

即 $$3<\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}<3\times 3^{\frac{1}{n}}.$$

又因 $\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$，根据夹逼准则，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}=3.$$

例13 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$.

解 由于当 $n\geq 2$ 时，有

$$0\leq\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{n}\leq\frac{4}{n},$$

因此，由夹逼准则，从上式得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0.$$

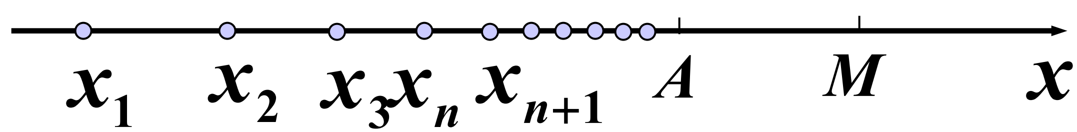
2. 单调有界准则

如果数列 x_n 满足条件

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \le x_2 \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots, \quad \text{单调增加} \\ x_1 \ge x_2 \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots, \quad \text{单调减少} \end{array}\right\} \text{单调数列}$$

准则 II 单调有界数列必收敛. （证略）

几何解释:



例14 证明数列 $x_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ **（n重根式）的极限存在，并求此极限.**

证 显然 $x_{n+1}>x_n$，$\therefore \{x_n\}$是单调递增的;

又 $\because x_1<3$, 假定 $x_k<3$, $x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3.$

$\therefore \{x_n\}$有界. 即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}^2=\lim\limits_{n\to\infty}(3+x_n)$, $a^2=3+a$,

解得$a=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $a=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去). $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

例15 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在.

证 设 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，则

$$x_n=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

类似地,

$$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

显然 $x_{n+1} > x_n$, $\quad \therefore \{x_n\}$ 是单调递增的;

$$x_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3, \qquad \therefore \{x_n\}\text{是有界的}.$$

因此，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在。

特记： $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}} = 2.718281828\cdots.$

例16 求极限 $\lim_{n\to\infty} y_n$, 其中 $y_n = 1+\frac{y_{n-1}}{1+y_{n-1}}$, $y_0 = 1$.

解 （单调性） 由已知 $y_1 = 1+\frac{y_0}{1+y_0} = 1.5$,

$$y_2 = 1+\frac{y_1}{1+y_1} = 1.6 > y_1.$$

再设 $y_k > y_{k-1}$, 那么

$$y_{k+1}-y_k = \frac{y_k}{1+y_k}-\frac{y_{k-1}}{1+y_{k-1}} = \frac{y_k-y_{k-1}}{(1+y_k)(1+y_{k-1})},$$

即 $y_{k+1}-y_k > 0$.

所以，对一切自然数 n，有 $y_{n+1} > y_n$，$\{y_n\}$ 单调增加.

（有界性） 显然，$1 < y_n < 2$，即 $\{y_n\}$ 有 界.

根据准则II，数列 $\left\{y_n\right\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，

$a = 1 + \dfrac{a}{1+a}$， 即 $a^2 - a - 1 = 0$，解此方程得

$a = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$， 因为 $a > 0$，负根舍去，于是

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

1.2 小结与思考题

本节基本内容

数列： 研究其变化规律.

数列极限： 极限思想, 精确定义, 几何意义.

收敛数列的性质： 唯一性、有界性、保号性及子列的收敛性.

两个准则： 夹逼准则; 单调有界准则 .

思考题

指出下列证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$中的错误。

证　要使 $\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$, 只要使 $\dfrac{1}{n}\ln n<\ln(1+\varepsilon)$

从而由 $\dfrac{1}{n}<\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln n}<\dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 2}\quad(n>2)$

得 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{\ln 2}{\ln(1+\varepsilon)}\right]+1$

当 $n>N$ 时，必有 $0<\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$ 成立

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

思考题解答

$\because \quad \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon \sim \dfrac{\ln n}{n} < \ln(1+\varepsilon)$ （等价）

证明中所采用的 $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln n} < \dfrac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 2}$

实际上就是不等式 $\dfrac{\ln 2}{n} < \dfrac{\ln n}{n} < \ln(1+\varepsilon)$

即证明中没有采用“适当放大” $\dfrac{\ln n}{n}$ 的值

反而缩小为 $\dfrac{\ln 2}{n}$

从而 $n > N > \dfrac{\ln 2}{\ln(1+\varepsilon)}$ 时,

仅有 $\dfrac{\ln 2}{n} < \ln(1+\varepsilon)$ 成立,

但不是 $\dfrac{\ln n}{n} < \ln(1+\varepsilon)$ 的充分条件.

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

证 设 $\sqrt[n]{n}-1=\lambda$，则 $n=(1+\lambda)^n$, 即

$$n=1+n\lambda+\frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2\cdots,\quad (n>1)$$

或 $n\geqslant 1+\frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2,\quad \lambda\leqslant\sqrt{\frac{2}{n}}.$

对任意 $\varepsilon>0$, 令 $\sqrt{\frac{2}{n}}<\varepsilon$，即 $n>2\varepsilon^{-2}$.

取 $N=[2\varepsilon^{-2}]$, 则当 $n>N$ 时，有 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon.$

课堂练习题

一、 利用数列极限的定义证明:

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$； 2、$\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个9}=1$.

二、 设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}x_n y_n=0.$$