

第一章 函数与极限

第一节：映射与函数

1 集合

集合 具有某种特定性质的事物的总体，组成这个集合的事物称为该集合的元素. $a \in M$,

$a \notin M$, $M = \{ x | x \text{ 所具有的特征} \}$

一般集合

$$A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$$

有限集合

$$A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \}$$

无限集合

若 $x \in A$, 则必 $x \in B$, 就说 A 是 B 的子集.

记作 $A \subseteq B$.

数集分类: $\mathbf{N}$ ----自然数集 $\mathbf{Z}$ ----整数集
 $\mathbf{Q}$ ----有理数集 $\mathbf{R}$ ----实数集

数集间的关系: $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}.$

若 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$, 就称集合 A 与 B 相等. ($A = B$)

例如 $A = \{1, 2\},$

$C = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\},$ 则 $A = C.$

不含任何元素的集合称为空集. (记作 $\emptyset$)

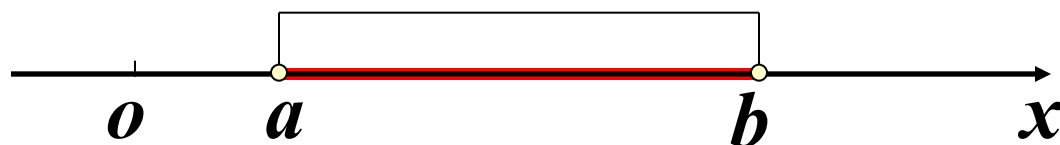
例如, $\{x | x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$

规定 空集为任何集合的子集.

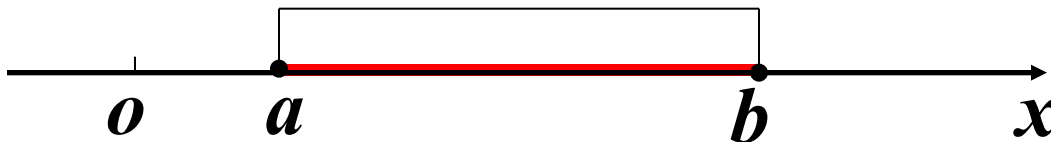
区间 指介于某两个实数之间的全体实数.这两个实数叫做区间的端点.

$\forall a, b \in R, \text{ 且 } a < b.$

$\{ x \mid a < x < b \}$ 称为开区间, 记作 (a, b)



$\{ x \mid a \leq x \leq b \}$ 称为闭区间, 记作 $[a, b]$



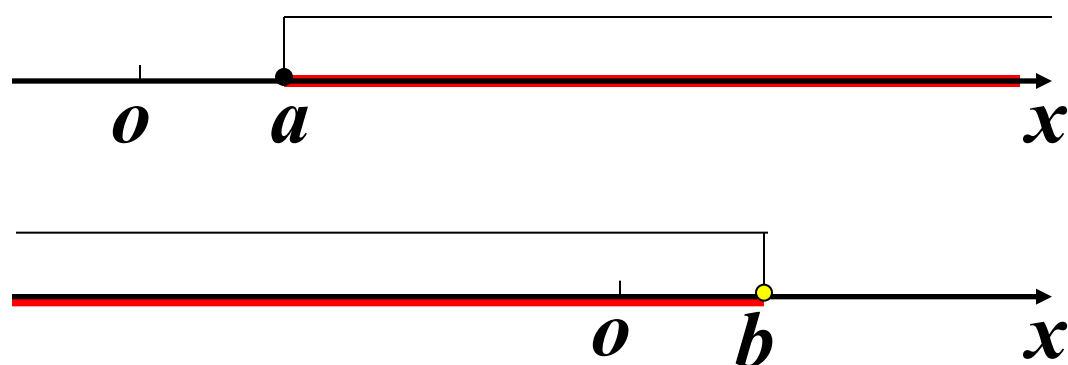
$\{ x \mid a \leq x < b \}$ 称为半闭区间, 记作 $[a, b)$

$\{ x \mid a < x \leq b \}$ 称为半开区间, 记作 $(a, b]$

有限区间

$[a, +\infty) = \{ x \mid a \leq x \}$ $(-\infty, b) = \{ x \mid x < b \}$

无限区间



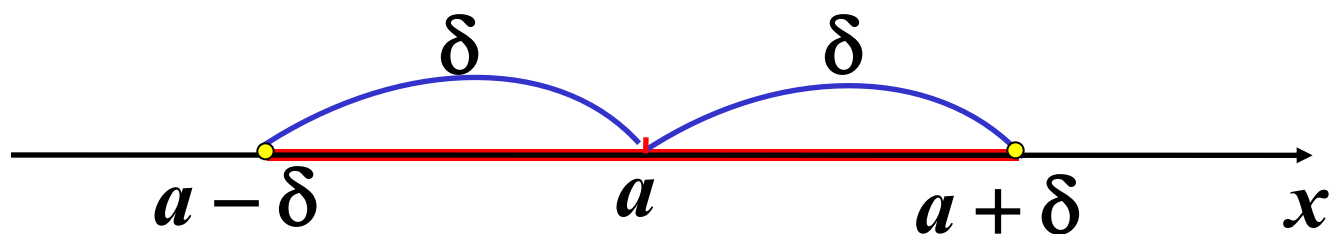
区间长度的定义:

两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度.

邻域 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$.

数集 $\{ x \mid |x - a| < \delta \}$ 称为点 a 的 δ 邻域，
点 a 叫做这邻域的中心， δ 叫做这邻域的半径．

$$U_{\delta}(a) = \{ x \mid a - \delta < x < a + \delta \}.$$

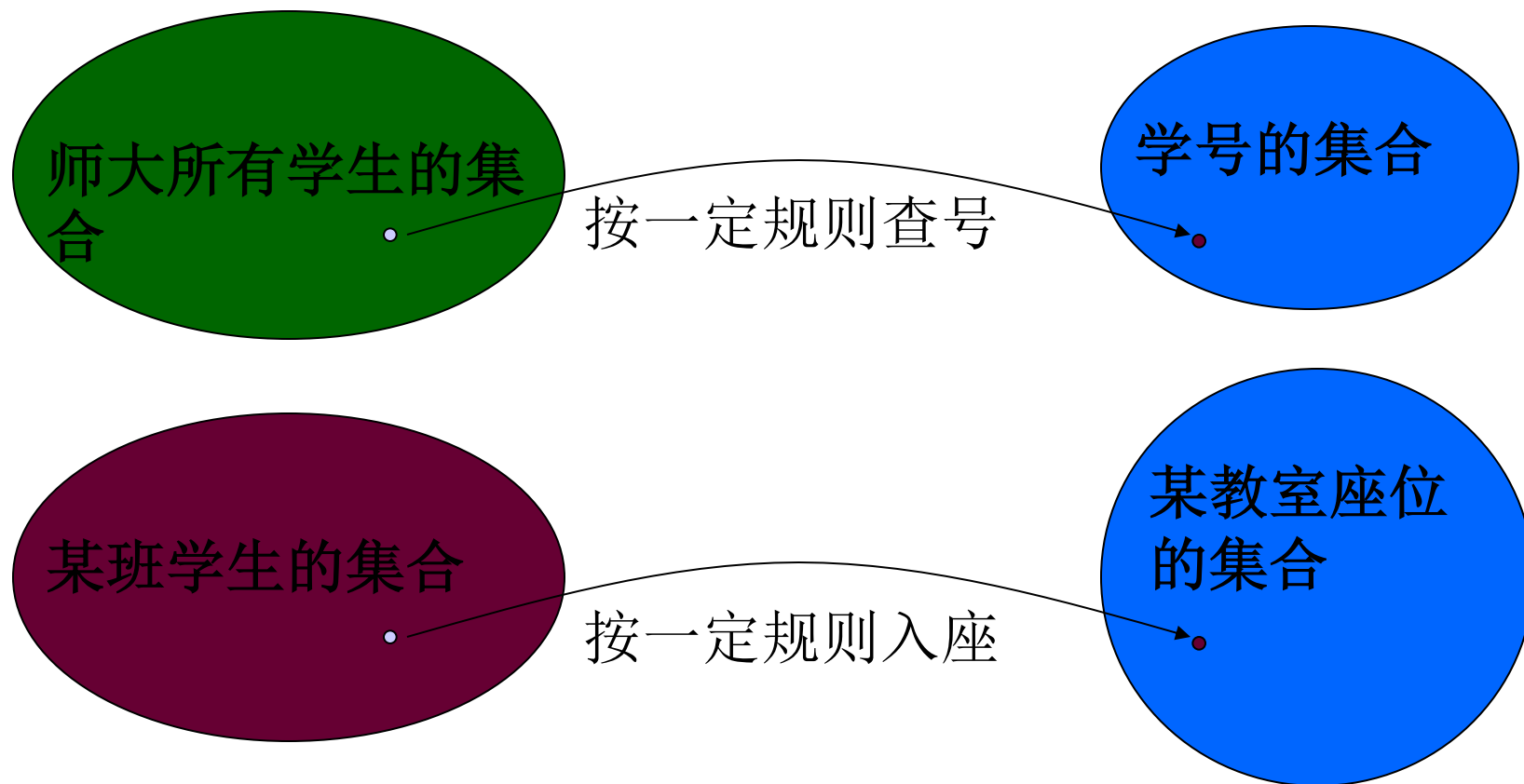


点 a 的去心的 δ 邻域，记作 $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$.

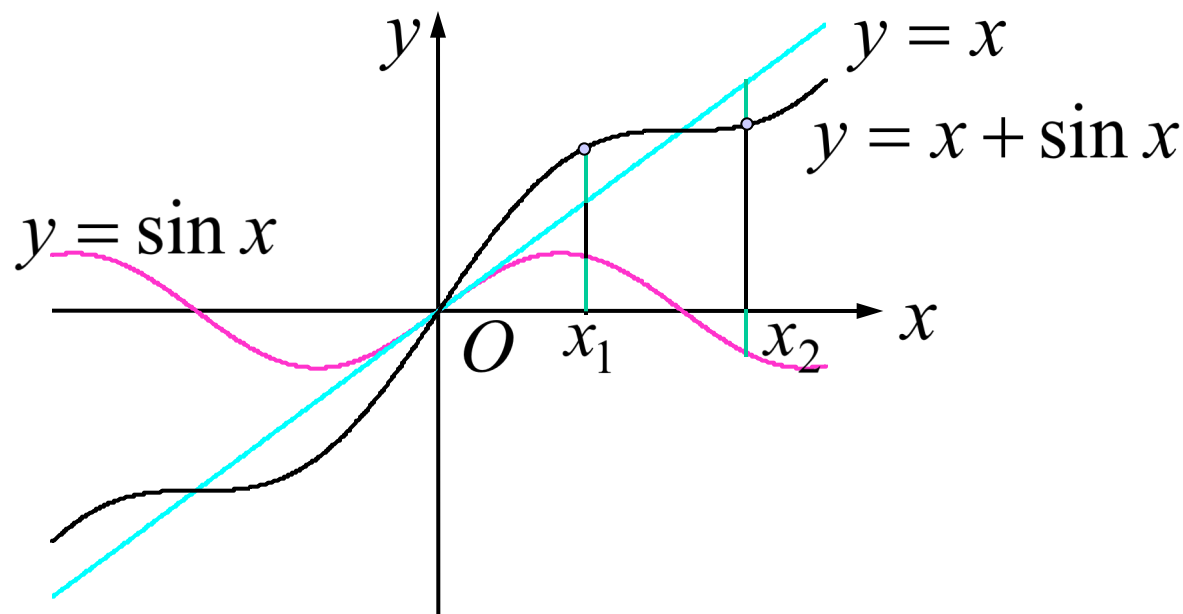
$$\overset{\circ}{U}_{\delta}(a) = \{ x \mid 0 < |x - a| < \delta \}.$$

2. 映射

引例1.



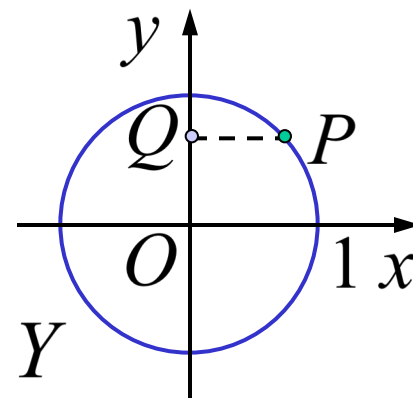
引例2. $\forall x \in \mathbf{R} \xrightarrow{y = x + \sin x} y \in \mathbf{R}$



引例3. $C = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ (点集)

$Y = \{ (0, y) \mid -1 \leq y \leq 1 \}$ (点集)

$\forall$ 点 $P \in C \xrightarrow{\text{向 } y \text{ 轴投影}} \text{投影点 } Q \in Y$



定义4. 设 X, Y 是两个非空集合, 若存在一个对应规则 f , 使得 $\forall x \in X$, 有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应, 则称 f 为从 X 到 Y 的映射, 记作 $f: X \rightarrow Y$.



元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的像, 记作 $y = f(x)$.

元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的原像.

集合 X 称为映射 f 的定义域;

Y 的子集 $R_f = f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$ 称为 f 的值域.

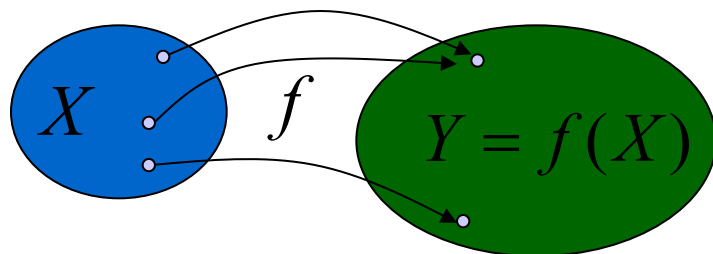
注意: 1) 映射的三要素—定义域, 对应规则, 值域.

2) 元素 x 的像 y 是唯一的, 但 y 的原像不一定唯一.

对映射 $f: X \rightarrow Y$

若 $f(X) = Y$, 则称 f 为满射;

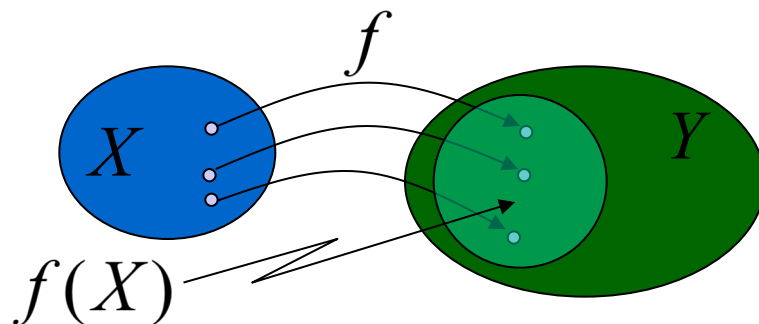
引例2, 3



若 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 有
 $f(x_1) \neq f(x_2)$

则称 f 为单射;

引例2



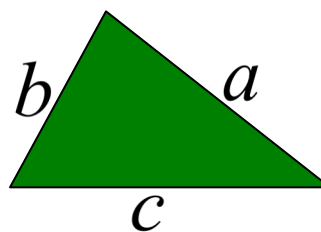
若 f 既是满射又是单射, 则称 f 为双射 或一一映射.

引例2

例1. $\forall \text{三角形} \in \Delta$ (三角形集合)

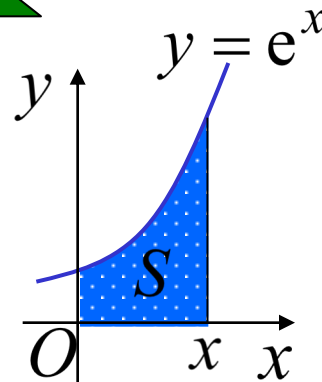
↓ 海伦公式

Δ 面积 $S \in (0, +\infty)$ (满射)



例2. 如图所示, $\forall x \in [0, +\infty)$

对应阴影部分的面积 $S \in [0, +\infty)$

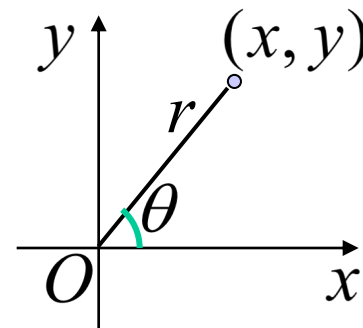


则在数集 $[0, +\infty)$ 自身之间定义了一种映射

(满射)

例3. 如图所示, 则有

$$f: \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



$$(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \xrightarrow{f} (x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ (满射)}$$

说明:

映射又称为算子. 在不同数学分支中有不同的惯用名称. 例如,

$$X (\neq \emptyset) \xrightarrow{f} Y (\text{数集}) \quad f \text{ 称为 } X \text{ 上的泛函}$$

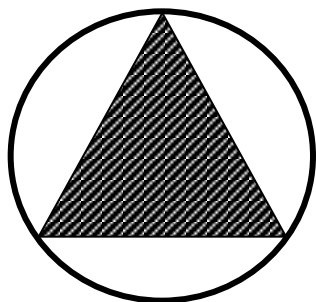
$$X (\neq \emptyset) \xrightarrow{f} X \quad f \text{ 称为 } X \text{ 上的算子 (变换)}$$

$$X (\text{数集 或点集}) \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

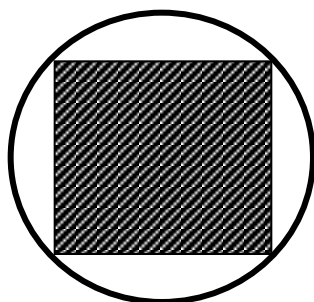
f 称为定义在 X 上的函数

3 函数的概念

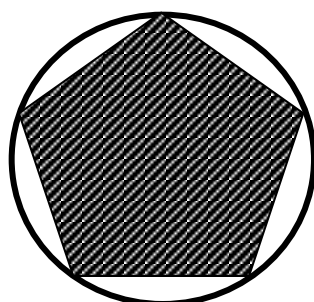
引例 圆内接正多边形的周长



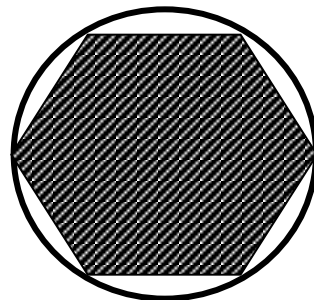
S_3



S_4



S_5

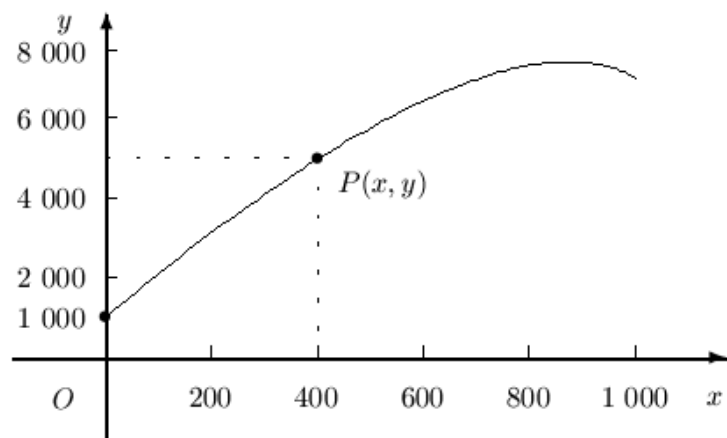


S_6

$$S_n = 2nr \sin \frac{\pi}{n}$$
$$n = 3, 4, 5, \dots$$



例 某化工厂的日产量与每日产品的总成本相互联系着. 若日产量为 x (单位: t), 总成本为 y (单位: 元). 如下图表示的是日产量在 1 000 t 以内时的总成本曲线. 横坐标表示产量, 纵坐标表示总成本, 曲线上每一点 $P(x, y)$ 表示与产量 x 对应的总成本是 y .



函数： 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个非空数集.

若按一定的对应规则 f , 对任意 $x \in D$, 变量 y

都有确定的数值与它对应, 则称 y 是 x 的函数,

记作:

$$y = f(x)$$

D 叫做这个函数的定义域

因变量

自变量

或 $f : D \rightarrow \mathbf{R}$

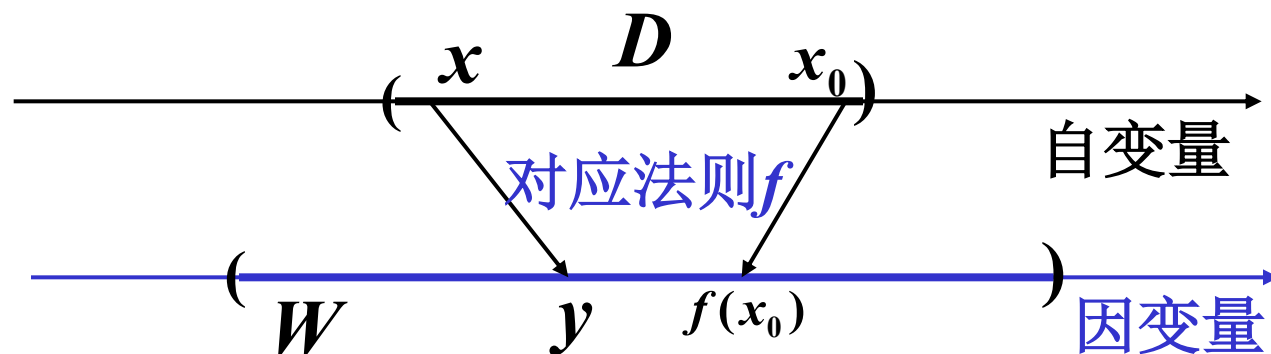
当 $x_0 \in D$ 时, 称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的函数值.

函数值的全体组成的数集: $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$

称为函数的值域.

函数 $y = f(x)$ 的定义域 D_f 和值域 $f(D)$.

函数的两要素：定义域与对应法则.

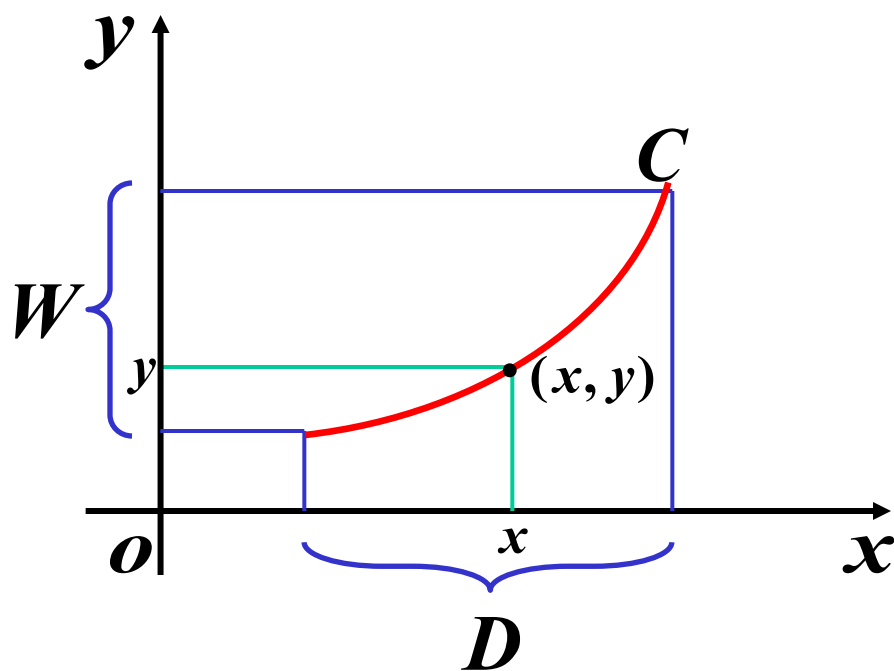


约定：定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值（自然定义域）。

例如, $y = \sqrt{1-x^2}$ $D: [-1,1]$

例如, $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D: (-1,1)$

若自变量在定义域内任取一个数值时，对应的值不唯一，称其为多值函数，否则单值函数。多值函数可化为若干单值函数。

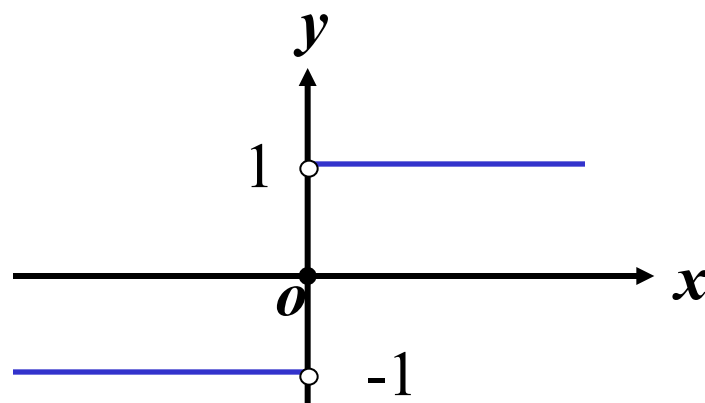


定义： 点集 $C = \{ (x, y) \mid y = f(x), x \in D \}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形.

几个特殊的函数举例：

(1) 符号函数

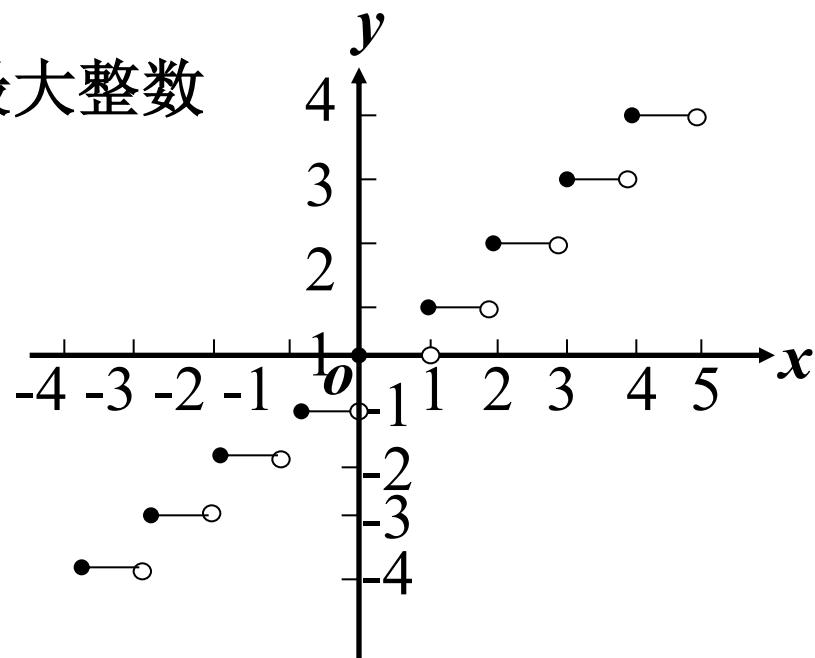
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0 \\ 0 & \text{当 } x = 0 \\ -1 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$



$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

(2) 取整函数 $y=[x]$

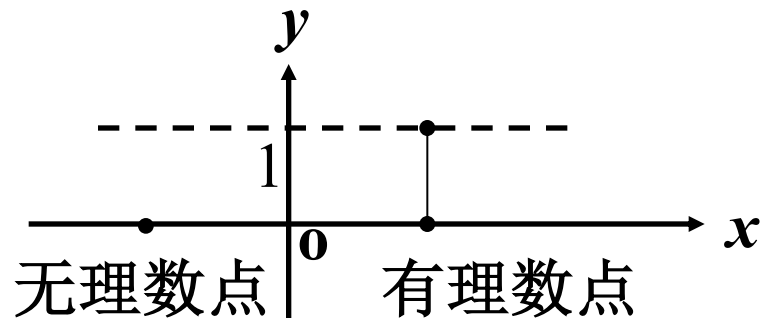
$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数



阶梯曲线

(3) 狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当} x \text{是有理数时} \\ 0 & \text{当} x \text{是无理数时} \end{cases}$$

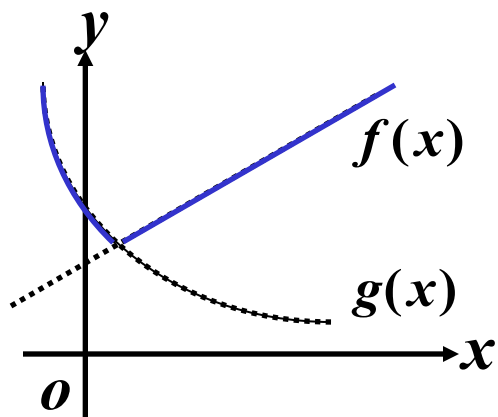


Dirichlet 1805—1859

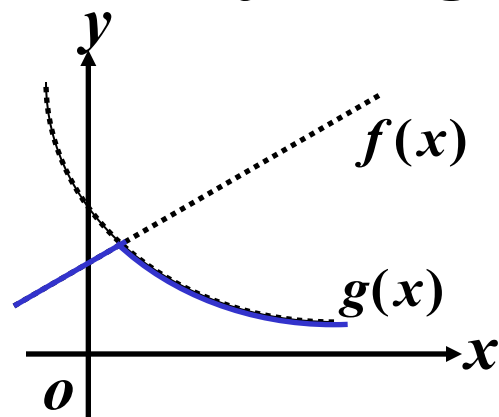
德国数学家。
在数论、分析和数学物理方程等领域有杰出贡献，为继高斯之后与雅可比齐名的德国数学界的核心人物之一。

(4) 取最大值函数

$$y = \max\{f(x), g(x)\}$$

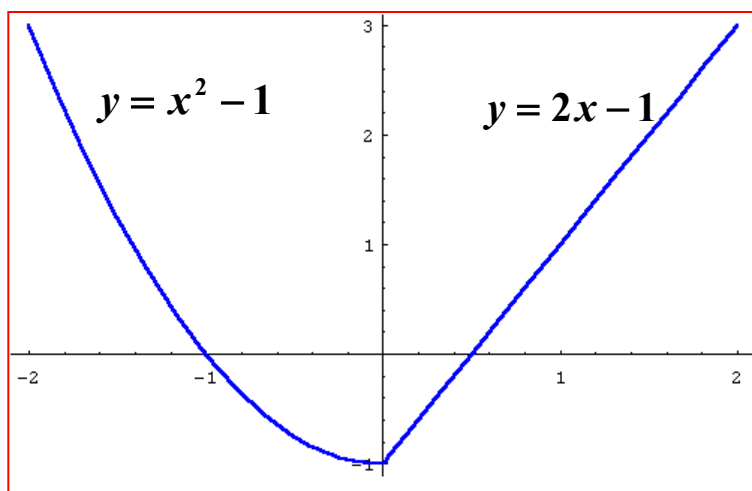


$$y = \min\{f(x), g(x)\}$$



在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同的式子来表示的函数,称为分段函数。

例如,
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 0 \\ x^2 - 1, & x \leq 0 \end{cases}$$



例 2 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求函数 $f(x+3)$ 的定义域.

解 $\because f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

$$\therefore f(x+3) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x+3 \leq 1 \\ -2 & 1 < x+3 \leq 2 \end{cases}$$

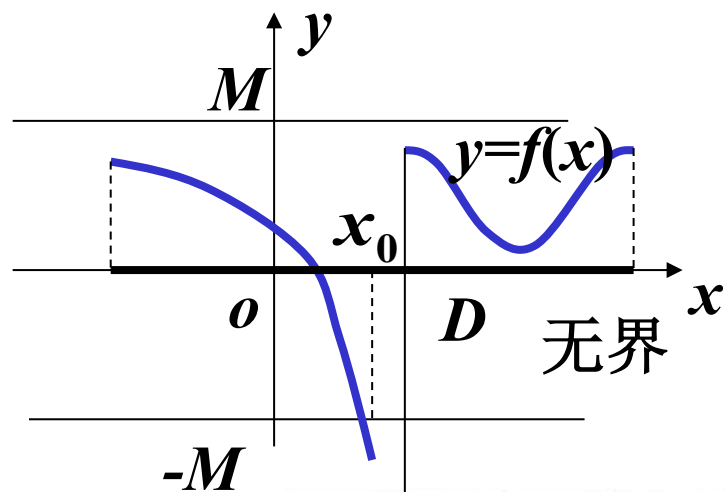
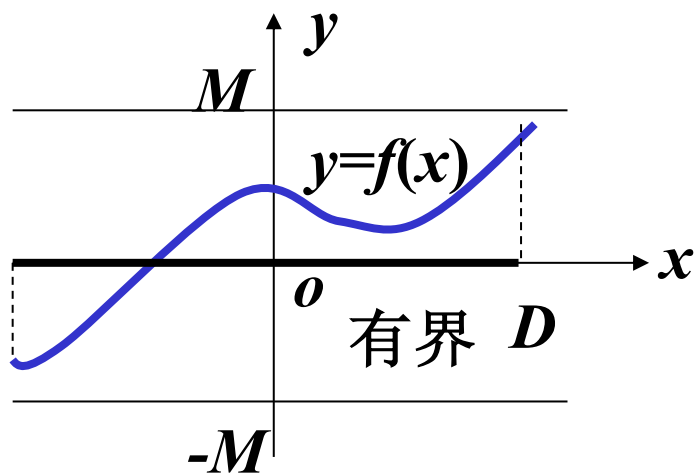
$$= \begin{cases} 1 & -3 \leq x \leq -2 \\ -2 & -2 < x \leq -1 \end{cases}$$

故 $D_f : [-3, -1]$

3 函数的特性

(1). 函数的有界性:

设 $f(x)$ 在 D 上有定义, 若存在 $M > 0$, 当 $x \in D$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界, 否则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界。

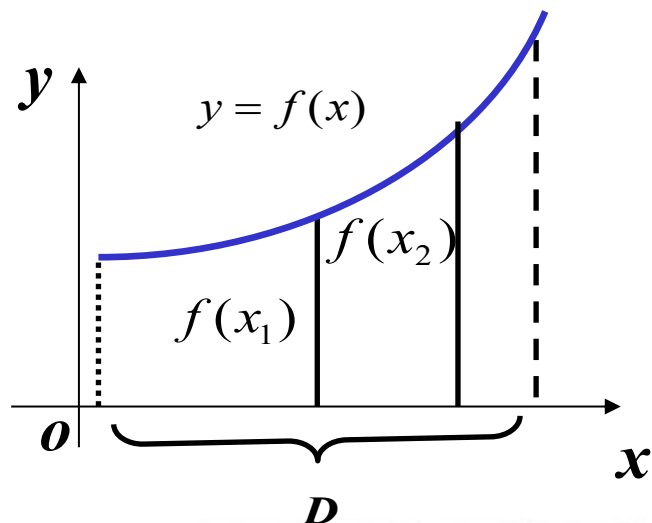


(2). 函数的单调性:

设 $f(x)$ 在 D 上有定义, 若对点集 D 上的任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

成立, 则称 $f(x)$ 为点集 D 上的**增函数**;

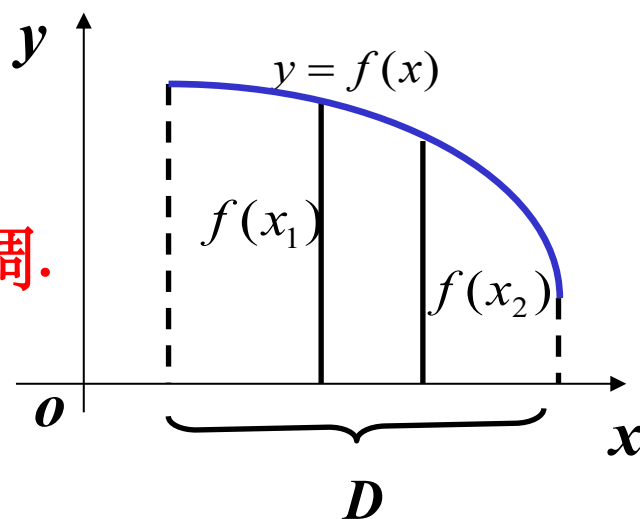


设 $f(x)$ 在 D 上有定义，若对点集 D 上的任意两点 x_1 及 x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

成立，则称 $f(x)$ 为点集 D 上的**减函数**；

教材中的单调函数均指严格单调.

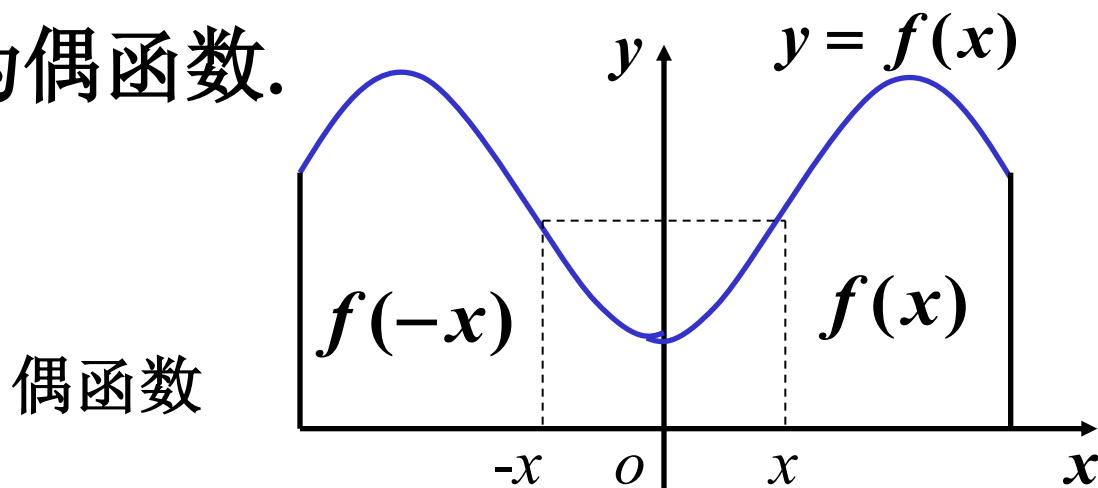


(3). 函数的奇偶性:

设定义域 D 关于原点对称, 若对任意的 $x \in D$, 均有

$$f(-x) = f(x)$$

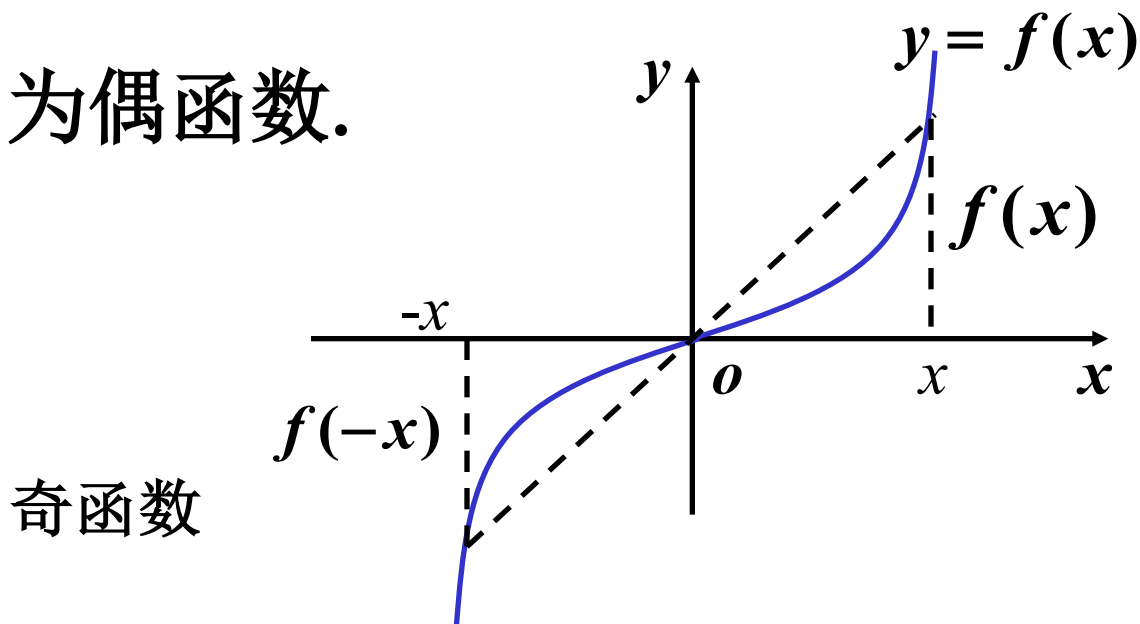
则称 $f(x)$ 为偶函数.



设定义域 D 关于原点对称，若对任意的 $x \in D$ ，均有

$$f(-x) = -f(x)$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

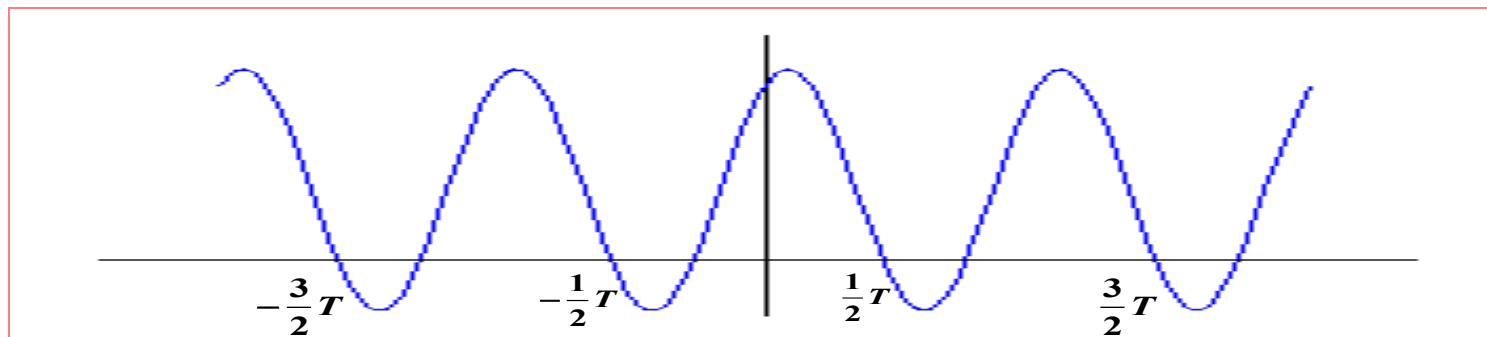


(4). 函数的周期性:

设 $f(x)$ 在点集 D 上有定义，若存在不为零的正数 T 使得对于任意 $x \in D$ ，有 $x \pm T \in D$ ，且

$$f(x+T) = f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为 D 上的周期函数， T 称为函数 $f(x)$ 的周期. (注：通常周期是指最小正周期)



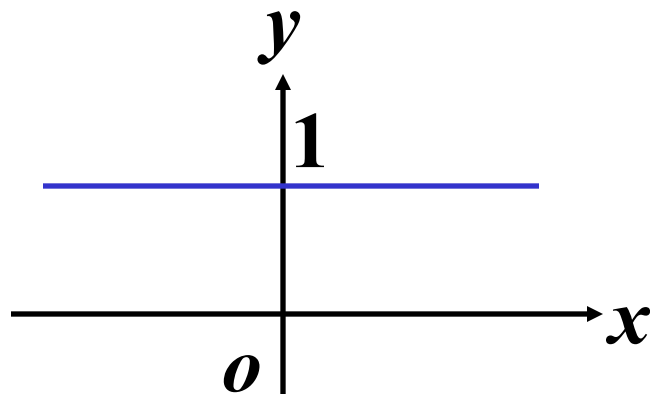
例 设 $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \in \overline{Q} \end{cases}$,

求 $D(-\frac{7}{5})$, $D(1 - \sqrt{2})$. 并讨论 $D(D(x))$ 的性质.

解 $D(-\frac{7}{5}) = 1$, $D(1 - \sqrt{2}) = 0$, $D(D(x)) \equiv 1$,

单值、有界、偶函数

周期函数，但无最小正周期



4 复合函数与反函数

(1). 复合函数

设 $y = \sqrt{u}$, $u = 1 - x^2$, $\longrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$

定义: 设函数 $y = f(u)$ 的定义域 D_f , 而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 W_φ , 若 $D_f \cap W_\varphi \neq \emptyset$, 则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的 复合函数.

$x \leftarrow$ 自变量, $u \leftarrow$ 中间变量, $y \leftarrow$ 因变量,

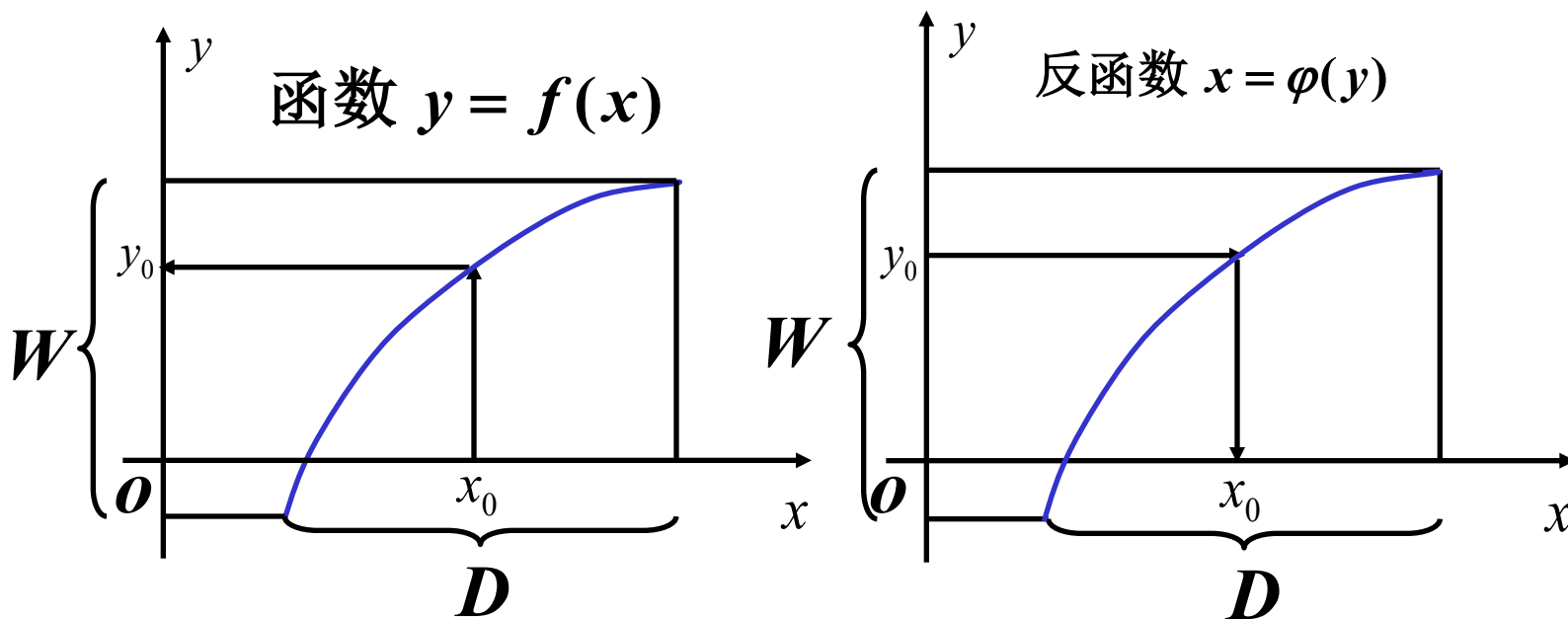
注意: 1.不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的;

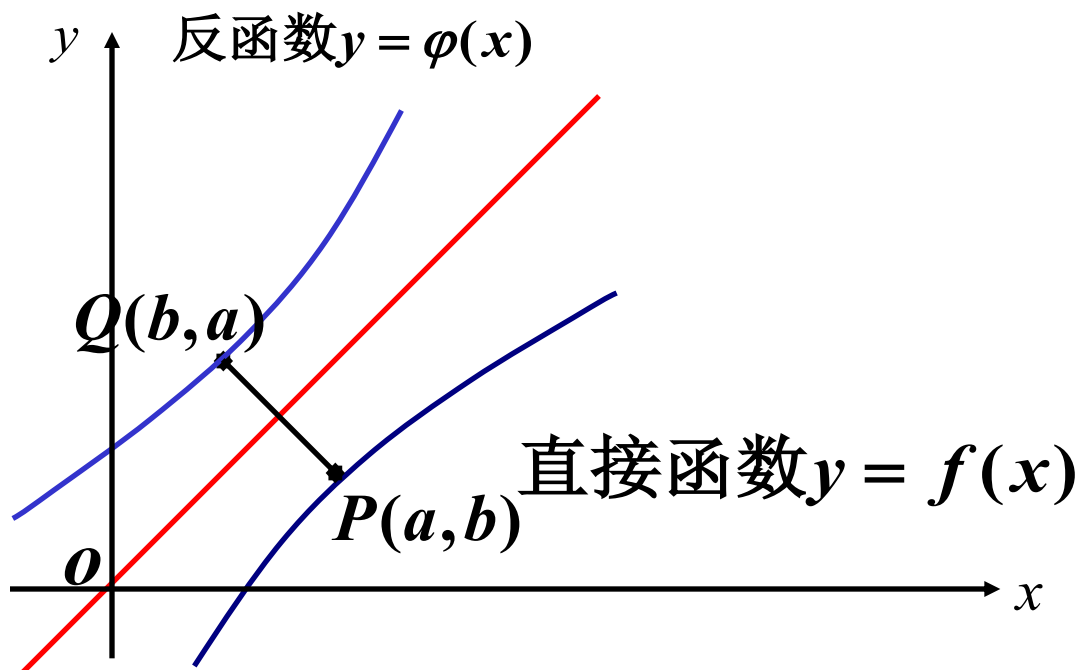
例如 $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$; $y \neq \arcsin(2 + x^2)$

2.复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例如 $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$, $y = \sqrt{u}$, $u = \cot v$, $v = \frac{x}{2}$.

2. 反函数





直接函数与反函数的图形关于直线 $y = x$ 对称。

例 4 已知函数 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$,

求 $f(x)$ 和 $f(x+1)$.

解 首先, 这里给出的是一个复合函数, 即
已知

$$f(y) = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad y = x + \frac{1}{x}, \quad (|y| \geq 2)$$

求 $f(x)$, $f(x+1)$. 现在必须求 $f(y)$ 关于 y 的对应关系 f .

由于

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2,$$

所以

$$f(y) = y^2 - 2,$$

从而

$$f(x) = x^2 - 2. \quad (|x| \geq 2)$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 - 2 = x^2 + 2x - 1.$$

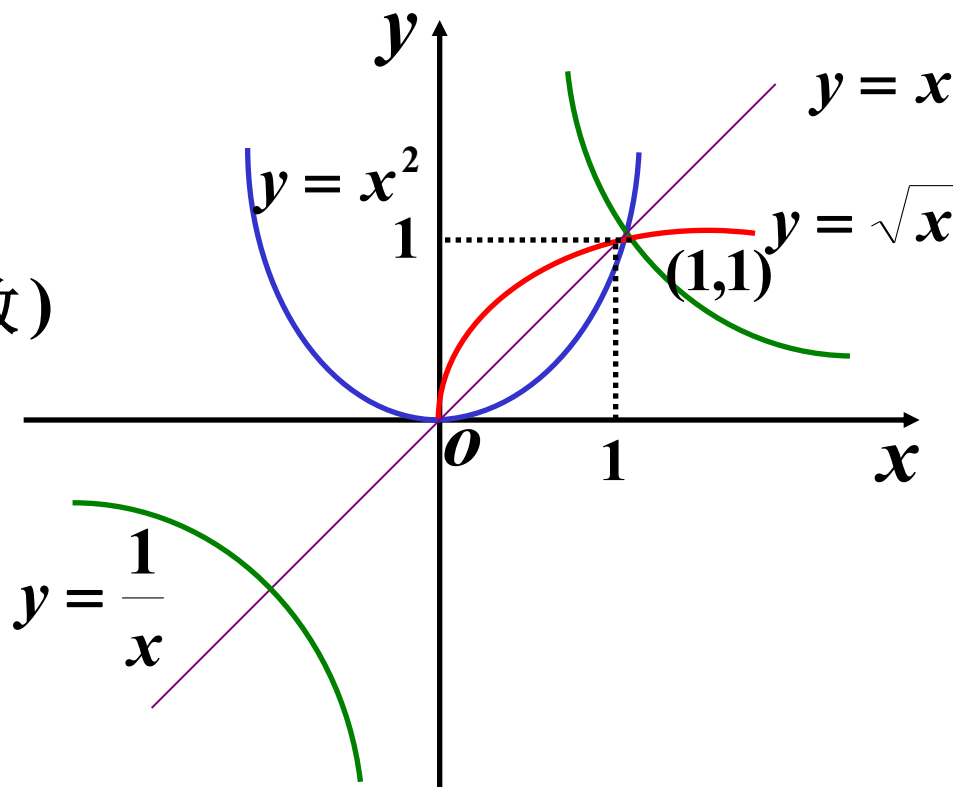
$$x \notin (-3, 1)$$

5 初等函数

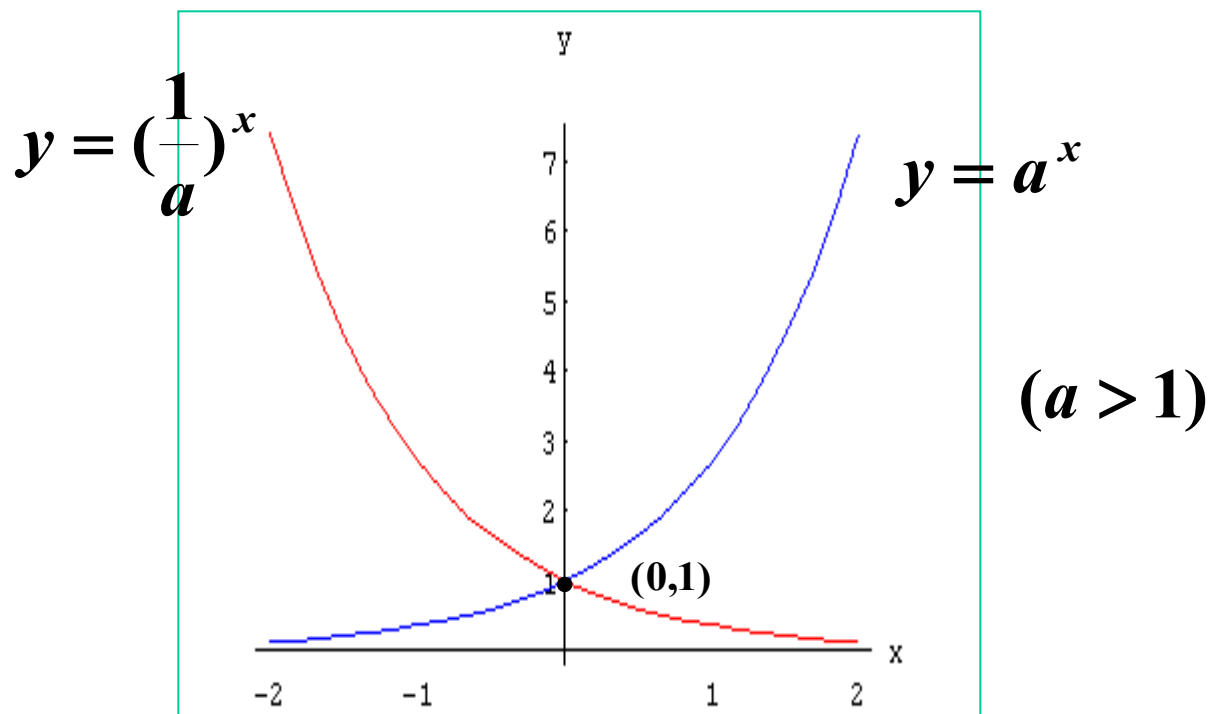
1. 基本初等函数

(1) 幂函数

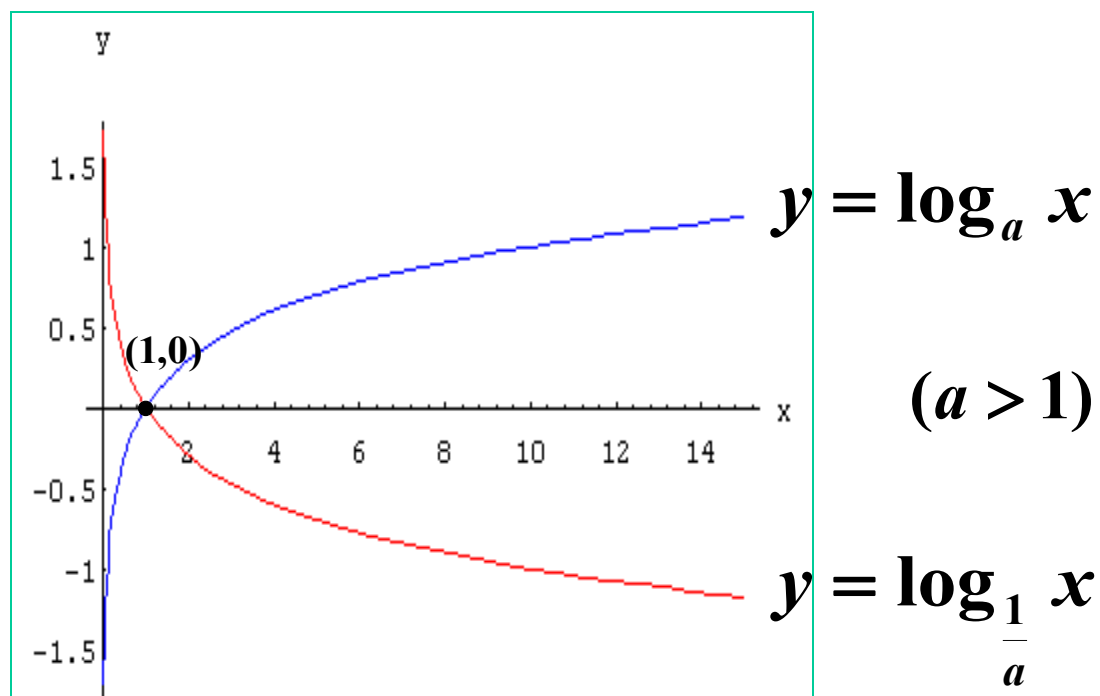
$$y = x^{\mu} \quad (\mu \text{ 为常数})$$



(2) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) $y = e^x$

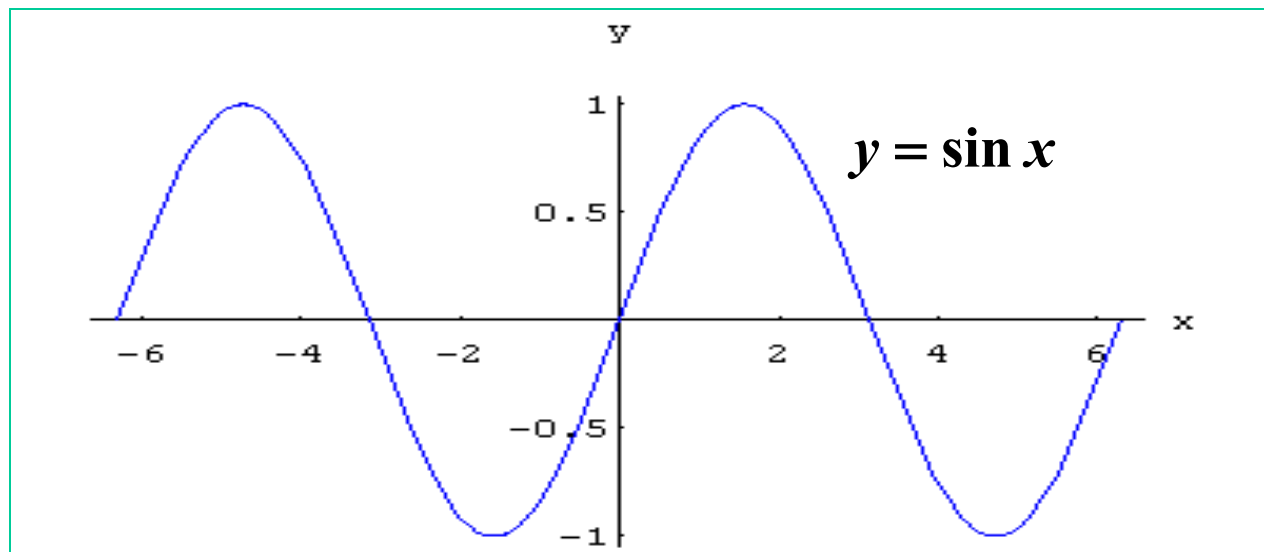


(3) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) $y = \ln x$

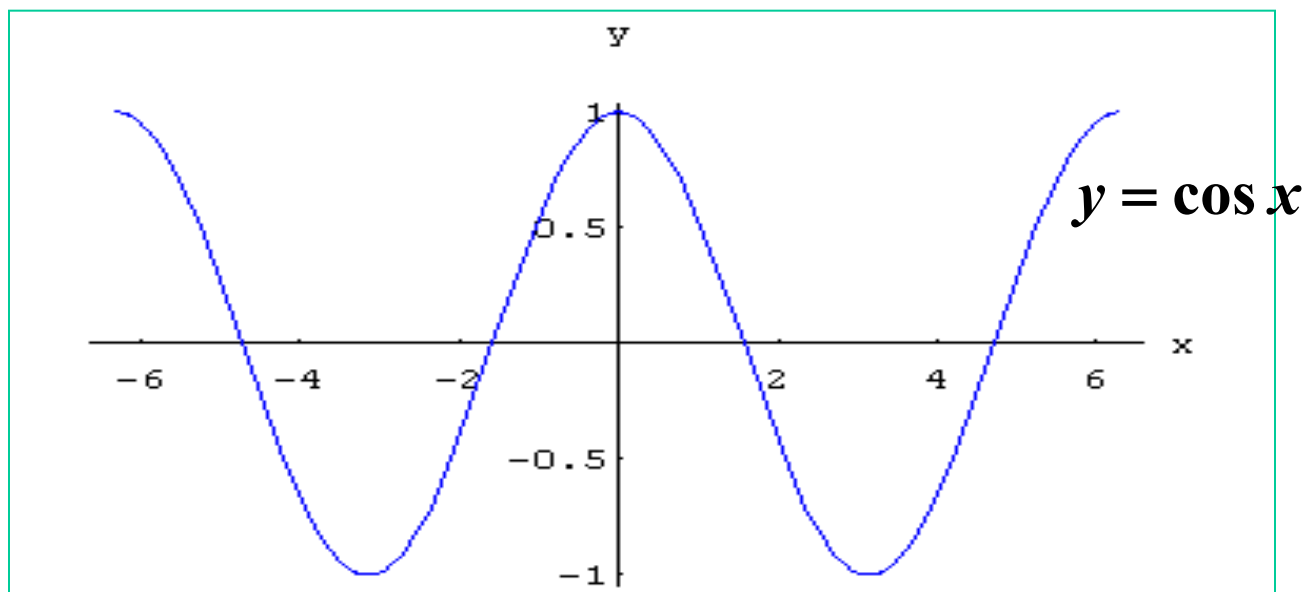


(4) 三角函数

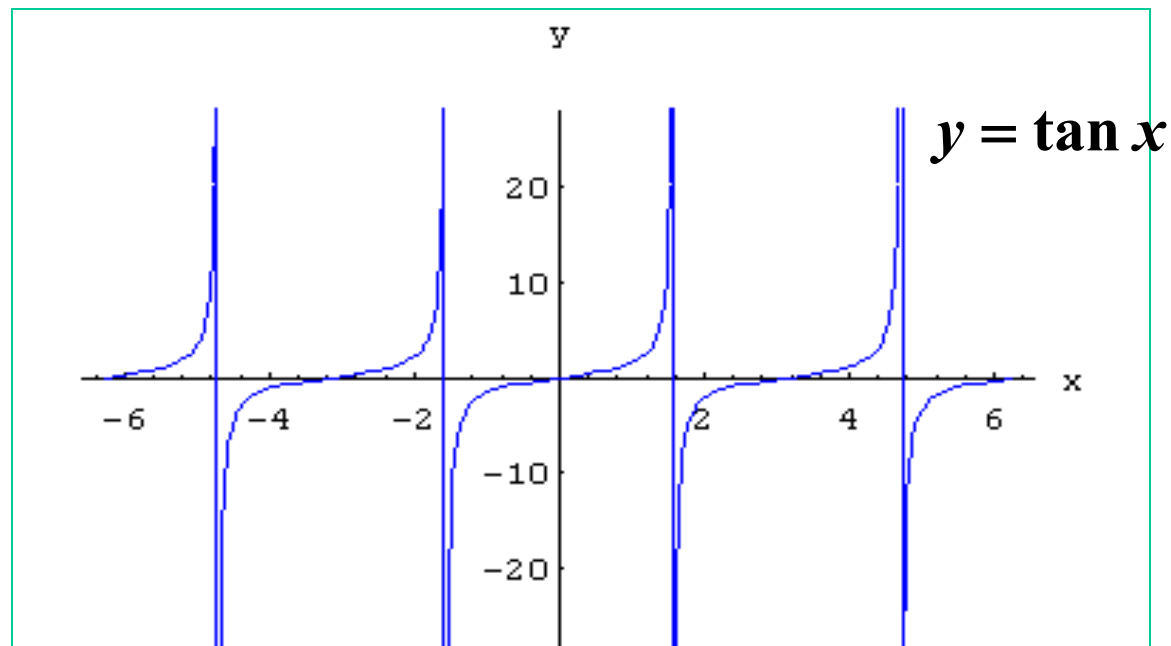
正弦函数 $y = \sin x$



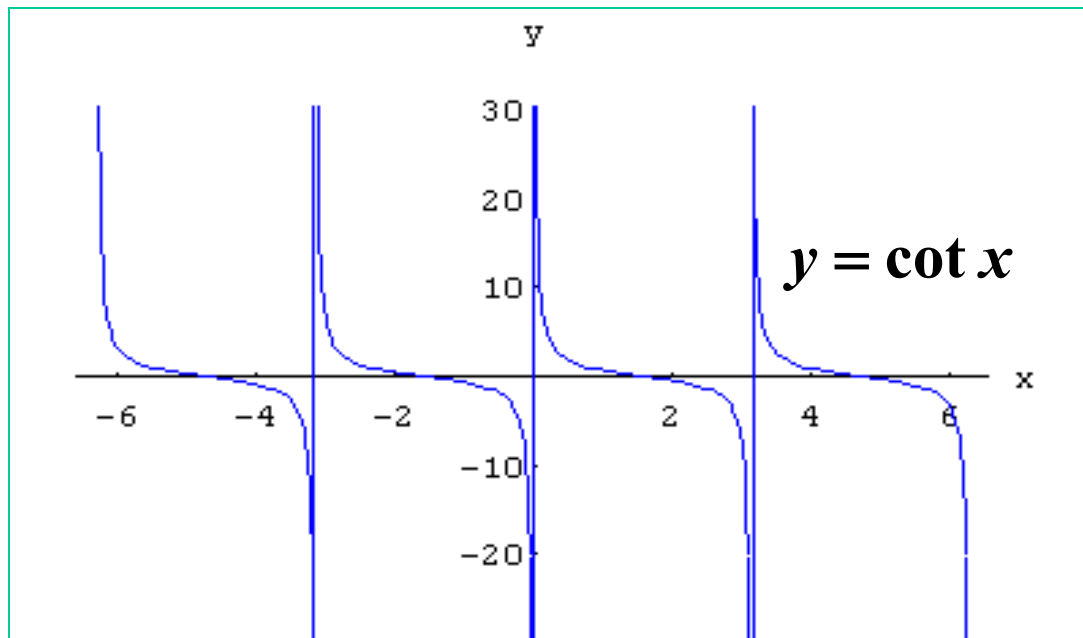
余弦函数 $y = \cos x$



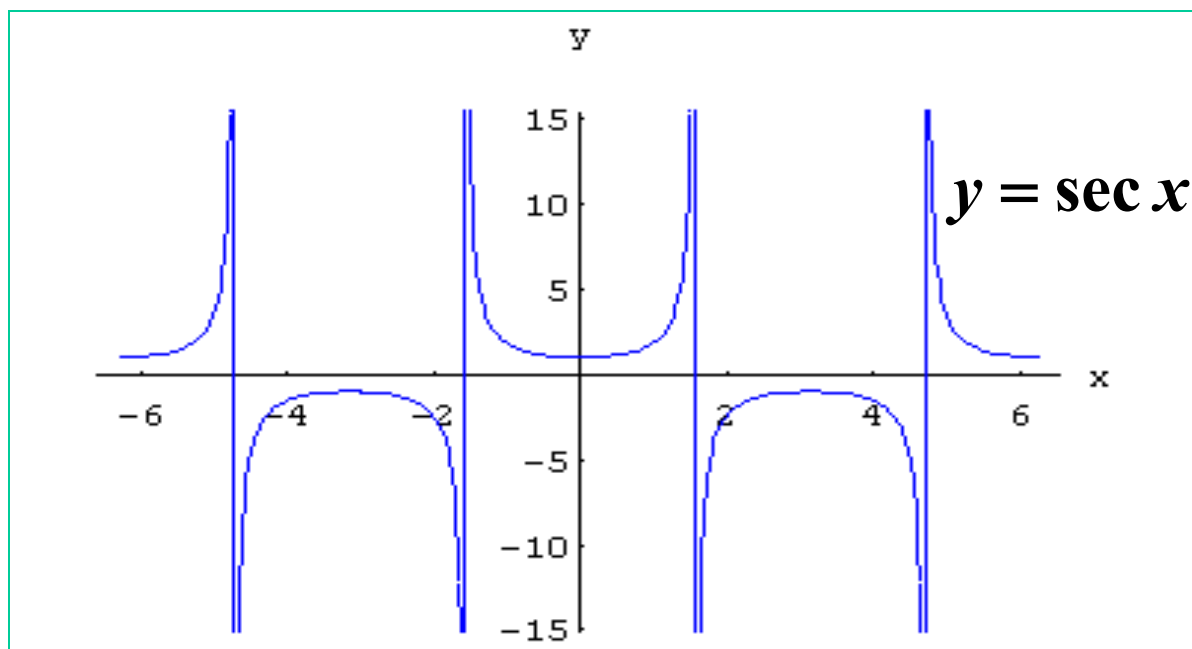
正切函数 $y = \tan x$



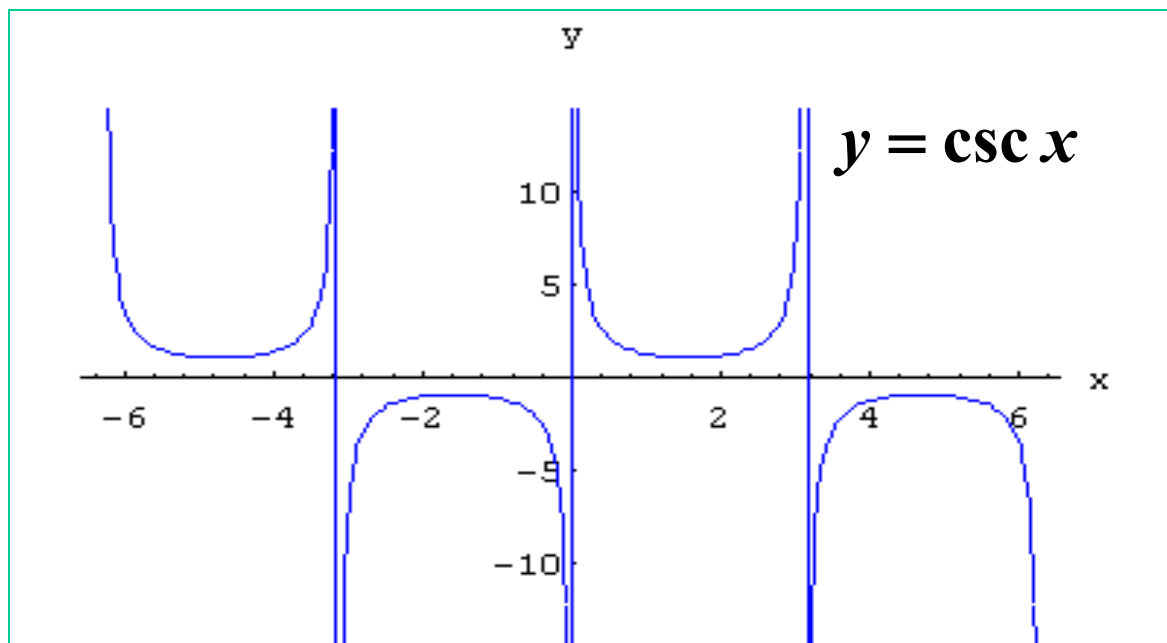
余切函数 $y = \cot x$



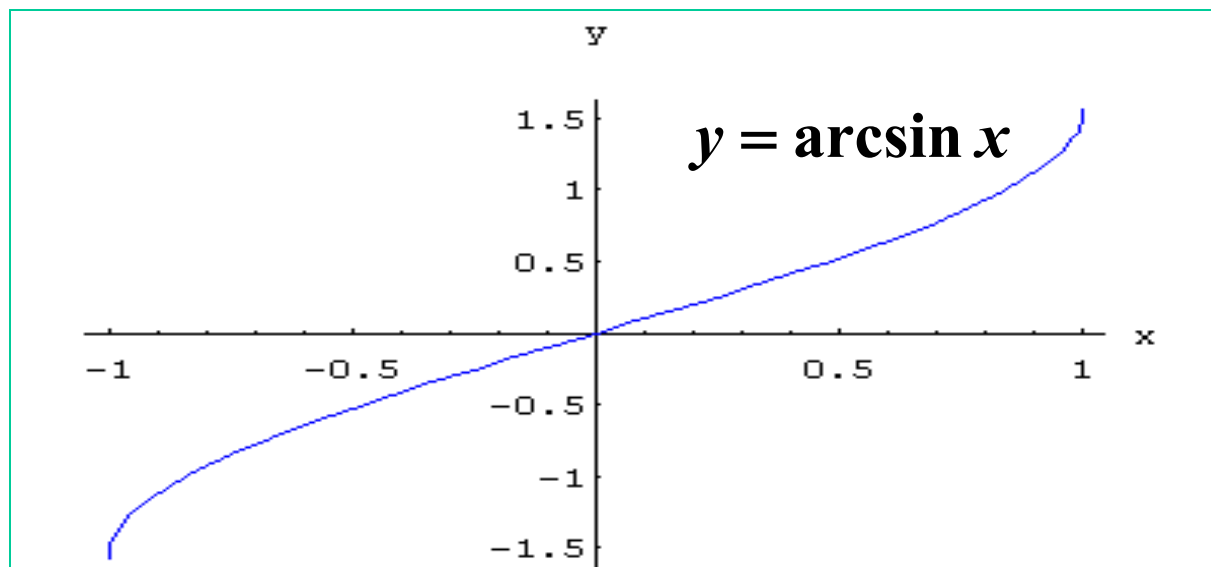
正割函数 $y = \sec x$



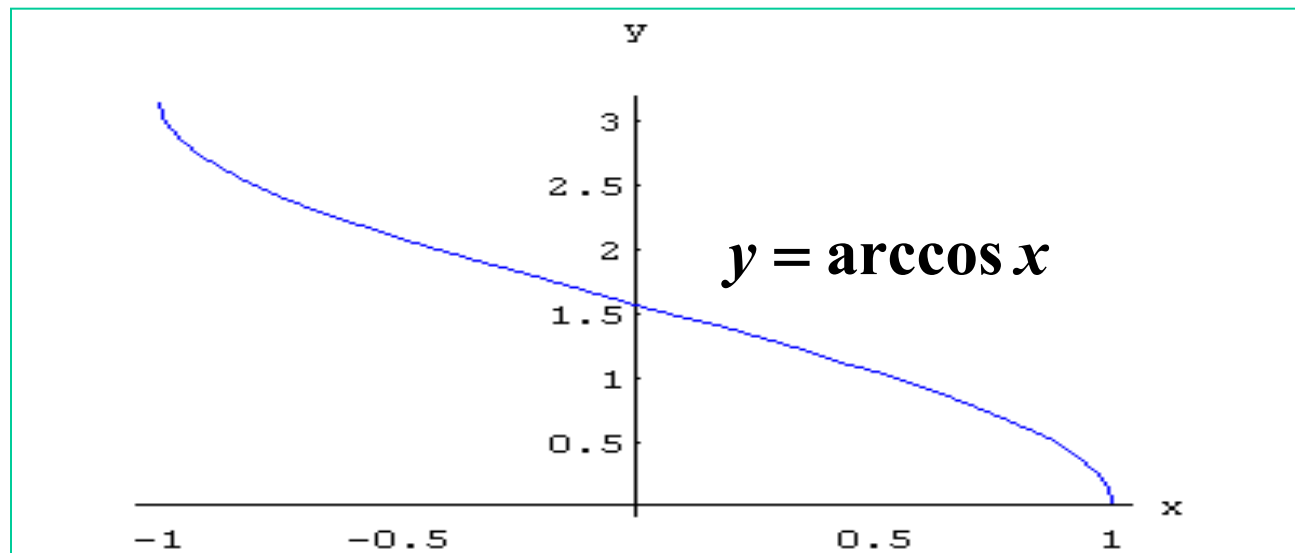
余割函数 $y = \csc x$



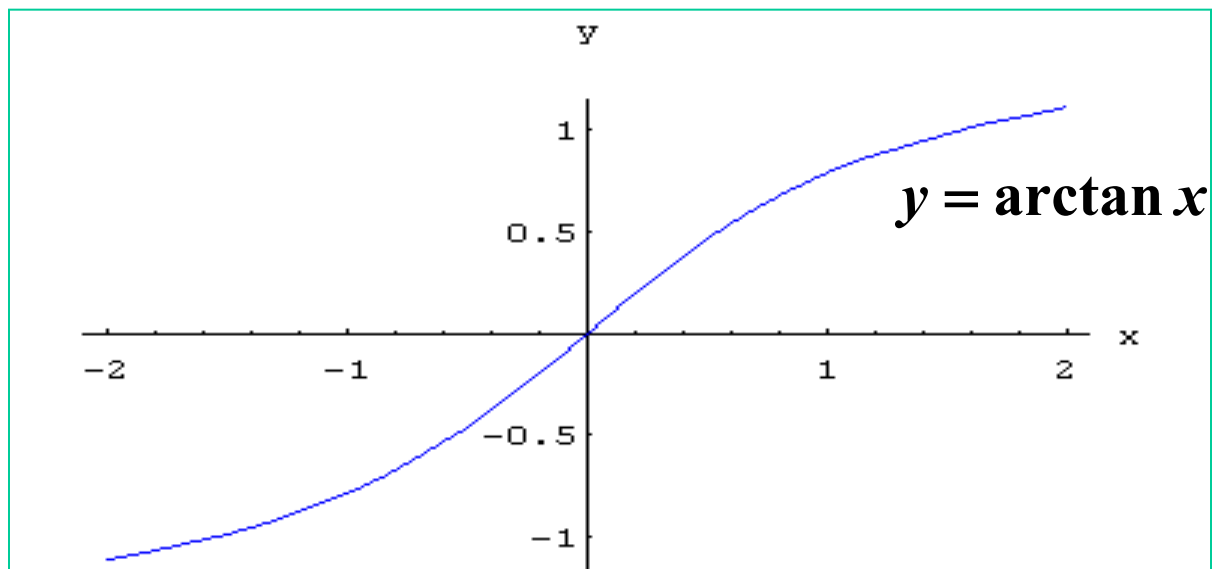
(5) 反三角函数 反正弦函数 $y = \arcsin x$



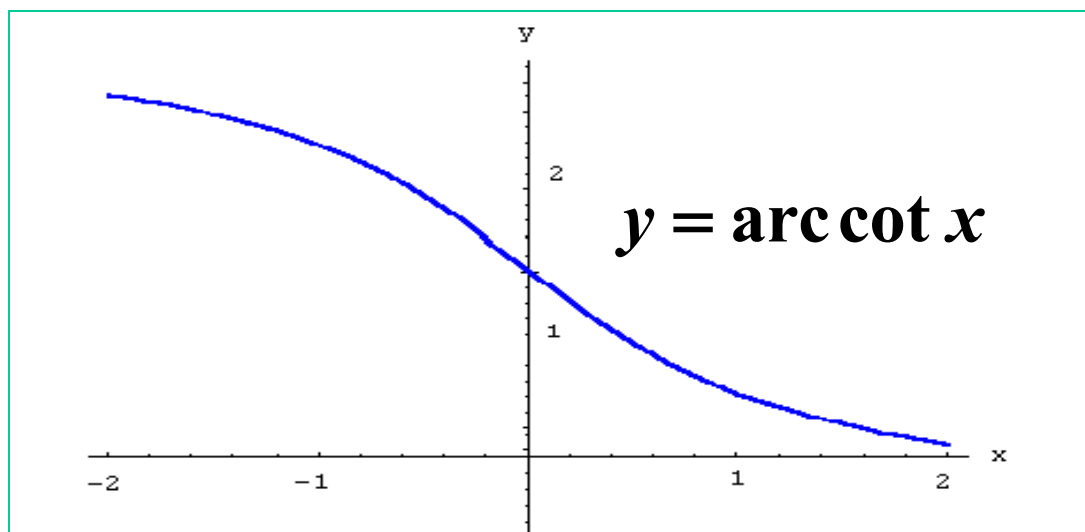
反余弦函数 $y = \arccos x$



反正切函数 $y = \arctan x$



反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$



幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的函数, 称为初等函数.

例5 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}, \varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases},$
求 $f[\varphi(x)]$.

解
$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$$

1⁰ $\varphi(x) < 1,$

或 $x < 0, \varphi(x) = x + 2 < 1, \implies x < -1;$

或 $x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 < 1, \implies 0 \leq x < \sqrt{2};$

2⁰ $\varphi(x) \geq 1,$

或 $x < 0$, $\varphi(x) = x + 2 \geq 1$, $\Rightarrow -1 \leq x < 0$;

或 $x \geq 0$, $\varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1$, $\Rightarrow x \geq \sqrt{2}$;

综上所述:

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x + 2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2 - 1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}.$$

6 小结与思考题

本节基本内容：

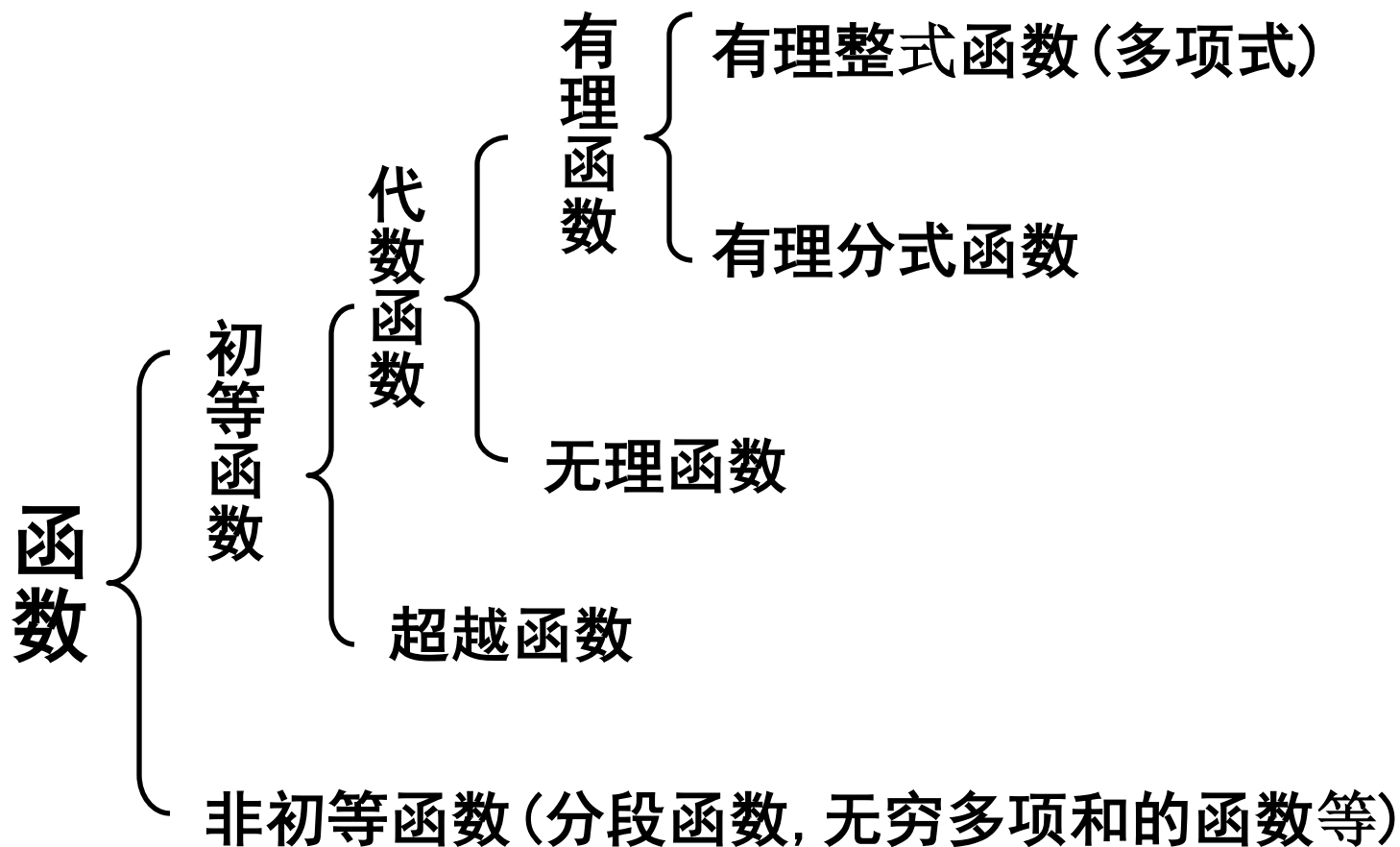
基本概念：集合，区间，邻域，
函数的概念.

函数的两个要素：定义域，对应法则.

函数的特性：有界性，单调性，奇偶性，周期性.

复合函数，反函数，基本初等函数，初等函数.

函数的分类：



思考题

设 $\forall x > 0$, 函数值 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x^2}$,
求函数 $y = f(x)$ ($x > 0$) 的解析表达式.

思考题解答

设 $\frac{1}{x} = u$

则 $f(u) = \frac{1}{u} + \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} = \frac{1 + \sqrt{1 + u^2}}{u},$

故 $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}, \quad (x > 0).$

思考题

下列函数能否复合为函数 $y = f[g(x)]$, 若能, 写出其解析式、定义域、值域.

$$(1) \quad y = f(u) = \sqrt{u}, \quad u = g(x) = x - x^2$$

$$(2) \quad y = f(u) = \ln u, \quad u = g(x) = \sin x - 1$$

思考题解答

$$(1) \quad y = f[g(x)] = \sqrt{x - x^2}$$

$$x \in D = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}, \quad f(D) = [0, \frac{1}{2}]$$

$$(2) \quad \text{不能.} \quad \because \quad g(x) = \sin x - 1 \leq 0$$

$g(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域之交集是空集.

课堂练习题

一、 填空题:

1、 若 $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{5}{t} + 2t^2$, 则

$$f(t) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad f(t^2 + 1) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2、 若 $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{\pi}{3} \\ |\sin x|, & |x| > \frac{\pi}{3} \end{cases}$, 则

$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \varphi\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3、 不等式 $|x - 5| < 1$ 的区间表示法是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4、函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 3]$ ，则函数 $f(\ln x)$ 的定义域为_____.

5、函数 $y = \sin \ln 2x$ 由_____复合而成.

6、若 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$ ，则 $f(x^2)$ 的定义域为_____， $f(\sin x)$ 的定义域为_____， $f(x+a)$ ($a > 0$) 的定义域为_____， $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域为_____.

二、若 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}, \quad g(x) = e^x,$

求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

三、求 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 的反函数，并指出其定义域.

四、火车站行李收费规定如下：20千克以下不收费，20~50千克每千克收费0.20元，超出50千克超出部分每千克0.30元，试建立行李收费 $f(x)$ (元)与行李重量 x (千克)之间的函数关系.

课堂练习题答案

一、 1、 $5t + \frac{2}{t^2}, \quad 5(t^2 + 1) + \frac{2}{(t^2 + 1)^2};$

2、 $1, \quad \frac{\sqrt{3}}{2};$ 3、 $(4, 6);$

4、 $[e, e^3];$ 5、 $y = \sin u, u = \ln v, v = 2x;$

6、 $[-1, 1],$ $[2k\pi, 2k\pi + \pi],$

$$[-a, 1-a], \quad \begin{cases} [a, 1-a], & 0 < a \leq 0.5 \\ \emptyset, & a > 0.5. \end{cases}$$

$$\text{二、 } f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}; \quad g[f(x)] = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}.$$

$$\text{三、 } y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad (-1, 1).$$

四、 略