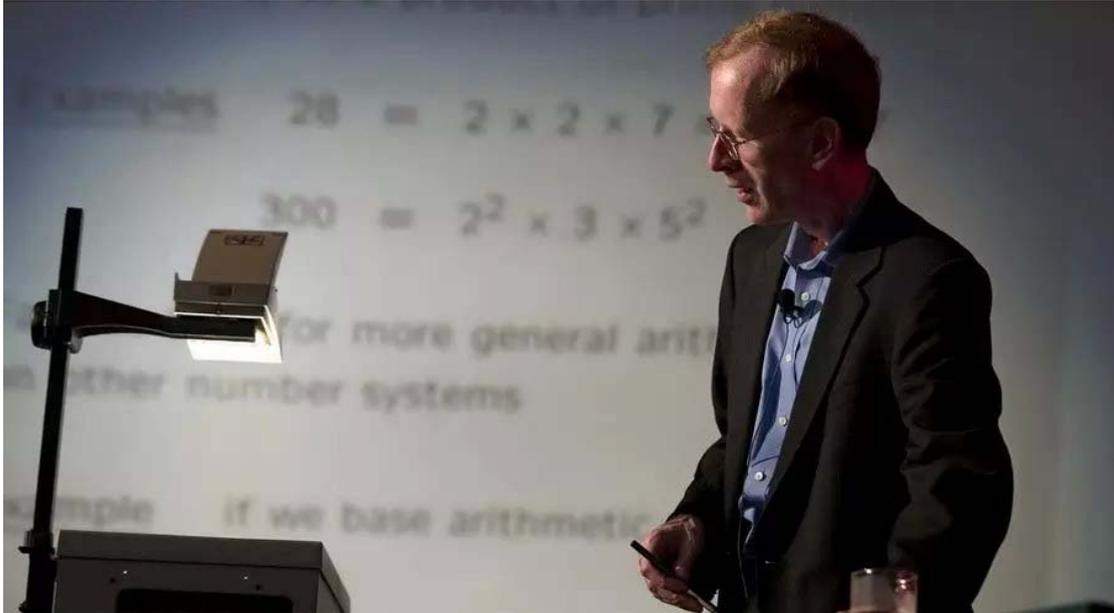
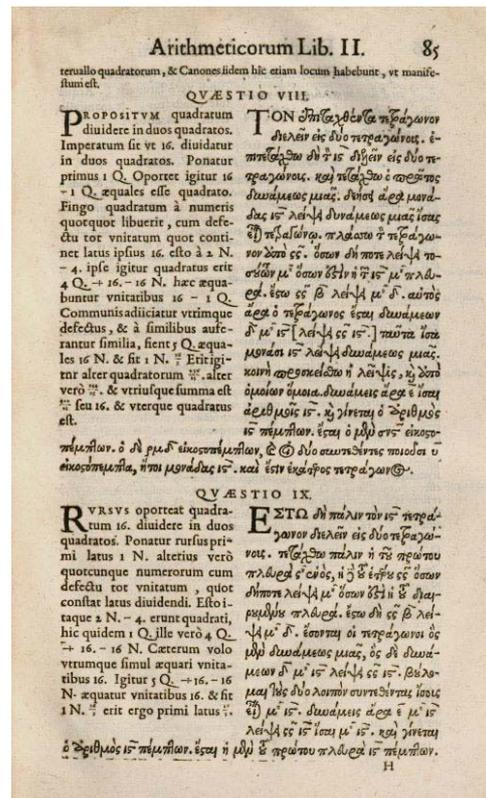


# 数之魅惑(十年后修订版)

来源：读库-张立宪 2015-04-22



题图：2005年8月30日下午，安德鲁·怀尔斯在北大讲演。贺延光 摄



费马及其阅读的丢番图《算术》拉丁文译本

## 悬案

费马大定理从提出到证明的过程，就是一部不折不扣的惊险小说。

一个读者，在自己看过的书空白处留下附注。除了他自己，还有谁会关注呢？

但是，法国人费马死后，他在一本《算术》书上所写的注记并没有随之湮没。其长子意识到那些草草的字迹也许有价值，就用五年时间整理，然后印出一个特殊的《算术》版本，载有他父亲所做的边注，那里面包含了一系列的定理。

在靠近问题 8 的页边处，费马写着这么几句话：

“不可能将一个立方数写成两个立方数之和；或者将一个 4 次幂写成两个 4 次幂之和；或者，总的来说，不可能将一个高于 2 次的幂写成两个同样次幂的和。”

这个喜欢恶作剧的天才，又在后面写下一个附加的评注：

“我有一个对这个命题的十分美妙的证明，这里空白太小，写不下。”

费马写下这几行字大约是在 1637 年，这些被侥幸发现的蛛丝马迹成了其后所有数学家的不幸。一个高中生就可以理解的定理，成了数学界最大的悬案，从此将那些世界上最聪明的头脑整整折磨了三百五十八年。一代又一代的数学天才前赴后继，向这一猜想发起挑战。

欧拉，十八世纪最伟大的数学家之一，在那本特殊版本的《算术》中别的地方，他发现了费马隐蔽地描述了对 4 次幂的一个证明。欧拉将这个含糊不清的证明从细节上加以完善，并证明了 3 次幂的无解。

但在他的突破之后，仍然有无数多次幂需要证明。

等到索非·热尔曼、勒让德、狄利克雷、加布里尔·拉梅等几个法国人再次取得突破时，距离费马写下那个定理已经过去了将近二百年，而他们才仅仅又证明了 5 次幂和 7 次幂。

事实上拉梅已经宣布他差不多就要证明费马大定理了，另一位数学家柯西也紧随其后说要发表一个完整的证明。然而，一封来信粉碎了他们的信心，德国数学家库默尔看出这两个法国人正在走向同一条逻辑的死胡同。

在让两位数学家感到羞耻的同时，库默尔也证明了费马大定理的完整证明是当时的数学方法不可能实现的。这是数学逻辑的光辉一页，也是对整整一代数学家的巨大打击。

二十世纪，数学开始转向各种不同的研究领域并取得非凡进步。1908 年，德国实业家沃尔夫斯凯尔为未来可能攻克费马大定理的人设立了奖金，但是，一位不出名的数学家却似乎毁灭了大家的希望。库特·哥德尔提出不可判定性定理，对费马大定理进行了残酷的表达——这个命题没有任何证明。

尽管有哥德尔致命的警告，尽管经受了三个世纪壮烈的失败，但一些数学家仍然冒着白白浪费生命的风险，继续投身于这个问题。二战后随着计算机的出现，大量的计算已不再成为问题。借助计算机的帮助，数学家们对 500 以内，然后在 1000 以内，再是 10000 以内的值证明了费马大定理，到八十年代，这个范围提高到 25000，然后是 400 万以内。

但是，这种成功仅仅是表面的，即使那个范围再提高，也永远不能证明到无穷，不能宣称证明了整个定理。

破案似乎遥遥无期。

最后的英雄已经出现。

1963年，年仅十岁的安德鲁·怀尔斯在一本名叫《大问题》的书中邂逅费马大定理，便知道自己不会放弃它，必须解决它。七十年代，他正在剑桥大学研究椭圆方程，看来跟费马大定理没什么关系。

此时，两位日本数学家已经提出谷山-志村猜想，将怀尔斯正在研究的椭圆方程与模形式统一在一起。看来也跟费马大定理没什么关系。

八十年代，几位数学家将十七世纪最重要的问题与二十世纪最有意义的问题结合在一起，找出了证明费马大定理的钥匙：只要能证明谷山-志村猜想，就自动证明了费马大定理。

曙光在前，但并没有人对黎明的到来抱有信心，谷山-志村猜想已经被研究了三十年，都以失败告终，如今与费马大定理联系在一起，更是连最后的希望都没有了，因为，任何可能导致解决费马大定理的事情根据定义是根本不可能实现的。这几乎已成定论。

就连发现钥匙的关键人物肯·里贝特也很悲观：“我没有真的费神去试图证明它，甚至没有想到过要去试一下。”大多数其他数学家，包括安德鲁·怀尔斯的导师约翰·科茨，都相信做这个证明会劳而无功：“我必须承认我认为在我有生之年大概是不可能看到它被证明了。”

除了安德鲁·怀尔斯。

曾经有人问伟大的逻辑学家大卫·希尔伯特为什么不去尝试证明费马大定理，他回答说：“我没有那么多时间去浪费在一件可能会失败的事情上。”

但安德鲁·怀尔斯会。他意识到自己的机会不大，但即使最终没能证明费马大定理，他也觉得自己的努力不会白费。他花了十八个月的时间为将来的战斗收集必要的武器，然后得出全面估计：任何对这个证明的认真尝试，很可能需要十年专心致志的努力。

怀尔斯放弃了所有与证明费马大定理无直接关系的工作，在完全保密的状态下，展开了一个人对这个困扰世间智者三百多年谜团的孤独挑战，妻子是唯一知道他在从事费马问题研究的人。

七年过去。

1993年6月23日，剑桥牛顿研究所，安德鲁·怀尔斯开始了本世纪最重要的一次数学讲座。现场的两百名数学家被惊呆了，他们看到的是，三百多年来第一次，费马的挑战被征服。

怀尔斯写上费马大定理的结论，然后转向听众，平和地说：“我想我就在这里结束。”

会场上爆发出一阵持久的掌声。第二天，数学家第一次占据了报纸的头版头条。

《人物》杂志将他与黛安娜王妃、奥普拉一起列为“本年度二十五位最具魅力者”之一，一家时装公司则请这位温文尔雅的天才为他们的系列男装做了广告。

但事情并没有在这里结束，接下来的发展依然像惊险小说一样，悬案得破，但案犯并不轻易束手就擒。

怀尔斯长达二百页的手稿投交到《数学发明》杂志，开始了庞杂的审稿过程。这是一个特大型的论证，由数以百计的数学计算通过数以千计的逻辑链环错综复杂

地构造而成。只要有一个计算出差错或一个链环没衔接好，整个证明将失去其价值。

值得解决的问题会以反击来证明它自己的价值。在苛刻的审稿过程中，审稿人碰到了一个似乎是小问题的问题。而这个问题的实质是，无法使怀尔斯像原来设想的那样保证某个方法行得通。他必须加强他的证明。

时间越耗越长，问题依然解决不了，全世界开始对怀尔斯产生怀疑。

十四个月过去。

他准备公开承认失败并发表一个证明有缺陷的声明。

在山穷水尽的最后时刻，1995年9月19日，他决定再检视一次，试图确切地判断出那个方法不能奏效的原因。

一个突然迸发的灵感使他的苦难走到了尽头：虽然那个方法不能完全行得通，但只需要可以使另一个他曾经放弃的理论奏效，正确答案就可以出现在废墟之中——两个分别不足以解决问题的方法结合在一起，就可以完美地互相补足。

足足有二十分钟，怀尔斯呆望着那个结果不敢相信，然后，是一种再也无事可做的巨大失落感。

一百年前，专为费马大定理而设的沃尔夫斯凯尔奖将截止日期定为2007年9月13日。就像所有的惊险片一样，炸弹在即将起爆的最后一刻，被拆除了。

## **传奇**

《费马大定理》既是惊险小说，也是一部武侠小说，激荡着绝顶高手传诵千古的传奇故事。

那个数学世界里的江湖是属于年轻人的。少年英雄在这里尽情挥洒他们的天才，库特·哥德尔提出他的不可判定性定理时，年仅二十五岁，便将同时代的同行推入绝望的深渊；挪威的阿贝尔在十九岁时做出了他对数学的最伟大的贡献，八年后在贫困交加中去世，法国数学家埃米尔特评价“他留下的思想可供数学家们工作五百年”；相较而言，安德鲁·怀尔斯快到四十岁时才研究完成费马大定理，别人认为他应该是才思枯竭的岁数了。

“年轻人应该证明定理，而老年人则应该写书。”英国数学家哈代说，“数学较之别的艺术或科学，更是年轻人的游戏。”

还有哪片领土更适合年轻人来谱写传奇？在英国皇家学会会员中，数学家的平均当选年龄是最低的。

围绕着费马大定理发生的故事，更是超出了最优秀编剧的想象。

1954年1月，东京大学的年轻数学家志村五郎去系图书馆借一本书。令他吃惊的是，那本书被一个叫谷山丰的人借走了。志村给这位并不熟悉的校友写了封信，几天后，他收到对方的明信片，谷山告诉他，他是在进行同一个计算，并在同一处被卡住了。

一种惊喜的默契顿时产生，两人开始了惺惺相惜的合作。“他天生就有一种犯许多错误，尤其是朝正确的方向犯错误的特殊本领。”志村评价他的拍档。1958年11月17日，刚刚订婚的谷山、这个心不在焉的天才人物选择了自杀。几个星期后，他的未婚妻也结束了自己的生命，遗书中写道：“既然他去了，我也必须和他在一起。”

谷山在遗书中为他自杀行为引起的种种麻烦向他的同事们表示歉意，而他遗留下的对数学的许多根本性想法，成为解开费马大定理的唯一一把钥匙：谷山-志村猜想。

三十年后，他的伙伴志村目睹了他们的猜想被证实，用克制和自尊的平静对记者说：“我对你们说过这是对的。”

他依然保存着谷山第一次寄给他的那张明信片。

德国实业家沃尔夫斯凯尔并不是一个有天赋的数学家，但一桩不可思议的事件将他与费马大定理永远联系在一起。

对一位漂亮女性的迷恋及被拒绝，令沃尔夫斯凯尔备感绝望。他决定自杀，并定下了日子，准备在午夜钟声响起时开枪射击自己的头部。沃尔夫斯凯尔认真地做着每一个细节：处理好商业事务、写下遗嘱，并给所有的亲朋好友写了信。

他的高效率使得所有的事情略早于午夜的时限就办完了。为了消磨最后的几个小时，他到图书室翻阅数学书籍：一篇关于费马大定理证明的论文……他不知不觉拿起了笔，一行一行进行计算……

然后，天亮了。

沃尔夫斯凯尔为自己发现并改正了论文中的一个漏洞感到无比骄傲，原来的绝望和悲伤消失了，数学将他从死神身边唤回。

1908年，得享天年的沃尔夫斯凯尔写下了他新的遗嘱：他财产中的一大部分作为一笔奖金，奖给一百年内任何能证明费马大定理的人。

这是他对那个挽救其生命的盖世难题的报恩方式。

法国数学家伽罗瓦陷入一桩风流韵事中。与他相好的女人事实上已经订婚，那名绅士发现了未婚妻的不忠，向伽罗瓦提出决斗。

对方是法国一名最好的枪手，而伽罗瓦非常清楚自己的实力：遑论开枪，就连数学演算他都是只在头脑里进行，而不屑于在纸上把论证写清楚，为此他的许多数学成果都得不到法国科学院的重视与承认。决斗的前一晚，他相信这是自己的最后一晚，也是把他的思想写在纸上的最后机会。

他通宵达旦，写出了存在自己头脑里的所有定理。在复杂的代数式中，那个女人的名字不时隐藏其间，还有绝望的感叹——“我没有时间了，我没有时间了！”

第二天，1832年5月30日，伽罗瓦死于决斗。

等他潦草的手稿被递至欧洲一些接触的数学家手里，那些演算中迸发出的天才思想使专家们发现：一位世界上最杰出的数学家在二十岁时被杀死了，他研究数学只有五年。

伽罗瓦在手稿中对五次方程的解法进行了完整透彻的叙述，而他演算的核心部分则是称为“群论”的思想，他将这种思想发展成一种能攻克以前无法解决的问题的有力工具。

伽罗瓦生命中最后一夜的工作，一个半世纪后成为安德鲁·怀尔斯证明谷山-志村猜想的基础。

1997年6月27日，符合沃尔夫斯凯尔委员会的规定战胜费马挑战的安德鲁·怀尔斯收到了价值五万美元的奖金。

是的，费马大定理被正式解决了。怀尔斯汇集了二十世纪数论中众多的突破性工作，并把它们融合成一个万能的证明。

人们又重新掂量起费马写下的那一行附加评注：“我有一个对这个命题的十分美妙的证明，这里空白太小，写不下。”可以确定的是，几个世纪以前，费马没有发明出安德鲁·怀尔斯证明大定理所用的模形式、谷山-志村猜想、伽罗瓦群论和科利瓦金-弗莱切方法。

那么，费马本人是用什么方法证明他所提出的猜想的呢？那只是一个有缺陷的证明，还是他以 17 世纪的技巧为基础，涉及到的却是其后几百年所有数学家都没有发现的另一种方法？我们永远也没机会知道了。

“那段特殊的漫长的探索现在结束了，我的心灵归于平静。”安德鲁·怀尔斯说。

传奇似乎已经落幕，而事实上更大的传奇却被永远隐藏在三百五十八年以前。

## **数学**

公元前 212 年，罗马军队入侵叙拉古，将近八十岁的阿基米德正在全神贯注地研究沙堆中的一个几何图形，疏忽了回答一个罗马士兵的问话，结果被长矛戳死。

十八世纪的巴黎女孩索非·热尔曼在一本叫《数学的历史》的书中看到这一章，得出这样的结论：如果一个人会如此痴迷于一个导致他死亡的几何问题，那么数学必定是世界上最迷人的学科了。

她马上对这最迷人的学科着了迷，经常工作到深夜，研究欧拉和牛顿的著作。父母没收了她的蜡烛和衣服，搬走所有可以取暖的东西，以阻止她继续学习。她用

偷藏的蜡烛并用床单包裹着自己继续学习，即使墨水已经在墨瓶中冻僵。最后她的父母妥协。

在那个充满偏见和大男子主义的时代，她冒名“勒布朗先生”，通过书信在只接受男性的巴黎综合工科学院学习，并以这个身份与“数学家之王”高斯通信探讨费马大定理。1806年，拿破仑入侵普鲁士，热尔曼拜托一位法国将军保证高斯的安全。得到特殊照顾的高斯这才知道她的真实身份，否则，她对费马大定理的杰出贡献恐怕就被永远记在那个“勒布朗先生”的头上了。

高斯在致谢信中谈到数学的魔力：“还没有任何东西能以如此令人喜欢和毫不含糊的方式向我证明，这门为我的生活增添了无比欢乐的科学所具有的吸引力决不是虚构的。”

他的表述太过冗长了。还是让热尔曼的同类来回答这个问题吧——当有人问公元四世纪时的女性数学家希帕蒂娅为什么一直不结婚时，她说，她已经和真理结了婚。

就像两千年间涌现出的大多数女数学家一样，索菲·热尔曼终生未婚。

万物皆数，这就是数学的魔力。

数字会奇妙地出现在各种各样的自然现象中。综观世界上所有曲曲弯弯的河流，剑桥大学的地球科学家汉斯·亨利克发现，从河源头到河入海口之间，实际长度与直线距离之比，基本接近于圆周率的值。爱因斯坦提出，这个数字的出现是有序与紊乱相争的结果。

早在公元前六世纪，毕达哥拉斯就发现了数与自然之间的关系。他认识到自然现象是由规律支配的，这些规律可以用数学方程来描述。比如，他在铁匠铺里发现了音乐和声与数的调和之间的关系：那些彼此间音调和谐的锤子有一种简单的数学关系，它们的质量彼此之间成简单比，或者说简分数，像二分之一、三分之一、四分之一。

在昆虫中，蝉的生命周期是最长的，17年。这个素数年数有没有特殊的意义？按照生物学家的解释，这个为素数的生命周期保护了它。只有两种寄生物可以威胁到它：1年期或17年期。而寄生物不可能活着接连出现17年，因为在前16次出现时没有蝉供它们寄生。于是，生命周期为素数有着某种进化论意义上的优势。事实也证明了这一点：蝉的寄生物从未被发现。

数字本身的神秘，更是扣人心弦。完满数意即一个数的因数之和恰好等于其本身的数，比如6的因数为1、2、3，后者相加正好是6，所以是完满数。这个概念已经提出将近三千年了，而数学家们发现的完满数才三十个，而可爱的老六，就是最小的那个。圣奥古斯丁说：“6是一个数，因其自身而完满，并非因上帝在六天中创造了万物；倒过来说才是真实的：上帝在六天中创造万物是因为这个数是完满的。”

再比如26，费马注意到它被夹在一个平方数（25是5的平方）和一个立方数（27是3的立方）之间。他寻求其他这样的数都没有成功，那么26是不是唯一的？迄今没有人能够拿出证明。

说一不二，是数学的另一个魔力。

在数学王国，不存在公说公有理，婆说婆有理，不存在正方反方的辩论赛，参赛者抓阄决定自己的立场，最后获胜的居然是口才好的人。

在数学词典中，数学证明是一个有力而严格的概念，它高于物理学家或化学学家所理解的科学证明。科学证明靠的是观察和理解力，按照评判系统来运转，如果有足够多的证据证明一个理论“摆脱了一切合理的怀疑”，那么这个理论就被认为是对的。而数学并不依赖于容易出错的实验的证据，它立足于不会出错的逻辑，推导出无可怀疑的正确并且永远不会引起争议的结论。

科学仅仅提供近似于真理的概念，而数学，本身就是真理。数学赋予科学一个严密的开端，在这个绝对不会出错的基础上，科学家再添加上不精确的测量和有缺陷的观察。

于是我们就能理解数学家们的残酷，依靠计算机的帮助，有人能断定费马大定理对直到 400 万为止的幂都是对的，但该命题依然不算被证明。

在这方面不是没有反例。31、331、3331、33331、333331、3333331、33333331，经过仔细的探究，数学家们证明了这些数都是素数，那么是不是这种形式的数都是素数呢？下一个数 333333331 就不是，它可以被分解为  $17 \times 19607843$ 。

费马大定理之后，欧拉也提出过一个猜想，即不可能将一个高于 2 次的幂写成三个同样次幂的和。二百多年来没有人能证明这一猜想，后来用计算机细查，仍未找到解。没有反例是这个猜想成立的有力证据，但谨慎的数学家是不会因此而承认欧拉猜想的。果然，1988 年，哈佛大学的内奥姆发现了一个解：2682440 的 4 次幂加 15365639 的 4 次幂加 18796760 的 4 次幂，等于 20615673 的 4 次幂。

依靠一块块绝对可靠的公理定理，数学家构筑出坚固的数学大厦，每一块基石都是可靠的，整栋大厦成为人类智慧家园里最可信任的一幢。

这是数学的荣耀。

数学的魅力，在乎对人类智力和好奇心的挑战。

发展到现在，数学已经成为世界上最孤独的科学。致力于尖端问题研究的数学家，如果试图找到与其对话的人，遍寻全世界，都可能仅以个位数计。但他们肯定以这种孤独为傲。

面对费马大定理，数学家们经受了三个多世纪的壮烈失败，任何卷入其中的数学家都冒着白白浪费生命的风险。他们为什么还要这样前赴后继？

如果能够证明大定理，那么就是解决了其他同行几百年来都深受困扰的难题，在其他失败过的地方取得了成功。除了这种胜人一筹的成就感，就是人类与生俱来的难以克制的好奇心。

解答某个数学问题的欲望多半是出于好奇，而回报则是因解决难题而获得的单纯而巨大的满足感。数学家蒂奇马什说过：“弄清楚圆周率是无理数这件事可能是根本没有实际用处的，但是如果我们能够弄清楚，那么肯定就不能容忍自己不去设法把它弄清楚。”

数学在科学技术中有它的应用，但这不是驱使数学家们的动力。有个学生问欧几里得他正在学习的数学有什么用处，欧几里得转身让奴仆将其逐走：“给这个孩子一个硬币，因为他想在学习中获得实利。”哈代在《一个数学家的自白》中坦言：“从实用的观点来判断，我的数学生涯的价值等于零。”

当安德鲁·怀尔斯知道自己将要付出十年心血并且破解费马大定理的机会并不大时，他依然开始了孜孜演算：“即使它们并未解决整个问题，它们也会是有价值的数学。我不认为我在浪费自己的时间。”

数学是最大的浪漫。

## **数学家**

天文学家、物理学家和数学家坐着火车在苏格兰的大地上奔驰。他们往外眺望，看到田野里有一只黑色的羊。天文学家说：“多么有趣，所有的苏格兰羊都是黑色的。”物理学家反驳道：“不！某些苏格兰羊是黑色的。”数学家慢条斯理地说：“在苏格兰至少存在着一块田地，至少有一只羊，这只羊至少有一侧是黑色的。”

伊恩·斯图尔特在《现代数学的观念》中通过这个笑话，揭示出数学家一丝不苟的严格态度：需要经过确实无疑的证明才能承认某个结论。

所以，一个真正的数学家从来不说过头话。有人问格丁根大学的埃德蒙·蓝道，他的同事埃米·诺特是否真是一个伟大的女数学家，他回答道：“我可以作证她是一个伟大的数学家，但是对她是一个女人这点，我不能发誓。”

也只有数学家，才有资格说出那么不容置疑的话。1986年，两位数学家里贝特和梅休尔出席伯克利的国际数学家大会时，在一家咖啡馆巧遇。里贝特说起正在试图证明的椭圆方程，以及他一直在探索的实验性策略。梅休尔一边品着他的卡布其诺咖啡，一边听着里贝特的叙说。他突然停下咖啡，用确定无疑的口吻说：

“难道你还不明白？你已经完成了它！你还需要做的就是加上一些  $M$ -结构的  $y$ -0，这就行了。”

确定无疑的，世界上只有极少数的人能在随便喝杯咖啡的时候想出这一步。

数学家在某方面表现得近乎迂直。费马在世时是一名文职官员，还在司法部门工作。为了避免这个职务上的人陷入人情腐败，政府要求法官不得参加社交活动，他于是得以潜心研究数学问题。但无论如何，数学都只能算是他的业余爱好，埃里克·贝尔就称他是“业余数学家之王”。

但有人对这样的描述并不满意。朱利安·库利奇写《业余大数学家的数学》一书时，执意将费马排除在外：“他那么杰出，他应该算作专业数学家。”

他们的脾气也同样火爆。索非·热尔曼对费马大定理的证明做出过杰出的贡献，她在物理学领域也颇有建树，并荣获法国科学院的金质奖章，成了第一位不是以某个成员夫人的身份出席科学院讲座的女性。在高斯的说服下，格丁根大学准备授予她名誉博士学位，遗憾的是，此时热尔曼已经死于乳腺癌。

当那些官员为热尔曼出具死亡证明时，竟将她的身份写成“无职业未婚妇女”，而不是女数学家。而对材料弹性理论做出极大贡献的她，也没有出现在埃菲尔铁塔上所铭刻的 72 名专家的名字中。莫赞斯为此大事鞭挞：“对一位如此有功于科学并且由于她的成就而在名誉的殿堂中已经获得值得羡慕的地位的人做出这种忘恩负义的事情来，那些对此负有责任的人该是多么的羞耻。”

文学家成不了数学家，但数学家却可能写出非常动人而性情的文字。

因为说一不二，因为非此即彼，因为无可争议，所以数学家有着愿赌服输的磊落和坦荡。《美丽心灵》中，一群数学家在大厅里向约翰·纳什纷纷献上钢笔，作为一种致敬的方式。这一幕体现出数学王国里特有的江湖道德和伦理。

为鼓励证明费马大定理，法国科学院设立了一系列奖项和巨额奖金。1847年，加布里尔·拉梅登上科学院的讲台，自信地预言几个星期后他会在科学院杂志上发表一个关于费马大定理的完整证明。

拉梅一离开讲台，另一位数学家柯西也要求发言。他宣布自己一直在用与拉梅类似的方法进行研究，并且也即将发表一个完整的证明。

三个星期后，两人各自声明已经在科学院存放了盖章密封的信封，里面是他们急于标明为自己所有的证明方法。数学界许多人都暗暗希望是拉梅而不是柯西赢得这场竞赛，因为后者是一个自以为是家伙，一个狂热的教徒，特别不受同事欢迎。

出乎意料的是，一个月后德国数学家库默尔致函法国科学院，根据拉梅和柯西透露出来的少量细节，他指出了两人共同犯下的逻辑错误。

库默尔的信使得拉梅一下子泄了气，但柯西却拒绝承认失败，几个星期内，他连续发表文章予以辩解，直到夏季结束，才变得安静下来。

十年后，不招人待见的柯西、一贯自以为是的柯西，向法国科学院递交了关于费马大定理的最终报告：“数学科学应该为几何学家，尤其是库默尔先生，出于他们解决该问题的愿望所做的工作而庆幸。委员们认为，如果撤消对这个问题的竞赛而将奖授予库默尔先生，以表彰他关于由单位根和整数组成的复数所做的美妙工作，那将是科学院作出的一项公正而有益的决定。”