第一章 基本概念以及预备知识

§1.1 基本概念

本节介绍偏微分方程中的一些记号和基本概念.

设u为一个函数, n是一个自然数. 对于多重指标$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, 记

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

对$k \in \mathbb{N}$, 记

$$D^k u(x) = \{D^\alpha u(x) | |\alpha| = k\},$$

$$|D^k u(x)| = \left(\sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha u(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

例如, 当$k = 1$, 2时,

$$\begin{aligned} D^1 u(x) &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) | i = 1, 2, \cdots, n \right\} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x), \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right) \\ &= Du(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^2 u(x) &= \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} | i, j = 1, 2, \cdots, n \right\} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$|Du(x)| = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|D^2 u(x)| = \left(\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

含有多元未知函数及其偏导数的等式称为偏微分方程, 其中未知函数的偏导数最高阶数称为方程的阶. 偏微分方程的一般形式为

$$F(D^k u, D^{k-1} u, \cdots, u, x) = 0, \tag{1.1}$$

其中F是$\mathbb{R}^{n^k}\times\mathbb{R}^{n^{k-1}}\times\cdots\times\mathbb{R}\times\Omega$上的已知函数, Ω是$\mathbb{R}^n$中的区域, u是Ω上的未知函数.

如果出现在(1.1)中偏导数$D^\alpha u$都是Ω上连续函数, 且对任意的$x\in\Omega$有

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x),\cdots,u(x),x)=0, \tag{1.2}$$

那么称u是(1.1)的古典解. 若(1.2)可以表成

$$\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x)D^\alpha u=f(x),$$

其中$a_\alpha(|\alpha|\le k)$, f为已知函数, 则称那么(1.2)为做线性方程, 否则称为非线性方程.

最后, 引入常用的函数集合

$$C^k(\bar\Omega)=\{u|D^\alpha u\text{在}\bar\Omega\text{上连续}, |\alpha|\le k\}.$$

它在范数

$$\|u\|_{C^k(\bar\Omega)}:=\sum_{|\alpha|\le k}\sup_\Omega|D^\alpha u|$$

下是一个Banach空间.

§1.2 常用不等式与恒等式

偏微分方程中一个基本方法是所谓的"先验估计". 熟练使用不等式和恒等式是非常重要的.

定理1.2.1. *($Young$不等式) 设$p>1$, $q>1$, 且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 若$a>0$, $b>0$, 则*

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \tag{1.3}$$

特别地, 当$p=q=2$, (1.3)成为$ab\le\frac{a^2+b^2}{2}$.

证明. 由函数e^x的凸性, 有

$$ab=e^{\log a+\log b}=e^{\frac{1}{p}\log a^p+\frac{1}{q}\log b^q}\le\tfrac{1}{p}e^{\log a^p}+\tfrac{1}{q}e^{\log b^q}=\tfrac{a^p}{p}+\tfrac{b^q}{q}.$$

$Young$不等式得证. □

对于多个正数的情形, 有

推论1.2.2. *(一般的$Young$不等式) 设$p_i>1$, $i=1,2,\cdots,m$, 且$\sum\limits_{i=1}^m\frac{1}{p_i}=1$. 若$a_i>0$, $i=1,2,\cdots,m$, 则*

$$\prod_{i=1}^m a_i\le\sum_{i=1}^m\frac{a_i^{p_i}}{p_i}. \tag{1.4}$$

定理1.2.3. *($H\ddot{o}lder$不等式)* 设$p > 1$, $q > 1$, 且$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 若$a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 则

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.5}$$

当$p = q = 2$时, (1.5)成为$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, 其中$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$.

证明. 由$Young$不等式,

$$\begin{aligned}
\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} &= \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{p} \frac{a_i^p}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^p\right)} + \frac{1}{q} \frac{b_i^q}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^q\right)} \right) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{m} a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{m} b_i^q)^{\frac{1}{q}}.$$

$H\ddot{o}lder$不等式得证. □

定理1.2.4. *(积分形式的$H\ddot{o}lder$不等式)* 设$p > 1$, $q > 1$, 且$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 若$f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, 则

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.6}$$

证明. 当(1.5)右侧为零时, f, g其中一个几乎处处为零, (1.5)显然成立. 当右侧不为零时, 由$Young$不等式,

$$\begin{aligned}
\frac{\|fg\|_{L^1(\Omega)}}{\|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}} &= \int_{\Omega} \left(\frac{|f|^p}{\int_{\Omega} |f|^p dx} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|g|^q}{\int_{\Omega} |g|^q dx} \right)^{\frac{1}{q}} dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_{L^p(\Omega)}^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_{L^q(\Omega)}^q} \right) dx \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

积分形式的$H\ddot{o}lder$不等式得证. □

对于m个函数的情形, 有

推论1.2.5. *(一般的积分形式的$H\ddot{o}lder$不等式)* 设$p_i > 1$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 且$\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = 1$. 若$f_i \in L^{p_i}(\Omega) > 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 则

$$\left\| \prod_{i=1}^{m} f_i \right\|_{L^1(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}. \tag{1.7}$$

定理1.2.6. *(插值不等式)* 设$p > 1$, $q > 1$, $0 < \theta < 1$, 且$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$. 若$f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, 则$f \in L^r(\Omega)$, 且有

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\theta} \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}. \tag{1.8}$$

证明. 取$p_\theta = \frac{p}{\theta r}$, $q_\theta = \frac{q}{(1-\theta)r}$, 则$\frac{1}{p_\theta} + \frac{1}{q_\theta} = 1$. 根据$H\ddot{o}lder$不等式,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f|^r dx &= \int_\Omega |f|^{\theta r} |f|^{(1-\theta)r} dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |f|^{\theta r \cdot p_\theta} dx \right)^{\frac{1}{p_\theta}} \left(\int_\Omega |f|^{(1-\theta)r \cdot q_\theta} dx \right)^{\frac{1}{q_\theta}} \\
&= \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{\theta r}{p}} \left(\int_\Omega |f|^q dx \right)^{\frac{(1-\theta)r}{q}},
\end{aligned}$$

即插值不等式成立. □

定理1.2.7. *(微分形式的Gronwall不等式)* 设$g(t)$是$[0,T]$上的非负绝对连续函数, 且

$$g'(t) \leq a(t)g(t) + b(t), \quad a.e. t \in [0,T],$$

这里$a(t)$, $b(t)$是$[0,T]$上的非负可测函数, 则

$$g(t) \leq e^{\int_0^t a(s)ds} \left(g(0) + \int_0^t b(s)ds \right), \quad t \in [0,T]. \tag{1.9}$$

特别地, 当在$[0,T]$上几乎处处有$g'(t) \leq a(t)g(t)$, 且$g(0) = 0$时, 有

$$g(t) \equiv 0, \quad t \in [0,T].$$

证明. 直接计算, 对几乎处处的$s \in [0,T]$有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \left(g(s) e^{-\int_0^s a(r)dr} \right) &= e^{-\int_0^s a(r)dr} (g'(s) - a(s)g(s)) \\
&\leq e^{-\int_0^s a(r)dr} b(s).
\end{aligned}$$

不等式两边从0到t关于s积分, 得

$$\begin{aligned}
g(t) &\leq e^{\int_0^t a(r)dr} \left(g(0) + \int_0^t e^{-\int_0^s a(r)dr} b(s)ds \right) \\
&\leq e^{\int_0^t a(r)dr} \left(g(0) + \int_0^t b(s)ds \right).
\end{aligned}$$

微分形式的$Gronwall$不等式得证. □

定理1.2.8. *(积分形式的Gronwall不等式)* 设$g(t)$是$[0,T]$上的非负可积函数, 且

$$g(t) \leq a(t) \int_0^t g(s)ds + b(t), \quad a.e. \quad t \in [0,T],$$

这里$a(t)$, $b(t)$是$[0,T]$上非负可测函数, 则

$$g(t) \le a(t)e^{\int_0^t a(s)ds}\int_0^t b(s)ds + b(t), \quad a.e. \quad t \in [0,T]. \tag{1.10}$$

特别地, 当$b(t) \equiv 0$时, $g(t) \equiv 0$.

证明. 构造函数$G(t) = \int_0^t g(s)ds$. 根据条件有

$$G'(t) \le a(t)G(t) + b(t), \quad a.e. \quad t \in [0,T].$$

再由微分形式的$Gronwall$不等式, 有

$$G(t) \le e^{\int_0^t a(s)ds}\left(G(0) + \int_0^t b(s)ds\right), \quad a.e. \quad t \in [0,T],$$

即

$$\int_0^t g(s)ds \le e^{\int_0^t a(s)ds}\int_0^t b(s)ds.$$

由条件知

$$g(t) \le a(t)e^{\int_0^t a(s)ds}\int_0^t b(s)ds + b(t).$$

积分形式的$Gronwall$不等式得证. □

下面介绍若干个著名的积分公式. 设Ω为$\mathbb{R}^n$中有界区域, 且$\partial\Omega \in C^1$, $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$是$\partial\Omega$单位外法向.

定理1.2.9. *($Gauss - Green$公式) 若$u \in C^1(\bar{\Omega})$, 则*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}dx = \int_{\partial\Omega} u\nu_i dS, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.11}$$

证明. 不妨设$\Omega = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n | \varphi(x') \le x_n \le \psi(x'), x' \in \Omega'\}$, 其中$\Omega'$是$\Omega$在$\mathbb{R}^{n-1}$中的投影, 且记

$$\begin{aligned} (\partial\Omega)_+ &= \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n = \psi(x'), x' \in \Omega'\}, \\ (\partial\Omega)_- &= \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n = \varphi(x'), x' \in \Omega'\}. \end{aligned}$$

这时$(\partial\Omega)_+$和$(\partial\Omega)_-$的单位外法向分别是

$$\nu = \frac{(D\psi, 1)}{\sqrt{|D\psi|^2 + 1}}, \quad \nu = \frac{(D\varphi, -1)}{\sqrt{|D\varphi|^2 + 1}},$$

从而

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} u\nu_n dS &= \int_{(\partial\Omega)_+} u\nu_n dS + \int_{(\partial\Omega)_-} u\nu_n dS \\
&= \int_{\Omega'} \frac{u(x',\psi(x'))}{\sqrt{|D\psi|^2+1}}\sqrt{|D\psi|^2+1}dx' + \int_{\Omega'} \frac{-u(x',\varphi(x'))}{\sqrt{|D\varphi|^2+1}}\sqrt{|D\varphi|^2+1}dx' \\
&= \int_{\Omega'} (u(x',\psi(x)) - u(x',\varphi(x')))dx' \\
&= \int_{\Omega'} dx' \int_{\varphi(x')}^{\psi(x')} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x',\xi)d\xi \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_n} dx.
\end{aligned}$$

对$i = n$, $Gauss - Green$公式得证. □

对uv应用$Gauss - Green$公式, 有

推论1.2.10. *(分部积分公式)* 设$u,\ v \in C^1(\bar{\Omega})$, 则

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i dS - \int_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.12}$$

根据分部积分公式可以得到下面三个等式:

推论1.2.11. *(Green公式)*设$u,\ v \in C^2(\bar{\Omega})$, 则

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS, \tag{1.13}$$

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int_{\Omega} v\Delta u dx, \tag{1.14}$$

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) dS. \tag{1.15}$$

§1.3 $H\ddot{o}lder$空间

定义1.3.1. 设Ω是$\mathbb{R}^n$中区域, u是Ω上函数, $0 < \gamma \le 1$. 若存在常数C, 使得

$$|u(x) - u(y)| \le C|x - y|^{\gamma}, \quad \forall x, y \in \Omega, \tag{1.16}$$

则称u是Ω上的γ阶$H\ddot{o}lder$连续函数.

当$\gamma = 1$时变成*Lipschitz*条件. 因此, $H\ddot{o}lder$连续是*Lipschitz*连续的一种推广.

例题1.3.2. 设$0 < \gamma < 1$, 证明函数$u(x) = |x|^{\gamma} \in C^{\gamma}(B_1(0))$.

证明. 设$f(t) = (t+1)^{\gamma} - t^{\gamma} - 1, t \ge 0$, 则有

$$f'(t) = \gamma(t+1)^{\gamma-1} - \gamma t^{\gamma-1} < 0.$$

$$f(t) \le f(0) = 0,$$

即

$$(t+1)^\gamma \le t^\gamma + 1, \quad \forall t \ge 0.$$

当$y \neq 0$时, 取$t = \frac{|x-y|}{|y|}$, 有

$$\left(\frac{|x-y|}{|y|} + 1\right)^\gamma \le \left(\frac{|x-y|}{|y|}\right)^\gamma + 1,$$

$$(|x-y| + |y|)^\gamma \le |x-y|^\gamma + |y|^\gamma.$$

再由三角不等式

$$|x|^\gamma \le (|x-y| + |y|)^\gamma \le |x-y|^\gamma + |y|^\gamma,$$

$$|x|^\gamma - |y|^\gamma \le |x-y|^\gamma.$$

当$y = 0$时, 上述不等式显然成立. 交换x和y的位置, 得到

$$|y|^\gamma - |x|^\gamma \le |y-x|^\gamma.$$

所以, 由定义有$|x|^\gamma \in C^\gamma(B_1(0))$. □

若u在Ω上γ阶$H\ddot{o}lder$连续, 定义半范数

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma} \right\}.$$

称集合

$$C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^k(\bar{\Omega}) | [D^k u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} < \infty\}$$

在范数

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}$$

下的线性赋范空间为$H\ddot{o}lder$空间. 它是$Banach$空间.

§1.4 Gagliardo-Nirenberg-Sobolev不等式和Morry不等式

本节主要讨论函数u的梯度Du的L^p范数能控制u本身的哪些范数的问题.

首先对$1 \le p < n$建立不等式

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in C_0^1(\mathbb{R}^n), \tag{1.17}$$

其中$q \ge 1$, C是与u无关的常数.

取定$u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. 对$\lambda > 0$定义$u_\lambda(x) = u(\lambda x)$,再令$y = \lambda x$, 则有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda(x)|^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q dx = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Du_\lambda(x)|^p dx = \lambda^p \int_{\mathbb{R}^n} |Du(\lambda x)|^p dx = \lambda^{p-n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p dy.$$

将u_λ代入(1.17)式有

$$\lambda^{-\frac{n}{q}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C\lambda^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

即

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C\lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

假设$1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q} >$或$< 0$. 分别令$\lambda \to 0$或$\lambda \to \infty$, 则有$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 0$. 由于$u$可取$C_0^1(\mathbb{R}^n)$中的任意元素, 所以$1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q} = 0$. 记$q = \frac{np}{n-p} \triangleq p^*$, 称为$p$的Sobolev对偶数.

下面给出Gagliardo-Nirenberg-Sobolev不等式.

定理1.4.1. *(Gagliardo-Nirenberg-Sobolev不等式) 若$1 \le p < n$, 则存在仅依赖于n和p的常数$C(= \frac{p(n-1)}{n-p})$, 使得对任意的$u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, 有*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.18}$$

当u无紧支集时, (1.18)可能不成立, 例如$u \equiv 1$时上述定理就不成立.

证明. (1) 先设$p = 1$. 对$x \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 有

$$|u(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx_i \right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |Du(x)| dx_i,$$

两边开$n-1$次方, 并对i从1到n求乘积, 得

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \le \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du(x)| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

两边对x_1积分, 并应用$H\ddot{o}lder$不等式, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \\
\le\ & \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du(x)| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du(x)| dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
\le\ & \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Du(x)| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Du(x)| dx_i dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}$$

上式两边再对x_2积分, 并用$Hölder$不等式, 又有

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1dx_2\\
\le\ &\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|Du(x)|dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\\
&\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|Du(x)|dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{i=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|Du(x)|dx_idx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_2\\
\le\ &\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|Du(x)|dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|Du(x)|dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\\
&\cdot\prod_{i=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|Du(x)|dx_1dx_2dx_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\\
=\ &\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|Du(x)|dx_1dx_2\right)^{\frac{2}{n-1}}\prod_{i=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|Du(x)|dx_1dx_2dx_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}
$$

利用不完全归纳, 分别对$x_3,\dots,x_{n-1}$进行积分, 可得

$$
\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}\le\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|Du(x)|dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du(x)|dx\right)^{\frac{1}{n-1}}.
$$

最后两边对x_n积分

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du(x)|dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du(x)|dx\right)^{\frac{1}{n-1}}\\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du(x)|dx\right)^{\frac{n}{n-1}},
\end{aligned}
$$

即

$$
\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\le\|Du\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.19}
$$

这就是$p=1$时的估计式(1.18).

2. 下面来考虑$1<p<n$的情形. 对$v:=|u|^{\gamma}$应用估计(1.18), 得

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\le\int_{\mathbb{R}^n}|D|u|^{\gamma}|dx=\gamma\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\gamma-1}|Du|dx,
$$

其中$\gamma>1$. 应用$Hölder$不等式, 知

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\le\gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}.
$$

选取γ满足$\frac{\gamma n}{n-1}=\frac{(\gamma-1)p}{p-1}$, 即令

$$
\gamma=\frac{p(n-1)}{n-p}>1.
$$

这时
$$\frac{\gamma n}{n-1}=\frac{p(n-1)}{n-p}\cdot\frac{n}{n-1}=\frac{np}{n-p}=p^*,$$
成为
$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\le\gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$
即
$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{n-1}{n}-\frac{p-1}{p}}\le\gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$
不等式(1.18)得证. □

本节的第二部分在$p>n$的情形建立不等式
$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)}\le C(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}),\quad\forall u\in C^1(\mathbb{R}^n),\tag{1.20}$$
其中$0<\gamma\le 1$, C是与u无关的常数.

给定$u\in C^1(\mathbb{R}^n)$. 对$\lambda>0$, 取$u_\lambda(x)=u(\lambda x)$, 则
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|u_\lambda(x)|=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|u(\lambda x)|=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|u(x)|,$$
$$[u_\lambda]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)}=\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n\\x\ne y}}\frac{|u_\lambda(x)-u_\lambda(y)|}{|x-y|}=\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n\\x\ne y}}\frac{|u(\lambda x)-u(\lambda y)|}{|x-y|^\gamma}=\lambda^\gamma[u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)}.$$
并且
$$\|u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=\lambda^{-\frac{n}{p}}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$
$$\|Du_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=\lambda^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$
代入(1.20)得
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|u(x)|+\lambda^\gamma[u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)}\le C(\lambda^{-\frac{n}{p}}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\lambda^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}).$$
假设$\gamma>1-\frac{n}{p}$, 令$\lambda\to+\infty$, 得$[u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)}=0$. 这对一般的$u$是不可能的, 故$\gamma\le 1-\frac{n}{p}$.

下面给出$Morrey$不等式.

定理1.4.2. *(Morrey不等式) 若$p>n$, 则存在仅依赖于n和p的常数C, 使得对任意的$u\in C^1(\mathbb{R}^n)$, 有*
$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)}\le C(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}),\tag{1.21}$$
其中$\gamma:=1-\frac{n}{p}$.

证明. 第一步. 首先证明一个预备性不等式. 对任取的球$B_r(x)\subset\mathbb{R}^n$, 有
$$\int_{B_r(x)}|u(x)-u(y)|dy\le\frac{r^n}{n}\int_{B_r(x)}\frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}dy.\tag{1.22}$$

取定$x\in\mathbb{R}^n$, $\omega\in\partial B_1(0)$, $s\in(0,r)$,

$$\begin{aligned}|u(x+s\omega)-u(x)| &= \left|\int_0^s\frac{d}{dt}u(x+t\omega)dt\right|\\ &= \left|\int_0^s Du(x+t\omega)\cdot\omega dt\right|\\ &\le \int_0^s|Du(x+t\omega)|dt.\end{aligned}$$

两边关于ω在$\partial B_s(0)$上积分

$$\int_{\partial B_s(0)}|u(x+s\omega)-u(x)|dS_1\le\int_{\partial B_s(0)}\int_0^s|Du(x+t\omega)|dtdS_s.$$

令$y=x+t\omega$, 有

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_s(0)}|u(x+s\omega)-u(x)|dS_s &\le \int_0^s\int_{\partial B_t(0)}|Du(x+t\omega)|\frac{s^{n-1}}{t^{n-1}}dS_tdt\\ &= s^{n-1}\int_{B_s(x)}\frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}dy,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{B_r(x)}|u(x)-u(y)|dy &= \int_0^r\int_{\partial B_s(0)}|u(x+s\omega)-u(x)|dS_sds\\ &\le \int_0^r s^{n-1}\int_{B_r(x)}\frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}dyds\\ &= \frac{r^n}{n}\int_{B_r(x)}\frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}dy.\end{aligned}$$

第二步. 其次证明

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|u(x)|\le C(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}).$$

在$|u(x)|\le|u(x)-u(y)|+|u(y)|$两边关于$y$在$B_1(x)$上积分, 利用不等式(1.22)以及$H\ddot{o}lder$不等式, 注意$|B_1(x)|=\omega_n$是$\mathbb{R}^n$中单位球的体积

$$\begin{aligned}|u(x)| &\le \frac{1}{|B_1(x)|}\int_{B_1(x)}|u(x)-u(y)|dy+\frac{1}{|B_1(x)|}\int_{B_1(x)}|u(y)|dy\\ &\le \frac{1}{n\omega_n}\int_{B_1(x)}\frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}dy+\frac{1}{|B_1(x)|}\int_{B_1(x)}|u(y)|dy\\ &\le \frac{1}{n\omega_n}\|Du\|_{L^p(B_1(x))}\left\|\frac{1}{|y-x|^{n-1}}\right\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(B_1(x))}+\frac{1}{|B_1(x)|}\|1\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(B_1(x))}\|u\|_{L^p(B_1(x))}\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{\frac{p-1}{p}}\omega_n^{-\frac{1}{p}}\|Du\|_{L^p(B_1(x))}+|\omega_n|^{-\frac{1}{p}}\|u\|_{L^p(B_1(x))}\\ &\le C(\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}).\end{aligned}$$

第三步. 最后证明

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)}\le C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

对任意的$x,\ y\in\mathbb{R}^n$, 记$r=|x-y|$, $W=B_r(x)\bigcap B_r(y)$, 则

$$|u(x)-u(y)|\le\frac{1}{|W|}\int_W|u(x)-u(z)|dz+\frac{1}{|W|}\int_W|u(y)-u(z)|dz.$$

应用(1.22), 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{|W|}\int_W|u(x)-u(z)|dz &\le \frac{C}{r^n}\int_{B_r(x)}|u(x)-u(z)|dz\\ &\le \frac{C}{n}\int_{B_r(x)}\frac{|Du(z)|}{|z-x|^{n-1}}dz\\ &\le \frac{C}{n}\|Du\|_{L^p(B_r(x))}\left\|\frac{1}{|z-x|^{n-1}}\right\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(B_r(x))}.\end{aligned}$$

直接计算第二个因子, 得

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{|z-x|^{n-1}}\right\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(B_r(x))} &= \left(\int_0^r\int_{\partial B_t(x)}\left(\frac{1}{|z-x|^{n-1}}\right)^{\frac{p}{p-1}}dS_tdt\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &= \left(\int_0^r(t^{n-1})^{-\frac{p}{p-1}}n\omega_nt^{n-1}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &= \left(\frac{n(p-1)}{p-n}\omega_n\right)^{\frac{p-1}{p}}r^{1-\frac{n}{p}}.\end{aligned}$$

代入上式有

$$\frac{1}{|W|}\int_W|u(x)-u(z)|dz\le Cr^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_{L^p(B_r(x))}.$$

同理,

$$\frac{1}{|W|}\int_W|u(y)-u(z)|dz\le Cr^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_{L^p(B_r(y))}.$$

因为$\gamma=1-\frac{n}{p}$, 所以

$$|u(x)-u(y)|\le Cr^\gamma\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

即

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)}\le C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

结合第二和三步, 定理得证. □

本节的最后考虑$p=n$的情形. 根据(1.18), 当$p<n$时

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\le\frac{p(n-1)}{n-p}\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

显然, 可知

$$\lim_{p\to n}p*=\infty,\quad \lim_{p\to n}\frac{p(n-1)}{n-p}=\infty.$$

通过下面的反例可以知道不存在仅与n有关的常数C, 使得

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\le C(n)\|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)},\quad \forall u\in C_0^1(\mathbb{R}^n). \tag{1.23}$$

构造函数$u^\varepsilon \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $suppu^\varepsilon \subset B_2(0)$, 且

$$0 \le u^\varepsilon \le \ln\ln\left(1+\frac{e}{\varepsilon}\right),$$

$$u^\varepsilon(x) = \ln\ln\left(1+\frac{e}{\sqrt{|x|^2+\varepsilon^2}}\right), \quad x \in B_1(0).$$

直接计算, 在$B_1(0)$上有

$$\begin{aligned}
|Du^\varepsilon| &= \left|\frac{1}{\ln\left(1+\frac{e}{\sqrt{|x|^2+\varepsilon^2}}\right)} \cdot \frac{1}{1+\frac{e}{\sqrt{|x|^2+\varepsilon^2}}} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{e\cdot 2x}{(|x|^2+\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\right| \\
&\le \frac{1}{\ln\left(1+\frac{e}{\sqrt{|x|^2+\varepsilon^2}}\right)} \cdot \frac{1}{1+\frac{e}{\sqrt{|x|^2+\varepsilon^2}} \cdot \frac{e}{|x|^2+\varepsilon^2}},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_{B_1(0)} |Du^\varepsilon|^n dx &\le \int_0^1 \int_{\partial B_t(0)} \left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{e}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}\right)} \cdot \frac{1}{1+\frac{e}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}} \cdot \frac{e}{t^2+\varepsilon^2}\right)^n dS_t dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{e}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}\right)} \cdot \frac{1}{1+\frac{e}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}} \cdot \frac{e}{t^2+\varepsilon^2}\right)^n \cdot n\omega_n t^{n-1} dt \\
&= n\omega_n \int_{1+\frac{e}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}}^{1+\frac{e}{\varepsilon}} \left(\frac{1}{\ln s}\cdot\frac{1}{s}\right)^n \left(\frac{s-1}{e}\right)^{n-1} ds \\
&\le \frac{n\omega_n}{e^{n-1}} \int_2^\infty \frac{ds}{s\ln^n s} \\
&= \frac{\omega_n \ln^{1-n} 2}{(n-1)e^{n-1}}.
\end{aligned}$$

但是

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\ln\left(1+\frac{e}{\varepsilon}\right) = \infty.$$

由此可知不等式(1.23)不成立.

§1.5 Sobolev 空间

设Ω为$\mathbb{R}^n$中的一个区域, $u \in C^1(\Omega)$. 对任意的$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 由分部积分公式有

$$\int_\Omega u\varphi_{x_i} dx = -\int_\Omega u_{x_i}\varphi dx, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

更一般地, 若$u \in C^k(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = k$, 则对任意的$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 使用$k$次分部积分公式,

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u\varphi dx. \tag{1.24}$$

可以看出, 上式左边当u是局部可积时是有意义的, 但右边当$D^\alpha u$不局部可积时是没有意义的. 下面给出弱导数的定义.

定义1.5.1. 设u, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. 若

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.25}$$

成立, 则称v是u的α阶弱导数, 记为$D^\alpha u = v$.

由(1.24), 古典导数一定是弱导数.

引理1.5.2. *(弱导数的唯一性) 若u的α阶弱导数存在, 则除一个零测度集外它是唯一的.*

证明. 假设$\tilde{v}$, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$都是u的α阶弱导数, 那么

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \tilde{v} \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

即

$$\int_\Omega (v - \tilde{v}) \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

从而有

$$v \equiv \tilde{v}. \quad a.e. x \in \Omega.$$

引理得证. □

例题1.5.3. 设$n = 1$, $\Omega = (-\pi, 1)$, 则

$$u(x) = \begin{cases} cosx, & -\pi < x \le 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

的弱导数是

$$v(x) = \begin{cases} -sinx, & -\pi < x \le 0, \\ -1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

证明. 对$\varphi \in C_0^\infty(-\pi, 1)$有

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^1 u \varphi' dx &= \int_{-\pi}^0 \varphi' \cos x dx + \int_0^1 (1 - x) \varphi' dx \\ &= \varphi cosx|_{-\pi}^0 + \int_{-\pi}^0 \varphi \sin x dx + (1 - x)\varphi|_0^1 + \int_0^1 \varphi dx \\ &= \int_{-\pi}^0 \varphi \sin x dx + \int_0^1 \varphi dx \\ &= -\int_{-\pi}^1 v \varphi dx. \end{aligned}$$

□

例题1.5.4. 设$n=1$, $\Omega=(0,2)$,

$$u(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 1\ , \\ 2, & 1<x<2\ . \end{cases}$$

则$u(x)$的弱导数不存在.

证明. 我们要证明不存在$v\in L^1_{loc}(0,2)$满足

$$\int_0^2 u\varphi' dx=-\int_0^2 v\varphi dx,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(0,2). \tag{1.26}$$

否则, 存在一个$v\in L^1_{loc}(0,2)$, 使得(1.26)成立. 那么

$$\begin{aligned} -\int_0^2 v\varphi dx &= \int_0^2 u\varphi' dx \\ &= \int_0^1 x\varphi' dx+2\int_1^2 \varphi' dx \\ &= -\int_0^1 \varphi dx-\varphi(1). \end{aligned}$$

选取一个光滑函数序列$\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$, 满足$supp\varphi\subset\subset(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$, $0\le\varphi_m\le 1$, $\varphi_m(1)=1$, 且对所有的$x\neq 1$, $\varphi_m(x)\to 0$. 替换(1.26)中的φ为φ_m, 并令 $m\to\infty$. 根据控制收敛定理, 有

$$1=\lim_{m\to\infty}\varphi_m(1)=\lim_{m\to\infty}\left(\int_0^2 v\varphi_m dx-\int_0^1\varphi_m dx\right)=0.$$

得到矛盾. □

命题1.5.5. *(弱导数的性质)*

(1) 若u,v有α阶弱导数, 则对任意的$a,b\in\mathbb{R}$, $au+bv$也有α阶弱导数, 且

$$D^\alpha(au+bv)=aD^\alpha u+bD^\alpha v.$$

(2) 若u有α与$\alpha+\beta$阶弱导数, 则$D^\alpha u$有β阶弱导数, 且$D^\beta(D^\alpha u)=D^{\alpha+\beta}u$.

(3) 若u有直至α阶的弱导数, 则对$\zeta\in C_0^\infty(\Omega)$, ζu也有α阶弱导数, 且

$$D^\alpha(\zeta u)=\sum_{\beta\le\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}D^\beta\zeta D^{\alpha-\beta}u\qquad (Leibniz\text{公式}). \tag{1.27}$$

这里$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

证明. (1) 由于u,v有α阶弱导数, 对$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, 得到

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u\varphi dx,$$
$$\int_\Omega vD^\alpha\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha v\varphi dx,$$

从而

$$\int_\Omega (au+bv)D^\alpha\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (aD^\alpha u+bD^\alpha v)\varphi dx,$$

由弱导数的定义, 有

$$D^\alpha(au+bv)=aD^\alpha u+bD^\alpha v.$$

(2) 由于u有α与$\alpha+\beta$阶弱导数, 对φ, $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$, 得到

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u\varphi dx, \tag{1.28}$$

$$\int_\Omega uD^{\alpha+\beta}\psi dx=(-1)^{|\alpha|+|\beta|}\int_\Omega D^{\alpha+\beta}u\psi dx. \tag{1.29}$$

取$\varphi=D^\beta\psi$, 代入(1.28),

$$\int_\Omega uD^{\alpha+\beta}\psi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha uD^\beta\psi dx.$$

由(1.29)有

$$\int_\Omega D^\alpha uD^\beta\psi dx=(-1)^{|\beta|}\int_\Omega D^{\alpha+\beta}u\psi dx,$$

即

$$D^\beta(D^\alpha u)=D^{\alpha+\beta}u.$$

(3) 根据弱导数的定义, 只需对$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$证明

$$\int_\Omega \zeta uD^\alpha\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega\sum_{\beta\le\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}D^\beta\zeta D^{\alpha-\beta}u\varphi dx.$$

由u弱导数的定义和古典导数的$Leibniz$公式, 有

$$\begin{aligned}
&(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega\sum_{\beta\le\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}D^\beta\zeta D^{\alpha-\beta}u\varphi dx\\
=\ &(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega\sum_{\beta\le\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}(-1)^{|\alpha|-|\beta|}uD^{\alpha-\beta}(\varphi D^\beta\zeta)dx\\
=\ &(-1)^{|\beta|}\int_\Omega u\sum_{\beta\le\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\sum_{\gamma\le\alpha-\beta}\begin{pmatrix}\alpha-\beta\\ \gamma\end{pmatrix}D^\gamma\varphi D^{\alpha-\beta}\zeta dx\\
=\ &\int_\Omega u\sum_{\gamma\le\alpha}\sum_{\beta\le\alpha-\gamma}(-1)^{|\beta|}\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha-\gamma\\ \beta\end{pmatrix}D^\gamma\varphi D^{\alpha-\gamma}\zeta dx\\
=\ &\int_\Omega u\sum_{\gamma\le\alpha}(1-1)^{\alpha-\gamma}\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}D^\gamma\varphi D^{\alpha-\gamma}\zeta dx\\
=\ &\int_\Omega u\zeta D^\alpha\varphi dx.
\end{aligned}$$

综上, 命题得证. □

定义1.5.6. *(Sobolev空间)* 设Ω是$\mathbb{R}^n$中的有界区域, $1 \le p \le \infty$, $k \in \mathbb{N}$, 称集合

$$\{u \in L^p(\Omega) | D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \le k\}$$

在范数

$$\|u\| := \begin{cases} \sum_{|\alpha|\le k} \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} |D^\alpha u|, & p = \infty. \\ \left(\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty; \end{cases}$$

下的线性赋范空间为$Sobolev$空间, 记作$W^{k,p}(\Omega)$.

若对任意的$\Omega_0 \subset\subset \Omega$, 都有$u \in W^{k,p}(\Omega_0)$, 则称$u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, 即

$$W^{k,p}_{loc}(\Omega) = \{u \in L^p_{loc}(\Omega) | D^\alpha u \in L^p_{loc}(\Omega), |\alpha| \le k\}.$$

定义1.5.7. 记$W_0^{k,p}(\Omega)$是$C_0^\infty(\Omega)$在$W^{k,p}(\Omega)$中的闭包.

当$p = 2$时, 通常记

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega), \quad H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega), \quad H^k_{loc}(\Omega) = W^{k,2}_{loc}(\Omega).$$

将来会看到$H^k(\Omega)$是一个$Hilbert$空间, $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

例题1.5.8. 取$\Omega = B_1(0)$, $u(x) = |x|^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. 当n, p满足什么条件时, $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

解. 首先当$x \ne 0$时, 有

$$u_{x_i}(x) = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}},$$

从而

$$|Du(x)| = \frac{\alpha}{|x|^{\alpha+1}}.$$

对$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varepsilon \in (0,1)$, 有

$$\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)} u\varphi_{x_i} dx = -\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)} u_{x_i}\varphi dx + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi\nu^i dS,$$

$\nu = (\nu^1, \ldots, \nu^n)$表示 $\partial B_\varepsilon(0)$上的单位内法向. 若$\alpha + 1 < n$, 则$|Du(x)| \in L^1(\Omega)$, 且

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi\nu^i dS\right| \le \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varepsilon^{-\alpha} dS = n\omega_n \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \varepsilon^{n-1-\alpha} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

从而有

$$\int_\Omega u\varphi_{x_i} dx = -\int_\Omega u_{x_i}\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad 0 \le \alpha < n - 1,$$

即u关于x_i的弱导数是u_{x_i}. 更进一步有

$$|u(x)| = \frac{1}{|x|^\alpha} \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \alpha p < n,$$

$$|Du(x)| = \frac{\alpha}{|x|^{\alpha+1}} \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow (\alpha + 1)p < n.$$

因此$u \in W^{1,p}(\Omega)$的充要条件是$\alpha < \frac{n-p}{p}$. 特别地, 当$p \ge n$时, $u \notin W^{1,p}(\Omega)$.

这个例子说明, 无界函数可以是$Sobolev$空间中的函数.

定理1.5.9. *(Sobolev嵌入定理)* 设Ω是$\mathbb{R}^n$中有界区域, $u \in W_0^{1,p}(\Omega), 1 \le p \le +\infty$, 则

(1) 当$p < n$时, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, 且

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le C(n,p)\|Du\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.30}$$

(2) 当$p = n$时, $W_0^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $2 \le q < +\infty$, 且

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C(n,q,|\Omega|)\|Du\|_{L^n(\Omega)}. \tag{1.31}$$

(3) 当$p > n$时, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, 且

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \le C(n,p)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.32}$$

证明. 由$W_0^{1,p}(\Omega)$定义, 存在$\{u_m\} \subset C_0^\infty(\Omega)$, 使得在$W^{1,p}(\Omega)$中$u_m \to u$.

(1) 由$G-N-S$不等式, 存在仅与n, p有关的常数C, 使得对任意的$m, l \in \mathbb{N}$, 有

$$\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le C\|Du_m - Du_l\|_{L^p(\Omega)},$$

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le C\|Du_m\|_{L^p(\Omega)}.$$

由L^{p^*}的完备性, 在$L^{p^*}(\Omega)$中, $u_m \to u$中, 且

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le C\|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

(2) 对$q \ge 2$, 取$p = \frac{nq}{n+q} \in [1,n)$, 使得

$$q = p^* = \frac{np}{n-p},$$

则

$$W_0^{1,n}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega) = L^q(\Omega).$$

由$H\ddot{o}lder$不等式

$$\|Du\|_{L^p(\Omega)} \le |\Omega|^{\frac{n-p}{np}}\|Du\|_{L^n(\Omega)}.$$

根据(1), 有$u \in L^q(\Omega) = L^{p^*}(\Omega)$, 且

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le C\|Du\|_{L^p(\Omega)} \le C\|Du\|_{L^n(\Omega)}.$$

(3) 根据$Morrey$不等式, 存在仅与n, p有关的常数C, 使得对任意的$m, l \in \mathbb{N}$, 有

$$\|u_m - u_l\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \le C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

$$\|u_m\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \le C\|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

由$C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$的完备性, 在$C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$中$u_m \to u$, 且

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

综上, Sobolev嵌入定理得证. $\square$

§1.6 磨光函数及其应用

定义1.6.1. 设

$$\eta(x)=\begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & |x|<1,\\ 0, & |x|\geq 1.\end{cases}$$

这里C的选取使得$\int_{\mathbb{R}^n}\eta(x)dx=1$. 对$\varepsilon>0$, 称

$$\eta_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$$

为磨光子.

可以看出η, $\eta_\varepsilon\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且满足

$$\int_{\mathbb{R}^n}\eta_\varepsilon dx=1,\quad \mathrm{supp}\eta_\varepsilon\subset B_\varepsilon(0).$$

定义1.6.2. 设Ω是$\mathbb{R}^n$中的区域, $f\in L^1_{loc}(\Omega)$. 对$\varepsilon>0$, 定义其在$\Omega_\varepsilon=\{x\in\Omega\mid dist(x,\partial\Omega)>\varepsilon\}$上的磨光函数为

$$f^\varepsilon:=\eta_\varepsilon * f,$$

即对$x\in\Omega_\varepsilon$,

$$f^\varepsilon(x)=\int_\Omega\eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy=\int_{B_\varepsilon(0)}\eta_\varepsilon(y)f(x-y)dy.$$

命题1.6.3. *(磨光函数的性质)*

(1) $f^\varepsilon\in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, $\forall\varepsilon>0$.

(2) 当$\varepsilon\to 0$时, $f^\varepsilon\to f$, $\quad a.e. x\in\Omega$.

(3) 若$f\in C^0(\Omega)$,则当$\varepsilon\to 0$时, 在$C^0(\Omega)$中$f^\varepsilon\to f$.

(4) 若$f\in L^p_{loc}(\Omega)$, $1\leq p<\infty$, 则当$\varepsilon\to 0$时在$L^p_{loc}(\Omega)$中, $f^\varepsilon\to f$.

(5) 若$f\in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, $k\in\mathbb{N}$, $1\leq p<\infty$, 则当$\varepsilon\to 0$时在$W^{k,p}_{loc}(\Omega)$中, $f^\varepsilon\to f$.

证明. (1) 对任意固定的$x\in\Omega_\varepsilon$, $i\in\{1,\cdots,n\}$, 取h足够小使得$x+he_i\in\Omega_\varepsilon$, 则

$$\begin{aligned}\frac{f^\varepsilon(x+he_i)-f^\varepsilon(x)}{h}&=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_\Omega\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]f(y)dy\\&=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_V\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]f(y)dy,\end{aligned}$$

其中$V\subset\subset\Omega$. 因

$$\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]\to\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right),\quad h\to 0$$

在V上一致成立. 从而$\dfrac{\partial f^{\varepsilon}}{\partial x_i}(x)$存在且等于

$$\int_{\Omega}\frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial x_i}(x-y)f(y)dy.$$

用同样的方法可以证明$D^{\alpha}f^{\varepsilon}(x)$存在, $\alpha\in\mathbb{N}^n$, 且

$$D^{\alpha}f^{\varepsilon}(x)=\int_{\Omega}D^{\alpha}\eta_{\varepsilon}(x-y)f(y)dy,\quad x\in\Omega_{\varepsilon}.$$

(2) 固定一个$Lebesgue$点x, 并应用$Lebesgue$微分定理, 得

$$\begin{aligned}|f^{\varepsilon}(x)-f(x)| &= \left|\int_{B_{\varepsilon}(x)}\eta_{\varepsilon}(x-y)(f(y)-f(x))dy\right|\\ &\le \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B_{\varepsilon}(x)}\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)|f(y)-f(x)|dy\\ &\le \frac{\omega_n\sup_{\mathbb{R}^n}\eta}{|B_{\varepsilon}(x)|}\int_{B_{\varepsilon}(x)}|f(y)-f(x)|dy\to 0,\quad \varepsilon\to 0.\end{aligned}$$

由于f对来说, $Lebesgue$点是几乎处处的. 所以$f^{\varepsilon}\to f,\quad a.e. x\in\Omega$.

(3) 对$V\subset\subset\Omega$, 想证明$\forall\varepsilon'>0$, $\exists\delta'>0$, $\forall\varepsilon<\delta'$, $x\in V$, $|f^{\varepsilon}(x)-f(x)|<\varepsilon'$. 选取$V\subset\subset W\subset\subset\Omega$, 由于$f\in C^0(\Omega)$, f在W上一致连续, 即$\forall\varepsilon'>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x$, $y\in W$, $|x-y|<\delta$, $|f(x)-f(y)|<\varepsilon'$. 取$\delta'=\min\{\delta,dist(V,\partial W)\}$, 当$\varepsilon<\delta'$, $x\in V$时, $B_{\varepsilon}(x)\subset\subset W\bigcap B_{\delta}(x)$, 且

$$\begin{aligned}|f^{\varepsilon}(x)-f(x)| &= \left|\int_{B_{\varepsilon}(x)}\eta_{\varepsilon}(x-y)(f(y)-f(x))dy\right|\\ &\le \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B_{\varepsilon}(x)}\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)|f(y)-f(x)|dy\\ &\le \omega_n\sup_{\mathbb{R}^n}\eta C\varepsilon'.\end{aligned}$$

所以$\{f^{\varepsilon}\}$在Ω上局部一致收敛到f.

(4) 设开集$V\subset\subset\Omega$. 当$1<p<\infty$, $x\in V$时有

$$\begin{aligned}|f^{\varepsilon}(x)| &= \left|\int_{B_{\varepsilon}(x)}\eta_{\varepsilon}(x-y)f(y)dy\right|\\ &\le \int_{B_{\varepsilon}(x)}\eta_{\varepsilon}^{1-\frac{1}{p}}(x-y)\cdot\eta_{\varepsilon}^{\frac{1}{p}}(x-y)|f(y)|dy\\ &\le \left(\int_{B_{\varepsilon}(x)}\eta_{\varepsilon}(x-y)dy\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{B_{\varepsilon}(x)}\eta_{\varepsilon}(x-y)|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(\int_{B_{\varepsilon}(x)}\eta_{\varepsilon}(x-y)|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

选取W满足$V \subset\subset W \subset\subset \Omega$, 交换积分次序, 得

$$\begin{aligned}\int_V |f^\varepsilon(x)|^p dx &\le \int_V \left(\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p dy\right) dx \\ &\le \int_{B_\varepsilon(V)} |f(y)|^p \left(\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y) dx\right) dy \\ &\le \int_W |f(y)|^p dy,\end{aligned}$$

其中$\varepsilon < dist(V, \partial W)$, $B_\varepsilon(V) = \{y \mid dist(y, V) < \varepsilon\} \subset W$. 所以$f^\varepsilon \in L^p(V)$, 且

$$\|f^\varepsilon\|_{L^p(V)} \le \|f\|_{L^p(W)}.$$

对$\delta > 0$, 选取$g \in C^0(W)$, 使得

$$\|f - g\|_{L^p(W)} < \delta.$$

那么

$$\begin{aligned}\|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} &\le \|f^\varepsilon - g^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g - f\|_{L^p(V)} \\ &\le 2\|f - g\|_{L^p(W)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} \\ &\le 2\delta + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)}.\end{aligned}$$

因为$g^\varepsilon \to g$在V上一致成立, 所以有

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \le 2\delta.$$

由于δ的任意性, 结论得证.

(5) 积分号下求导, 得

$$\begin{aligned}D^\alpha f^\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_\Omega D_x^\alpha \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y) dy \\ &= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\varepsilon^n} \int_\Omega D_y^\alpha \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_\Omega \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) D^\alpha f(y) dy \\ &= (D^\alpha f)^\varepsilon(x).\end{aligned}$$

由(4)和$D^\alpha f \in L^p_{loc}(\Omega)$, 在$L^p_{loc}(\Omega)$中有$(D^\alpha f)^\varepsilon \to D^\alpha f$, 即在$W^{k,p}_{loc}(\Omega)$中$f^\varepsilon \to f$. □

定理1.6.4. *(稠密性定理) 设Ω是有界区域, $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, 则$C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$在$W^{k,p}(\Omega)$中稠密.*

当Ω是有界的C^1区域时, $C^\infty(\bar{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)$在$W^{k,p}(\Omega)$中稠密.

证明. 设$\{\Omega_j\}$是一列区域, 满足$\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \cdots \subset\subset \Omega_j \subset\subset \cdots \subset\subset \Omega$, 且$\cup_{j=1}^\infty \Omega_j = \Omega$. 又设$\{\psi_j\}_{j=0}^\infty$是从属于$\{\Omega_{j+1} \backslash \Omega_{j-1}\}$的单位分解, 即

$$\text{supp}\psi_j \subset\subset \Omega_{j+1} \backslash \Omega_{j-1}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots,$$

且对任意的$x \in \Omega$, $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x) = 1$, 其中$\Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset$.

对$u \in W^{k,p}(\Omega)$和$\varepsilon > 0$, 存在$\varepsilon_j > 0$, 使得

$$
\varepsilon_j < \mathrm{dist}(\Omega_j, \partial\Omega_{j+1}),
$$

$$
\|(\psi_j u)^{\varepsilon_j} - \psi_j u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots .
$$

记$v_j = (\psi_j u)^{\varepsilon_j}$, 则对于给定的$\Omega' \subset\subset \Omega$, 只有有限个$v_j$在$\Omega'$上不为零. 从而$v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \in C^{\infty}(\Omega)$, 且

$$
\begin{aligned}
\|u - v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \|\sum_{j=0}^{\infty}(\psi_j u - v_j)\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty} \|\psi_j u - v_j\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

稠密性定理得证. □

定理1.6.5. *(延拓定理) 设Ω是有界的C^k区域, V是有界开集, 且$\Omega \subset\subset V$, $1 \le p < \infty$, 则存在有界线性算子*

$$
E : W^{k,p}(\Omega) \longrightarrow W_0^{k,p}(V),
$$

使得对任意的$u \in W^{k,p}(\Omega)$, 都有

(1) $Eu = u, \quad a.e. \quad x \in \Omega$.

(2) $suppEu \subset V$.

(3) $\|Eu\|_{W^{k,p}(V)} \le C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$. 其中$C$是仅与$n, k, p$和$\Omega$有关的常数.

证明. 仅对$k = 1$给出证明.

第一步. 记

$$
\begin{aligned}
x &= (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^1, \\
B_r^+(0) &= \{x \in B_r(0) | x_n > 0\}, \\
B_r^-(0) &= \{x \in B_r(0) | x_n < 0\}, \\
B_r^0(0) &= \{x \in B_r(0) | x_n = 0\}.
\end{aligned}
$$

对$u \in C^1(B_r^+(0) \cup B_r^0(0))$, 定义

$$
\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in B_r^+(0) \cup B_r^0(0), \\ -3u(x', -x_n) + 4u(x', -\frac{x_n}{2}), & x \in B_r^-(0). \end{cases}
$$

下证$\tilde{u} \in C^1(B_r(0))$.

显然$\tilde{u}\in C^0(B_r(0))\cap C^1(B_r(0)\backslash B_r^0(0))$. 当$i<n$时,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(x)=\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x), & x\in B_r^+(0),\\ -3\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x',-x_n)+4\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x',-\dfrac{x_n}{2}), & x\in B_r^-(0),\end{cases}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x)=\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x), & x\in B_r^+(0),\\ 3\dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x',-x_n)-2\dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x',-\dfrac{x_n}{2}), & x\in B_r^-(0).\end{cases}$$

所以

$$\lim_{x_n\to 0}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x)=\frac{\partial u}{\partial x_n}(x',0),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

即$\tilde{u}\in C^1(B_r(0))$.

由三角不等式, 得

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(B_r(0))}&=\|u\|_{W^{1,p}(B_r^+(0))}+\left\|-3u(x',-x_n)+4u(x',-\frac{x_n}{2})\right\|_{L^p(B_r^-(0))}\\&\quad+\sum_{i=1}^{n-1}\left\|-3\frac{\partial u}{\partial x_i}(x',-x_n)+4\frac{\partial u}{\partial x_i}(x',-\frac{x_n}{2})\right\|_{L^p(B_r^-(0))}\\&\quad+\left\|3\frac{\partial u}{\partial x_n}(x',-x_n)-2\frac{\partial u}{\partial x_n}(x',-\frac{x_n}{2})\right\|_{L^p(B_r^-(0))}\\&\le 8\|u\|_{W^{1,p}(B_r^+(0))}.\end{aligned}$$

第二步. 设$u\in C^1(\bar{\Omega})$, $x_0\in\partial\Omega$, 由$\partial\Omega\in C^1$, 存在x_0的邻域U和U上C^1的一一映射Φ, 使得$\Phi(\Omega\cap U)=B_r^+(0)$, $r>0$. 记$y=\Phi(x)$, $v(y)=u(\Phi^{-1}(y))$, 则$v\in C^1((B_r^+(0))\cup B_r^0(0))$. 再由(1), v在$B_r(0)$上的延拓$\tilde{v}\in C^1(B_r(0))$, 且

$$\|\tilde{v}\|_{W^{1,p}(B_r(0))}\le 8\|v\|_{W^{1,p}(B_r^+(0))}\le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega\cap U)},$$

其中用到了

$$\frac{\partial v}{\partial y_i}=\sum_{j=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_i},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

设$u(x)=\tilde{v}(\Phi(x))$, $x\in V_0=\Phi^{-1}(B_r(0))$, 则$\Omega\cap V_0=\Omega\cap U$, 且有

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{1,p}(V_0)}&\le C\|\tilde{v}\|_{W^{1,p}(B_r(0))}\\&\le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega\bigcap V_0)}.\end{aligned}$$

第三步. 由于$\partial\Omega$是紧的, 存在有限个$x_i^0\in\partial\Omega$和x_i^0的邻域V_i, 以及V_i上的C^1一一映射Φ_i, 使得$\partial\Omega\subset\bigcup_{i=1}^N V_i\subset V$, $\Phi_i(V_i)=B_{r_i}(0)$, $r_i>0$, 且

$$\|u_i\|_{W^{1,p}(V_i)}\le C\|u_i\|_{W^{1,p}(\Omega\cap V_i)}.$$

$i=1,2,\cdots,N$. 取$V_0\subset\subset\Omega$, $u_0=u$, 使$\bar{\Omega}\subset\bigcup\limits_{i=0}^N V_i$. 令$\{\zeta_i\}_{i=0}^N$是从属于$\{V_i\}_{i=0}^N$的单位分解,

$$Eu=\sum_{i=0}^N\zeta_i u_i,$$

$$
\begin{aligned}
\|Eu\|_{W^{1,p}(V)} &\le \sum_{i=0}^{N} \|\zeta_i u_i\|_{W^{1,p}(V_i)} \\
&\le C \sum_{i=0}^{N} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega\cap V_i)} \\
&\le C\|u_i\|_{W^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

第四步. 当$u \in W^{1,p}(\Omega)$时, 取$\{u_m\} \subset C^1(\bar{\Omega})$, 使得在$W^{1,p}(\Omega)$中$u_m \to u$, 从而

$$
\|Eu_m - Eu_k\|_{W^{1,p}(V)} \le C\|u_m - u_k\|_{W^{1,p}(V)} \to 0, \quad m, k \to \infty,
$$

即$\{Eu_m\}$是$W^{1,p}(\Omega)$中的Cauchy列, 从而在$W^{1,p}(\Omega)$中收敛至$\bar{u} \triangleq Eu \in W^{1,p}(V)$, 并且

$$
\|Eu\|_{W^{1,p}(V)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(V)},
$$

其中C仅与n, p和Ω有关. □

最后, 我们不证明地给出高阶Sobolev不等式和高阶(紧)嵌入定理. 它们是定理1.5.10的推广.

定理1.6.6. *(高阶Sobolev不等式) 设Ω是有界的C^k区域, $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}, 1 \le p < \infty$,*

(1) 若$k < \frac{n}{p}$, 则$u \in L^q(\Omega)$, 其中$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$, 且存在仅与$n, k, p$和$\Omega$有关的常数$C$, 使得

$$
\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.
$$

(2) 若$k > \frac{n}{p}$, 则$u \in C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}(\bar{\Omega})$, 其中

$$
\gamma = \begin{cases} \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}, & \text{当} \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}\text{时}, \\ \text{任意小于1的正数}, & \text{当} \frac{n}{p} \in \mathbb{N}\text{时}, \end{cases}
$$

且存在仅与n, k, p, γ和Ω有关的常数C, 使得

$$
\|u\|_{C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}(\bar{\Omega})} \le C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.
$$

当$k = 1$时, 上面的结果成为: 设Ω是有界的C^1区域, $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$,
(1) 若$p < n$, 则$u \in L^q(\Omega)$, 其中$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$,且

$$
\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.
$$

(2) 若$p > n$, 则$u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$, 其中$\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, 且

$$
\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.
$$

这与$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$的结果完全类似, 但在那种情形中, C不依赖于Ω.

定理1.6.7. *(高阶嵌入定理) 设Ω是有界的C^k区域, $k \in \mathbb{N}, 1 \le p < \infty$, 则*

$$W^{k,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^q(\Omega), & 1 \le q \le \frac{np}{n-kp}, \quad kp < n, \\ L^q(\Omega), & 1 \le q < \infty, \quad kp = n, \\ C^{0,\gamma}(\bar{\Omega}), & 0 < \gamma \le 1 - \frac{n}{kp}, \quad kp > n. \end{cases}$$

定理1.6.8. *(高阶紧嵌入定理) 设Ω是有界的C^k区域, $k \in \mathbb{N}, 1 \le p < \infty$, 则*

$$W^{k,p}(\Omega) \subset\subset \begin{cases} L^q(\Omega), & 1 \le q < \frac{np}{n-kp}, \quad kp < n, \\ L^q(\Omega), & 1 \le q < \infty, \quad kp = n, \\ C^{0,\gamma}(\bar{\Omega}), & 0 < \gamma < 1 - \frac{n}{kp}, \quad kp > n. \end{cases}$$

当$k = 1$时,

$$W^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^q(\Omega), & 1 \le q \le \frac{np}{n-p}, \quad p < n, \\ L^q(\Omega), & 1 \le q < \infty, \quad p = n, \\ C^{0,\gamma}(\bar{\Omega}), & 0 \le \gamma \le 1 - \frac{n}{p}, \quad p > n. \end{cases}$$

$$W^{k,p}(\Omega) \subset\subset \begin{cases} L^q(\Omega), & 1 \le q < \frac{np}{n-kp}, \quad p < n, \\ L^q(\Omega), & 1 \le q < \infty, \quad p = n, \\ C^{0,\gamma}(\bar{\Omega}), & 0 < \gamma < 1 - \frac{n}{kp}, \quad p > n. \end{cases}$$

对$W_0^{k,p}(\Omega)$有类似的结果, 但这时不要求Ω是C^k的.

§1.7 迹定理

一般来说, $W^{1,p}(\Omega)$中的函数u在$\bar{\Omega}$上不连续, 仅是几乎处处有定义, 从而u在$\partial\Omega$上没有确定的意义. 那么, 它在$\partial\Omega$上的值如何确定呢?

定理1.7.1. *(迹定理) 设Ω是有界的C^1区域, $1 \le p < \infty$, 则存在有界线性算子*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega),$$

使得

(1) 当$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$时, $Tu = u, x \in \partial\Omega$.

(2) 存在仅与n, p, Ω有关的常数, 使得

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

证明. 像定理1.6.5的证明一样, 我们只需对$\Omega = B_r^+(0)$, $\partial\Omega = B_r^0(0)$证明即可.

先设$u\in C^1(B_r^+(0)\cup B_r^0(0))$. 取$\zeta\in C_0^\infty(B_r(0))$, $0\le\zeta\le 1$, 且在$B_{\frac{r}{2}}(0)$上$\zeta\equiv 1$,

$$\begin{aligned}\int_{B^0_{\frac{r}{2}}(0)}|u|^p dx' &\le \int_{B_r^0(0)}\zeta|u|^p dx'\\ &= -\int_{B_r^+(0)} D_n(\zeta|u|^p)dx\\ &= -\int_{B_r^+(0)}\left(|u|^pD_n\zeta + p|u|^{p-2}(\mathrm{sgn} u)\cdot uD_nu\cdot\zeta\right)dx\\ &\le C\int_{B_r^+(0)}(|u|^p+|Du|^p)dx,\end{aligned}$$

其中最后一步运用了$H\ddot{o}lder$不等式.

现设$u\in W^{1,p}(B_r^+(0))$, 取$\{u_m\}\subset C^\infty(B_r^+(0)\cup B_r^0(0))$, 使得在$W^{1,p}(B_r^+(0))$中有$u_m\to u$, 从而

$$\|u_m-u_l\|_{L^p(B^0_{r/2}(0))}\le C\|u_m-u_l\|_{W^{1,p}(B_r^+(0))}.$$

由此可知$\{u_m\}$是$L^p(B^0_{r/2}(0))$中的Cauchy列, 从而在$L^p(B^0_{r/2}(0))$中收敛. 定义$Tu=\lim\limits_{m\to\infty}u_m$, 则

$$\|Tu\|_{L^p(B^0_{r/2}(0))}\le C\|u\|_{W^{1,p}(B_r^+(0))}.$$

当$u\in W^{1,p}(B_r^+(0))\cap C^0(B_r^+(0)\cup B_r^0(0))$时, 上述$\{u_m\}$可以在$\overline{B^+_{\frac{r}{2}}(0)}$中一致收敛, 当然在$B^0_{\frac{r}{2}}(0)$上也一致收敛,故

$$Tu=u,\quad x\in B^0_{\frac{r}{2}}(0).$$

迹定理得证. □

我们称Tu为u在$\partial\Omega$上的迹. 例如当$u\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega})$时, $u=0$, $x\in\partial\Omega$.

§1.8 差商

设$u\in L^1_{loc}(\Omega)$, $V\subset\subset\Omega$. 对$x\in V$, $h\in\mathbb{R}$, $0<|h|<\mathrm{dist}(V,\partial\Omega)$, 定义步长为$h$的第$i$个差商为

$$D_i^hu(x)=\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

差商与弱导数有如下关系.

定理1.8.1. *设$u\in W^{1,p}(\Omega)$, $1\le p<\infty$, $V\subset\subset\Omega$, 则对任意的h, $0<|h|<dist(V,\partial\Omega)$, 有*

$$\|D_i^hu\|_{L^p(V)}\le\|D_iu\|_{L^p(\Omega)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

证明. 对$u\in C^\infty(\Omega)$, $x\in V$, $i=1,2,\cdots,n$,

$$\begin{aligned}|u(x+he_i)-u(x)| &\le \int_0^1|D_iu(x+the_i)\cdot he_i|dt\\ &\le |h|\int_0^1|D_iu(x+the_i)|dt.\end{aligned}$$

运用$H\ddot{o}lder$不等式, 并交换积分次序, 有

$$
\begin{aligned}
\|D_i^h u\|_{L^p(V)} &\leq \left(\int_V \left(\int_0^1 |D_i u(x+the_i)|dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\int_V \int_0^1 |D_i u(x+the_i)|^p dtdx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\int_0^1 \int_V |D_i u(x+the_i)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\int_0^1 \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

定理得证. □

定理1.8.2. 设$u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $1 \leq i \leq n$. 若存在常数C_0, 使得对任意的$0 < |h| < dist(V, \partial\Omega)$和$V \subset\subset \Omega$, 都有

$$\|D_i^h u\|_{L^p(V)} \leq C_0,$$

则弱导数$D_i u$存在, 且$\|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_0$.

证明. 对任意的$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 当$0 < |h| < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}\varphi, \partial\Omega)$时,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u D_i^h \varphi dx &= \int_\Omega u(x) \cdot \frac{\varphi(x+he_i) - \varphi(x)}{-h} dx\\
&= -\int_\Omega \frac{-u(x) + u(x-he_i)}{h} \varphi(x) dx\\
&= -\int_\Omega D_i^{-h} u \cdot \varphi dx.
\end{aligned}
$$

由$L^p(\Omega)$的弱紧性, 存在$\{h_k\}$, $v_i \in L^p(\Omega)$, 当$h_k \to 0$时, $D_i^{-h_k} u$在$L^p(\Omega)$中弱收敛于v_i, 所以

$$\int_\Omega u D_i \varphi dx = -\int_\Omega v_i \varphi dx,$$

即$v_i = D_i u$存在, 且

$$\|v_i\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{k\to 0} \|D_i^{-h_k} u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_0.$$

□

当$p = 1$时, 结论不成立, 因为$L^1(\Omega)$不弱紧.