也谈函数的单调性

胡凤娟[1] 保继光[2]

（1. 首都师范大学教师教育学院 100048；2. 北京师范大学数学科学学院 100875）

函数是数学中的核心内容，而单调性是函数的基本性质，也是高中数学教学的重点. 但是，在教学实践中存在着许多模糊认识和错误理解. 准确把握好函数单调性的概念教学，是切实关注通性通法的重要方面，更是落实数学学科核心素养的需要.

本文首先讨论了函数单调性的定义，然后给出在指数函数单调性、极值和最值教学中的相关建议.

1 函数单调性的定义

在现行的高中数学教材 6 个版本（人教 A 版、人教 B 版、北师大版、苏教版、湘教版和鄂教版）中，函数单调性的定义大同小异，没有本质区别. 追溯高中数学教材各时期的版本，函数单调性的叙述也是如此. 据了解根据《普通高中数学课程标准（2017 年版）》正在修订的教材中，函数单调性的定义也大同小异. 下面是人教 A 版必修一中单调性的定义[1]：

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D：

如果对于定义域 D 内某个区间 I 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是增函数（increasing function）；

如果对于定义域 D 内某个区间 I 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是减函数（decreasing function）.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是增函数或减函数，那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有（严格的）单调性，区间 I 叫做 $y=f(x)$ 的单调区间.

1.1 关于区分单调与严格单调的建议

查阅了诸多数学相关书籍，发现《中国大百科全书・数学》《数学辞海》以及《数学分析》的教科书基本上都明确区分了单调与严格单调的定义. 下面给出《中国大百科全书・数学》中关于单调函数的描述[2]：

如果对 D 中任意两数 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（$f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称函数 f 为 D 上的增函数（减函数）；如果对上面所说的 x_1，x_2，严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$）总成立，则称函数 f 为 D 上的严格增函数（严格减函数）；增函数与减函数统称为单调函数；严格增函数与严格减函数统称为严格单调函数（这里并没有清楚地说明 D 是否为区间）.

有一些文献将严格单调增函数（严格单调减函数）称为增函数（减函数）、将增函数（减函数）等同于非减函数（非增函数）[3][4]，这里不再展开叙述.

数学百科全书（Encyclopedia of Mathematics）[5]上的相关表述是：A real-valued function f is said to be increasing over an interval if, over that interval, greater input values produce greater (or possibly equal) output values, that is, if a and b are two values in the interval with $a<b$, then $f(a)\leqslant f(b)$. If it is always the case that $f(a)<f(b)$, then the function is said to be strictly increasing on the interval.

综上所述，我们建议函数单调性的定义如下：

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subseteq D$，

（1）如果对于任意的 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，那么就称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是增函数（increasing function）；若总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是严格增函数（strictly increasing function）；

（2）如果对于任意的 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，那么就称函数 $y=f(x)$ 在区

间 I 上是减函数(decreasing function)；若总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是严格减函数(strictly decreasing function).

由于定义域的英文是 domain，区间的英文是 interval，所以将定义域和区间应该分别简记为 D 和 I.

在这个定义下，可以借助导数给出函数的单调性的充要条件.

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上可导，则

(1) $y=f(x)$ 是 I 上增函数的充要条件是 $f'(x)\geqslant 0, x\in I$；

(2) $y=f(x)$ 是 I 上减函数的充要条件是 $f'(x)\leqslant 0, x\in I$.

判断函数 $f(x)=x^5$ 在实数集 R 上是增函数.

当然，如果想进一步判断严格单调性，还需要更细致的讨论. 事实上，不难证明：设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上可导.(1)若在区间 I 上 $f'(x)\geqslant 0$，且仅在有限个点为 0，则 $y=f(x)$ 是区间 I 上的严格增函数；(2)若在区间 I 上 $f'(x)\leqslant 0$，且仅在有限个点为 0，则 $y=f(x)$ 是区间 I 上的严格减函数.

这样一来，不仅把单调性问题陈述的更加简明，同时也与大学阶段的函数单调性的定义，以及它的英文表述一致，充分体现数学的整体性.

1.2　关于淡化单调区间概念的建议

根据中学教材中现行单调区间的定义，若区间 I 是函数 $y=f(x)$ 的单调区间，则区间 I 的任意一个子区间也是 $y=f(x)$ 的单调区间，也就是说对于给定的函数单调区间不是唯一确定的！这是定义中的大忌.

在教学和评价中，单调区间常常被默认为是使得函数单调的最大区间. 但是，在实践中对区间端点的认识还是不到位. 另外，需要注意的是，函数的单调性是整体性质，只能在给定的区间上讨论，不能在某一点讨论. 比如，问题"$f(x)=x^2$ 在 $x=0$ 是单调上升还是单调下降？"本身就是不科学的！

例如在人教 A 版教材中有考查函数单调区间的例题，在习题中也有类似的题目，如下[6]：

例 1　图 1.3－4 是定义在区间[－5，5]上的函数 $y=f(x)$，根据图像说出函数的单调区间，以及在每一单调区间上，它是增函数还是减函数？

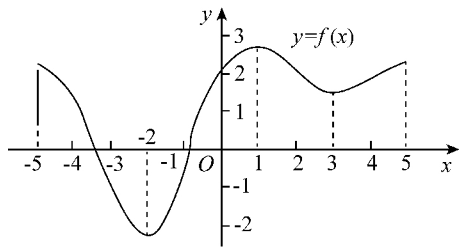


图 1.3－4

解　函数 $y=f(x)$ 的单调区间有[－5，－2)，[－2，1)，[1，3)，[3，5]. 其中 $y=f(x)$ 在区间[－5，－2)，[1，3)上是减函数，在[－2，1)，[3，5]上是增函数.

实际上，根据现行单调区间的定义，函数 $y=f(x)$ 的单调区间可以是[－5，－2)，[－2，1)，[1，3)，[3，5]，也可以是它们各自的任意子区间；按照默认的最大单调区间的理解，函数 $y=f(x)$ 的单调区间应该是[－5，－2]，[－2，1]，[1，3]，[3，5]. 原因是闭区间比相应的半开半闭区间更大.

高考中也经常会考查函数的单调区间. 例如 2018 年天津理科卷第 20 题：已知函数 $f(x)=a^x$，$g(x)=\log_a x$，其中 $a>1$. 第 1 问是：求函数 $h(x)=f(x)-x\ln a$ 的单调区间. 该题的答案是：函数 $h(x)$ 的单调递减区间$(-\infty,0)$，单调递增区间为$(0,+\infty)$. 实际上，根据现行单调区间的定义，函数 $h(x)$ 的单调递减区间可以是$(-\infty,0)$，也可以是$(-1,0)$或$(-2,-1)$；按照默认的最大单调区间的理解，函数 $h(x)$ 的单调递减区间应该是$(-\infty,0]$，它比$(-\infty,0)$更大. 类似地，单调递增区间应该是$[0,+\infty)$.

基于上述原因，我们认为，教材中最好不出现单调区间这个概念. 如果出现，就应该理解为最大的单调区间. 只有这样概念才具有确定性和唯一性.

2　指数函数单调性的教学

在指数函数的教学中，一般是通过"看图说话"的方法获得它的单调性. 给出具体指数函数(如：$y=2^x$ 和 $y=3^x$)的图像，进而"粗暴地"抽象出指数函数的单调性. 一些教材还让学生通过计算机进一步验证指数函数的单调性. 这种从特殊到一般的处理方式，非常具体、直观，学生易于理解，但在凸显直观的同时，过多地丧失了数学的严谨性.

如何更好的得到指数函数 $y=a^x$ 在实数集 R 上的单调性呢？

不妨认为 $a>1$，要讨论指数函数 $y=a^x$ 在实数集 R 上的单调性，根据单调性的定义，就是要在 R 上任取两个数 x_1，x_2，且 $x_1>x_2$，进而判断 $a^{x_1}-a^{x_2}$ 的正负. 根据指数幂的运算性质，$a^{x_1}-a^{x_2}=a^{x_2}(a^{x_1-x_2}-1)$，且 $a^{x_2}>0$. 因此要判断 $a^{x_1}-a^{x_2}$ 的正负，只需判断 $a^{x_1-x_2}-1$ 的正负，即 $a^{x_1-x_2}$ 与 1 的大小关系. 这归结为当 $x>0$，a^x 与 1 的大小关系.

下面讨论当 $a>1$ 和 $x>0$ 时，a^x 与 1 的大小关系.

(1)若 x 是正整数，则 a^x 是 x 个 a 的乘积，因为 $a>1$，所以 $a^x>1$；

(2)若 x 是正分数，设 $x=\frac{m}{n}$(m，n 是正整数)，则 $a^x=a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m$. 若 $a^{\frac{1}{n}}>1$，由(1)得，$(a^{\frac{1}{n}})^m>1$，即 $a^x>1$. 下面证明 $a^{\frac{1}{n}}>1$，设 $a^{\frac{1}{n}}=b$，则 $a=b^n$. 若 $b\leqslant 1$，则 $a=b^n\leqslant 1$，这与 $a>1$ 矛盾. 所以，若 x 是正分数，则 $a^x>1$；

(3)若 x 是正无理数，设 $x=k.k_1k_2\cdots k_n\cdots$($k,n\in\mathbf{N}_+$，$k_n=0,1,2,\cdots,9$)，则 $a^x=a^{k.k_1k_2\cdots k_n\cdots}=a^{k+0.k_1+0.0k_2+\cdots+0.\underbrace{00\cdots0}_{n-1}k_n+\cdots}=a^k a^{0.k_1}a^{0.0k_2}\cdots a^{0.\underbrace{00\cdots0}_{n-1}k_n}\cdots$，此时，$k$，$0.k_1$，$0.0k_2$，$\cdots$，$0.\underbrace{00\cdots0}_{n-1}k_n$，$\cdots$ 均为有理数，由(2)可得，a^k，$a^{0.k_1}$，$a^{0.0k_2}$，$\cdots$，$a^{0.\underbrace{00\cdots0}_{n-1}k_n}$，$\cdots$ 均大于 1，所以 $a^x>1$.

至此，我们证明了当 $a>1$ 和 $x>0$ 时 $a^x>1$，从而指数函数 $y=a^x(a>1)$ 在实数集 R 上是(严格)增函数.

以上给出了证明指数函数单调性的一个方法. 除了(3)中“用有理数逼近无理数”以外均是严格的逻辑推理，而这种逼近的模糊处理方式与引入无理数指数幂的方式是一致的. 我们认为，在不额外增加难度和课时的前提下，还是应该尽可能避免“看图说话”，以体现数学的严谨性. 直观只能用来启发思维，不能代替证明！

3　函数单调性与极值、最值的关系

函数的极值和最值是两个既与单调性密切相关，又与单调性截然不同的概念. 讨论极值和最值不一定必须搞清楚函数的单调性，更不需要弄清函数在整个定义域上的单调情况.

3.1　极值不一定与单调性有关

在现行教学过程中，求函数的极值通常采取如下做法(选自北师大版选修 2－2)[2]：

例 3　求函数 $f(x)=3x^3-3x+1$ 的极值.

解　首先求导函数，由导数公式表和求导法则可得 $f'(x)=9x^2-3$. 解方程 $f'(x)=0$，得 $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，或 $x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

根据 x_1，x_2 列出表 3-4，分析 $f'(x)$ 的符号、$f(x)$ 的单调性和极值点.

表 3-4

x	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

根据表 3-4 可知 $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为函数 $f(x)=3x^3-3x+1$ 的极大值点，函数在该点的极大值为 $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$；$x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为函数 $f(x)=3x^3-3x+1$ 的极小值点，函数在该点的极小值为 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

在这个例题中，$f(x)$ 是一个比较简单的函数，可以完整地讨论函数在整个实轴上的单调性，进而求得极值. 实际上，极值是函数的局部性质，只需关心某点附近的函数值情况即可. 比如，$x=0$ 就显然是 $f(x)=x^4(x^8+1)$ 的极小值点，因为对所有不为零的 x，$f(x)>0$，且 $f(0)=0$. 又如 $x=0$ 也显然是 $f(x)=x^4(1-100x^2)$ 的极小值点，因为当 $0<|x|<\frac{1}{10}$ 时，$f(x)>0$，且 $f(0)=0$. 如果像例 3 那样完整地讨论函数的单调性，既很麻烦，也没必要！一个更极端的例子是：对于一个非常光滑的函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}\left(x^2+\sin^2\frac{1}{x}\right),x\neq 0,\\0,x=0.\end{cases}$$

来说，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，但是在包含 $x=0$ 的任何区间内均无单调性.

2018 年北京理科第 18 题就着重考察了极值的局部性：设函数 $f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+$

$3]e^x$. 若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，求 a 的取值范围.

解：因为 $f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]\cdot e^x$，所以 $f(2)=e^2$.

$$\begin{aligned} f'(x)&=[2ax-(4a+1)]e^x+[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x \\ &=[ax^2-(2a+1)x+2]e^x \\ &=(ax-1)(x-2)e^x. \end{aligned}$$

若 $a>\frac{1}{2}$，则当 $x\in(\frac{1}{a},2)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值.

若 $a\leqslant\frac{1}{2}$，则当 $x\in(0,2)$ 时，$x-2<0$，$ax-1\leqslant\frac{1}{2}x-1<0$，$f'(x)>0$. 所以 2 不是 $f(x)$ 的极小值点.

综上可知，a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

特别强调的是，该题在 $a>\frac{1}{2}$ 情形证明 $x=2$ 是极小值点时，并没有研究 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)$ 上的单调性.

3.2 最值不一定与单调性有关

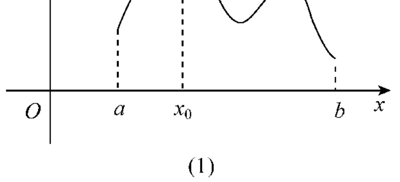
在中学阶段求函数的最值，一般(如人教 A 版、北师大版、苏教版)使用如下的方法[8][9]：

一般地，求函数 $y=f(x)$ 的在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值的步骤如下：

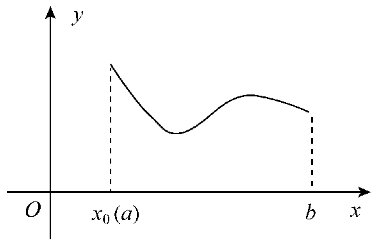
(1)求函数 $y=f(x)$ 的在 (a,b) 内的极值；

(2)将函数 $y=f(x)$ 的各极值点与端点处的函数值 $f(a)$，$f(b)$ 比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

实际上，函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内的最大值 $f(x_0)$ 指的是：函数 $f(x)$ 在这个区间内所有点处的函数值都不超过 $f(x_0)$(如下图).



(1)



(2)

由上图可以看出，极大值点也是导数的零点. 因此，要想求出函数 $f(x)$ 的最大值，可以首先求出 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的零点，然后将所有导数零点与区间端点的函数值进行比较，其中最大的值为函数的最大值. 函数的最小值的求法类似[10].

这样做的好处是，减少了对导数零点是否是极值点的讨论，而是不管导数零点是否是极值点，直接将所有导数零点与区间端点的函数值进行比较.

例如：人教 A 版选修 2－2 中[11]，

例 5 求函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 在 $[0,3]$ 上的最大值与最小值.

解 由例 4(求函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 的极值)可知，在 $[0,3]$ 上，当 $x=2$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 有极小值，并且极小值为 $f(-2)=-\frac{4}{3}$. 又由于 $f(0)=4$，$f(3)=1$，因此，函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 在 $[0,3]$ 上的最大值是 4，最小值是 $-\frac{4}{3}$.

这个解决问题的思路还需要借助教材中的例 4，实际篇幅比现在的两倍还多. 如果直接将所有导数零点与区间端点的函数值进行比较，解答过程可以如下：

解：因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$，所以 $f'(x)=x^2-4=(x-2)(x+2)$. 令 $f'(x)=0$，解得，$x_1=2$，$x_2=-2$(舍掉).

计算函数 $f(x)$ 在导数零点 $x_1=2$、区间端点 $x_3=0$ 和 $x_4=3$ 处的函数值：$f(2)=-\frac{4}{3}$，$f(0)=4$，$f(3)=1$.

比较这 3 个函数值的大小，可知：$f(x)$ 在区间 $[0,3]$ 上的最大值是 4，最小值是 $-\frac{4}{3}$.

(下转第 21 页)

而是一种评价理念或是一种评价观念."基于证据"的学业评价的核心思想在于强调对学生学习活动状况及质量水平进行评价时必须讲究证据、重视证据,必须在充分占有、分析与学生学业表现密切相关的证据信息资料的基础上得出评价结论.学业质量评价中搜集有关学生知识掌握的证据信息时,不应仅关注表层的知识符号的获得,不能仅仅停留于学生对相关定义、概念、定理、原理、命题等的记忆和背诵,而应特别关注其对知识的深层理解、结构化组织、灵活转换与应用,重视数学地实践.如在《课标(2017)》的"数学抽象"中"在交流过程中,水平一是能够结合实际情境解释相关的抽象概念;水平二是能够用一般的概念解释具体现象;水平三是能够用数学原理解释自然现象和社会现象".搜集的证据范围不仅包括学生完成的作业、作品、表现性任务,还包括其在学习过程中使用的学习方式方法、思维方式等.

基于证据的学业质量评价肯定了"核心素养实现的证据"在学业评价中的重要作用,强调评价结论与学生真实的"素养现实"的高度相关性.诚然,如何收集证据、分析证据、反馈证据等成为新的研究课题.

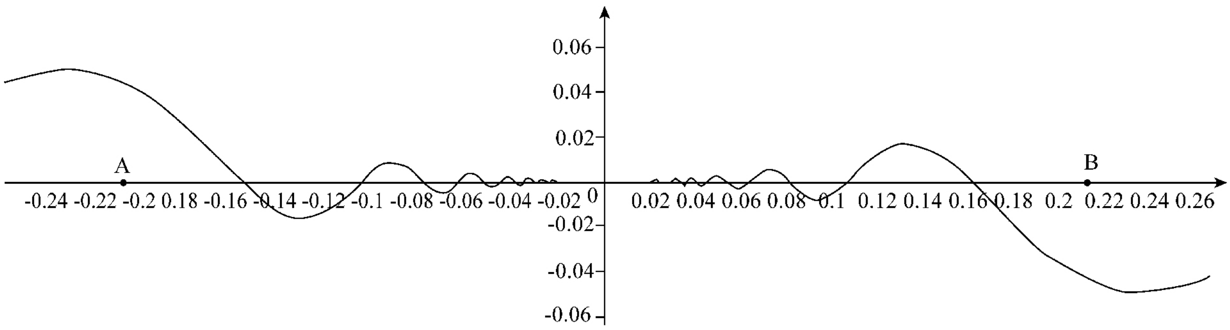
参考文献

[1]中华人民共和国教育部制定.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018

(上接第 17 页)

这与原解答得到的结论一样,但是解决问题的过程不仅变得更加简洁,重要的是解决问题的思路更接近数学的本质.

还有一些函数,我们无法判断它在某个区间的单调性,但是可以直观地看出它在该区间上的最值.例如,函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$,它的图像如下图所示,在区间 $\left[-\dfrac{2}{3\pi},\dfrac{2}{3\pi}\right]$ 上的最大值和最小值分别为 $\dfrac{4}{9\pi^2}$ 和 $-\dfrac{4}{9\pi^2}$,可以看出当 $x\to 0$ 时,函数值的符号变化越来越快,$f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{2}{3\pi},\dfrac{2}{3\pi}\right]$ 的任何包含 0 的子区间上都无单调性.



参考文献

[1]人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.普通高中课程标准实验教科书·数学·必修一(A版)[M].北京:人民教育出版社,2004,7:33－34

[2]吴厚心编著.中国大百科全书·数学[M].北京,上海:中国大百科全书出版社,1988,11:290

[3]菲赫金哥尔茨.微积分学教程[M].杨弢亮,叶彦谦,译.北京:高等教育出版社,2017,7:107

[4]王元总主编.数学大辞典[M].北京:科学出版社,2013,2:288

[5]James Tanton, Encyclopedia of Mathematics, Facts On File, New York, 2005:262

[6]人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.普通高中课程标准实验教科书·数学·必修一(A版)[M].北京:人民教育出版社,2004,7:34

[7]严士健,王尚志主编.普通高中课程标准实验教科书·数学·选修 2－2[M].北京:北京师范大学出版社,2006,12:64

[8]人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.普通高中课程标准实验教科书·数学·选修 2－2(A版)[M].北京:人民教育出版社,2004,7:31

[9]苏教版高中数学教材编写组.普通高中课程标准实验教科书·数学·选修 2－2[M].南京:江苏教育出版社,2014,6:32

[10]北京师范大学出版社编.普通高中教科书·数学·选择性必修下册(送审版)[M].北京:北京师范大学出版,2018,9:78

[11]人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.普通高中课程标准实验教科书·数学·选修 2－2(A版)[M].北京:人民教育出版社,2004,7:30