2017年第11期
（总第307期）
中国考试
CHINA EXAMINATIONS
November 2017
No. 307

高中数学核心素养测评案例研究

胡凤娟[1]　保继光[2]　任子朝[3]　陈 昂[3]
（1. 首都师范大学，北京 100048；2. 北京师范大学，北京 100875；3. 教育部考试中心，北京 100084）

摘要： 数学核心素养的科学评价是落实“把立德树人作为教育的根本任务”的重要举措。数学课程标准提出了6个数学核心素养，本文通过案例对核心素养的测评从情境与问题、知识与技能、思维与表达、交流与反思4个方面和必修课程结束、选修Ⅰ课程结束、选修Ⅱ课程结束3个水平进行分析讨论，以期为数学核心素养的测评提供思路。

关键词： 考试招生制度改革；高考改革；高考评价体系；核心素养；核心素养测评

【中图分类号】G405　　【文献标识码】A　　【文章编号】 1005-8427(2017)11-0010-7

DOI: 10.19360/j.cnki.11-3303/g4.2017.11.003

2012年，党的十八大报告指出：“把立德树人作为教育的根本任务，培养德智体美全面发展的社会主义建设者和接班人。”[1]2014年，《教育部关于全面深化课程改革 落实立德树人根本任务的意见》提出：“研究制订学生发展核心素养体系和学业质量标准。”[2]2016年，“中国学生发展核心素养”研究成果正式发布，核心素养被定义为“能够适应终身发展和社会发展需要的必备品格和关键能力”[3]。因此，核心素养已成为基础教育领域的热点研究课题。

《普通高中数学课程标准》(征求意见稿)（以下简称《标准》）不仅在高中数学课程的性质、目标、结构等方面给出了顶层设计，而且对具体的课程内容、学业质量标准作出了规定，对教学与评价提出建议[4]。《标准》已经构建了落实核心素养3个途径——课程改革、教学实践、教育评价的理论框架。因此，数学核心素养在教学和评价中的实施就显得尤为重要与迫切。另外，从高中数学教学的实践来看，评价尤其是高考对中学教学有着重要的影响，因此，学业水平考试与高考的命题关系到数学核心素养的落地与实施。

2014年，《国务院关于深化考试招生制度改革的实施意见》（以下简称《实施意见》）颁布，启动了新一轮的招生、考试、评价改革。《实施意见》明确提出：“依据高校人才选拔要求和国家课程标准，科学设计命题内容，增强基础性、综合性，着重考查学生独立思考和运用所学知识分析问题、解决问题的能力。”[5]2016年，教育部考试中心构建了高考评价体系框架，明确“必备知识、关键能力、学科素养、核心价值”的考查目标以及“基础性、综合性、应用性、创新性”的考查要求。在推动核心素养在基础教育中落地生根的关键阶段，高考毋庸置疑是最现实、最立竿见影的途径之一[6]。40年来的高考数学，根据国家对人才选拔的要求和基础教育课程改革的实践，坚持改革创新，彰显学科特点，发挥了数学培养理性思维的价值和解决实际问题的工具作用[7]。

［作者简介］ 胡凤娟(1983—)，女，首都师范大学，讲师；
保继光(1963—)，男，北京师范大学，教授；
任子朝(1961—)，男，教育部考试中心，研究员；
陈　昂(1983—)，男，教育部考试中心，助理研究员。

《标准》明确提出了6个数学核心素养:数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析,给出了每个素养的内涵、价值、表现和水平,设置了基于数学核心素养的“学业质量标准”。

《标准》将每个数学核心素养都分为3个水平,分别对应必修课程结束、选修Ⅰ课程结束、选修Ⅱ课程结束时,学生数学核心素养应达到的要求,是学业质量标准的主要内容。每一个数学核心素养水平都通过以下4个方面进行描述:情境与问题,主要是指现实情境、数学情境、科学情境以及在情境中提出的数学问题;知识与技能,主要是指能够体现相应数学核心素养的知识与技能;思维与表达,主要是指数学的思维品质与表述的严谨性和准确性;交流与反思,主要是指交流过程中的思维表现以及交流后的思考结果。

基于数学核心素养的评价要关注思维品质、考查思维过程[8]。数学核心素养的评价形式可以是多样化的,除了传统的纸笔测验之外,还可以采用课堂观察、口头测验、开放式活动中的表现、课内外作业等评价的形式。本文仅讨论纸笔测验的评价形式,分别通过案例对每个数学核心素养进行分析。6个数学核心素养既相对独立,又相互交融,是一个有机的整体,因此,一个案例往往同时考查多个数学核心素养。为了便于理解,本文在对案例进行分析时重点考查一个数学核心素养。

1 数学抽象

“数学抽象”素养的考查重点是学生在各种情境中抽象出数学概念、命题、方法和体系的能力,在日常生活和实践中善于一般性思考问题,把握事物的本质、以简驭繁,运用数学思想方法解决问题的思维品质。数学抽象的具体表现包括:获得数学概念和规则、提出数学命题和模型、形成数学方法与思想、认识数学结构与体系。

案例1:速度与路程问题

学校宿舍与办公室相距a m. 某同学有重要材料要送交给老师,从宿舍出发,先匀速跑步3 min来到办公室,停留2 min,然后匀速步行10 min返回宿舍. 在这个过程中,这位同学行进的速度和行走的路程都是时间的函数,请画出速度函数和路程函数的示意图.

速度与路程是日常生活中的基本活动(问题与情境),我们通常可以把速度与时间、路程与时间的关系抽象为一种函数关系(知识与技能),表达函数关系的数学方法包括解析式、列表和图像(思维与表达)。本题中路程与时间的函数关系可用图1表示:

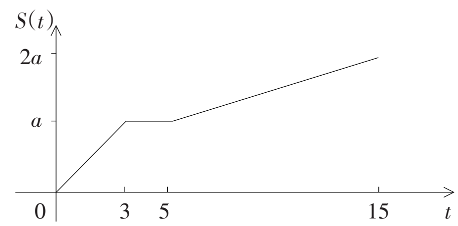

图1

解答此题时,能给出速度函数或路程函数的大部分示意图,即可以认为达到数学抽象素养水平一的要求;能够全部画出速度函数和路程函数示意图(二者自变量单位一致),即可以认为达到数学抽象素养水平二的要求。

本案例还考查了学生的直观想象素养。

2 逻辑推理

“逻辑推理”素养的考查重点是学生运用逻辑推理的基本形式,提出和论证命题、理解事物之间的关联、把握知识结构的能力;形成重论据、有条理、合乎逻辑的思维品质。逻辑推理素养涉及的行为表现包括:发现问题和提出命题、掌握推理基本形式和规则、探索和表述论证过程、理解命题体系、有逻辑地进行表达与交流。

案例2:街道距离问题

在一些城市中,街道大多是相互垂直或平行的,从城市的一点到达不在同一条街道上的另一点,常常不能仅仅沿直线方向行走,而只能沿街走

（转直角弯）．因此可以引入直角坐标系，对给定的两点 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，用以下方式定义距离：

$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$.

（注：该问题中提到的“距离”都是指上述距离）

（1）证明：对任意三点 A、B、C，满足 $d(A,B)\leqslant d(A,C)+d(B,C)$；

（2）画出到定点 $O(0,0)$ 距离等于1的点 $P(x,y)$ 构成的图形，并描述图形的特征；

（3）设 $A(-1,0)$、$B(1,0)$，画出到 A、B 两点距离之和为4的点 $P(x,y)$ 构成的图形，并描述图形的特征．

“街道距离”在日常生活和一些游戏规则中都可以看见（问题与情境），由此可以抽象出一种特殊的与欧式距离不一样的“距离”。解答此题要求学生首先能够理解新定义的“距离”规则，推出这种距离所满足的“距离公理”（即三角不等式），并利用这种距离来讨论欧式几何中的一些基本问题。当然，这里所需的数学知识并不复杂（知识与技能）。此题在一定程度上反映了数学推理的一个特点，即依据给定的规则进行逻辑推理，同时要求描述图形的特征（思维与表达）。

对于问题（1），如果学生能够对平面上固定的 A、B、C 点说明 $d(A,B)\leqslant d(A,C)+d(B,C)$，即可以认为达到逻辑推理素养水平一的要求；如果学生对任意的 A、B、C 点得到该结果，即可以认为达到逻辑推理素养水平二的要求。对于问题（2）和问题（3），只要学生画出基本符合要求的图形（如图2所示），即可以认为达到水平二的要求；进一步，如果学生还能给出清晰的证明，即可以认为达到逻辑推理素养水平三的要求。

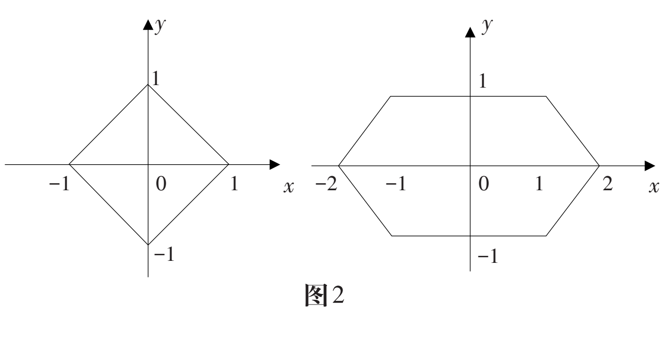

图2

本案例还考查了学生的数学运算素养。

3 数学建模

“数学建模”的考查重点是学生用数学模型解决实际问题，其中涉及数学建模的完整过程，即在实际情境中，从数学的视角发现问题、提出问题，分析问题、建立模型，确定参数、计算求解，验证结果、改进模型，最终解决实际问题。由于在常规的纸笔测试中较难反映数学建模的完整过程，因此，在编制考查数学建模的测试题时，通常依据数学建模的各个环节来命题。如设置一个实际情境，重点考查学生发现和提出合适的数学问题的能力，或者给定一个初步的数学模型，要求学生依据实际情况对模型进行修正等。

案例3：节约用料问题

阅读下列材料：

二元均值不等式：设 a,b 为正数，则 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时等式成立．

证明：因为 $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2\geqslant 0$，所以 $(a+b)^2\geqslant 4ab$，从而得 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时等式成立．

三元均值不等式：设 a,b,c 为正数，则 $\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$，当且仅当 $a=b=c$ 时等式成立．

证明：设 a, b, c, d 为正数．由二元均值不等式，有

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)\geqslant\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2})\geqslant\sqrt[4]{abcd}$$

并且当且仅当 $a=b=c=d$ 时，等式成立．

令 $d=\dfrac{a+b+c}{3}$，$a+b+c=3d$，代入上述不等式，得 $d\geqslant\sqrt[4]{abcd}$．由此推出 $d^3\geqslant abc$，因此 $\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$，其中，当且仅当 $a=b=c$ 时等式成立．

（1）在什么条件下，可以利用三元均值不等式

求 $\frac{a+b+c}{3}$ 的最小值?

(2)利用三元均值不等式,解决以下问题:要用不锈钢材料制造一个密闭的、储水量一定的圆柱形桶,假定上下底圆面厚度均为侧面厚度的1.5倍,如何设计使得用料最省?

圆柱形储物罐在日常生活中随处可见,什么时候用料最省自然是一个值得研究的问题(问题与情境)。由于此问题的解决需要用到三元均值不等式,因此,本题首先提供了一段由二元均值不等式推广到四元均值不等式,再由四元均值不等式回推三元均值不等式的阅读材料(知识与技能),最后依据所获得的三元均值不等式及以往二元均值不等式的解题经验解决当前的问题(思维与表达)。此外,在解题过程中,不仅要运用到一些重要的数学思想(如化归),还涉及数学建模的一些典型方法(如讨论忽略材料的厚度是否会影响问题的解答等)(交流与反思)。

对于问题(2),只要学生知道根据实际情境,能够考虑到材料的厚度,给出表面积、体积的公式,然后将实际问题转化为数学问题,就可以认为达到数学建模素养水平二的要求。

本案例还考查了学生的逻辑推理和数学运算素养。

4 直观想象

"直观想象"素养的考查重点是学生运用图形和空间想象思考问题、运用数形结合解决问题的能力;通过几何直观洞察表面现象的数学结构与联系,抓住事物的本质的思维品质。直观想象素养的具体表现包括:建立形与数的联系、利用几何图形描述问题、借助几何直观理解问题、运用空间想象认识事物。

案例4:拼剪几何体问题(2002年全国卷数学(文科)第22题)

(1)给出两块相同的正三角形纸片(如图3和图4),要求用其中一块剪拼成一个正三棱锥模型,另一块剪拼成一个正三棱柱模型,使它们的全面积都与原三角形的面积相等,请设计一种剪拼方法,分别用虚线标示在图3、图4中,并作简要说明;

(2)试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积的大小;如果给出的是一块任意三角形的纸片(如图5),要求剪拼成一个直三棱柱模型,使它的全面积与给出的三角形的面积相等,请设计一种剪拼方法,用虚线标示在图5中,并作简要说明.

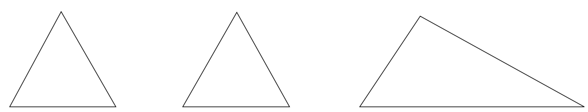

图3　　图4　　图5

本题是一种拼剪手工游戏(问题与情境),要求学生将三角形拼剪成正三棱锥与正三棱柱、并比较体积大小(知识与技能),在图中用虚线标出拼剪方法,并作简要说明(思维与表达)。

本题不提供剪刀、纸片,必须依靠学生的直观想象来解决问题。在问题(1)中,只要学生能够想到沿3条中位线折起即可拼成正三棱锥,就可以认为学生达到直观想象素养水平一。关于正三棱柱,需要学生思考各个面的特点:3个侧面是大小相同的长方形、2个底面是大小相同的三角形,三角形的边长和长方形的短边长度相同等。因此,从什么地方剪,怎样折,如何拼,对学生的空间想象能力有很高的要求,能够合理地给出拼剪方法可以认为学生达到了直观想象素养水平二。问题(2)重点考查了学生的创新意识和思维过程,评分遵循了满意原则和加分原则。

本案例还考查了学生的数学抽象和逻辑推理素养。

5 数学运算

"数学运算"虽然是传统的数学三大能力之一,但作为数学核心素养的数学运算不仅要考查学生

的运算基本功,更重要的是考查学生有效借助运算方法解决实际问题的能力。通过运算促进数学思维发展,形成程序化思考问题的数学思维品质。其具体表现包括:理解运算对象、掌握运算法则、探究运算思路、形成程序化思维。

案例5:函数的零点问题

给定函数 $f(x)=x^2+x-1$. 阅读下面用二分法求函数 $f(x)$ 在区间(0,1)内的零点近似值的材料.

由 $f(0)=-1<0$, $f(1)=1>0$, 函数 $f(x)$ 在区间(0,1)内至少有一个零点;取(0,1)的中点0.5,有 $f(0.5)=-0.25<0$, 函数 $f(x)$ 在区间(0.5,1)内至少有一个零点;

如此下去,得到函数的零点所在区间的表,如表1所示.

在使用二分法过程中,每经过1个步骤,零点所在区间长度缩小为上次的 $\frac{1}{2}$.

(1) 若以 10^{-n} ($n\in\mathbf{N}^*$)作为函数 $f(x)$ 的零点近似值的精确度,经过上述10个步骤,求 n 可以取到的最大值;

(2) 已知过抛物线 $f(x)=x^2+x-1$ 上的点 (x_0,y_0) 的切线的斜率为 $k(x_0)=2x_0+1$. 在(1,1)点作曲线的切线,交 x 轴于点 $(x_1,0)$;在 $(x_1,f(x_1))$ 点作曲线的切线,交 x 轴于点 $(x_2,0)$;在 $(x_2,f(x_2))$ 点作曲线的切线,交 x 轴于点 $(x_3,0)$;…;依次这样做下去,可得到一个数列 $\{x_n\}$,通常称之为迭代数列. 设 $x_{n+1}=g(x_n)$ ($n\in\mathbf{N}^*$),求 $g(x_n)$ 的解析式;

(3)用(2)的方法也可以求函数 $f(x)$ 的零点近似值,称为牛顿切线法. 请问:用牛顿切线法求函数 $f(x)$ 在区间(0,1)内的零点近似值时,经过多少次迭代使得 $x_n\in(0.6171875, 0.61816407)$;

(4)比较上述求函数 $f(x)$ 的零点近似值的两种方法,你能得到什么结论?

本题设置的情境是典型的数学情境(问题与情境),与常规数学运算题不同的是,此题不是考查学生准确而快速的计算技能,而是重点考查在理解运算背后的数学原理的基础上,发现合理的运算方法和程序(知识与技能),对运算结果进行有效的估计以及对运算方向的准确把握(思维与方法)。

问题(2)如果学生逐个求出 x_1、x_2、x_3,…,再找它们之间的规律,即可以认为学生达到了数学运算素养水平一;如果需要学生求一般的切线方程,进而求出切线方程与 x 轴交点的横坐标的一般形式,可以认为学生达到了数学运算素养水平二。

问题(3)在理解问题(2)的基础上,如果学生先找到 x_0,再通过简单计算得到,可以认为学生达到了数学运算素养水平二。

表1

次数	左端点	左端点函数值	右端点	右端点函数值	区间长度
第1次	0.5	−0.25	1	1	0.5
第2次	0.5	−0.25	0.75	0.3125	0.25
第3次	0.5	−0.25	0.625	0.015625	0.125
第4次	0.5625	−0.1210938	0.625	0.015625	0.0625
第5次	0.59735	−0.05371094	0.625	0.015625	0.03125
第6次	0.609375	−0.001928711	0.625	0.015625	0.015625
第7次	0.6171875	−0.00189209	0.625	0.015625	0.0078125
第8次	0.6171875	−0.00189209	0.62109375	0.0068512	0.00390625
第9次	0.6171875	−0.00189209	0.61914063	0.00247574	0.001853125
第10次	0.6171875	−0.00189209	0.61816407	0.00029088	0.0009265625

本案例还考查了学生的数学抽象和直观想象素养。

6　数据分析

“数据分析”核心素养的考查重点是学生基于数据表达现实问题、运用合适的统计方法进行推断和决策的能力,形成通过数据认识事物的思维品质。其具体表现包括:收集和整理数据、理解和处理数据、获得和解释结论、概括和形成知识。

案例6:上学的交通问题

李明上学有时坐公交车,有时骑自行车. 他各记录了50次坐公交车和骑自行车所用的时间(样本数据),经数据分析得到如下结果:

坐公交车:平均用时30分钟,方差为36;

骑自行车:平均用时34分钟,方差为4.

(1)根据以上数据,李明平时选择哪种交通方式更合理?说明理由.

(2)分别用X和Y表示坐公交车和骑自行车所用的时间,X和Y的分布密度曲线如图6所示,如果某天有38分钟可用,你选择哪种交通方式?如果只有34分钟可用,又应该选择哪种交通方式?请说明理由.

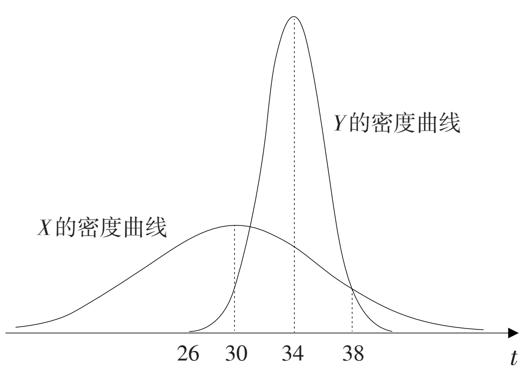

图6

说明:(2)中X和Y的分布密度曲线,分别反映X和Y的取值落在某个区间的随机事件的概率,例如,图7中的阴影的面积表示X取值不大于38分钟的概率.

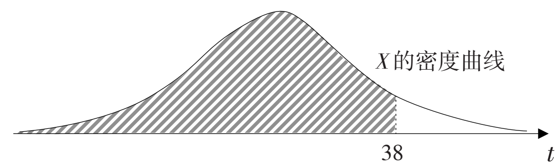

图7

此案例源自一个学生可能遇到的现实情境:骑自行车与坐公交车哪个更合理的问题(问题与情境),要求学生在理解相关统计量及分布的意义与作用(知识与技能)的基础上,依据实际问题和统计方法给出合理的解释与决策(思维与表达),并能为决策提供可靠的统计依据(交流与反思)。

在问题(1)中,如果学生能充分考虑到均值、方差综合回答,可以认为学生达到了数据分析素养水平一。

在问题(2)中,如果学生能够理解分布密度曲线下方的面积所表示的含义与概率大小的关系,如观察图7发现,在直线x=38右侧X的密度曲线下方的面积S_1大于Y的密度曲线下方的面积S_2,$P(X\leqslant 38)=1-S_1, P(Y\leqslant 38)=1-S_2$,并正确回答该问题,可以认为学生达到了数据分析素养水平二。

本案例还考查了学生的直观想象素养。

7　结语

数学核心素养的评价及其体系的建立是一项具有挑战性的工作,任重道远。在考查和评价学生数学核心素养时,我们建议要注意以下几个方面:

第一,题目的情境要合理,符合现实生活、数学、科学情境实际情况,不能生编硬造。

第二,考查内容应围绕数学内容主线,整体把握知识体系,聚焦学生对重要数学概念、定理、思想和方法的理解与应用;注重数学本质和通性通法,淡化解题技巧。

第三,对思维品质的考查要求学生会思考,因此,给学生思考的时间要比较充分,可以适当减少试题数量或者延长考试时间。特别是在新一轮的

高考改革后，高考只有语文、数学、外语3个统考科目，应该适当延长这3个科目的考试时间。

第四，研制开放性问题，考查学生的创新意识和思维过程，应允许使用计算器。一方面，要研究使用计算器对数学科考核目标和试题考查内容产生的影响；另一方面，要研究配备计算器的方式，严禁计算器具有通信功能，保证考试安全。

第五，对于开放试题，思维与结论一致是评价的重要原则。只要学生的思维和结论一致，作答的结果就应该判为正确，而不应拘泥于特定的解题方式和结论，这样可以鼓励考生从多角度思考问题、解决问题。如果考生分析得更加深刻，所得的结论更加精确，可以在试卷总分不变的限度内加分。

感谢“普通高中数学课程标准修订组”和“普通高中数学核心素养测试组”的老师在本文的写作过程中给予的帮助。

参考文献

[1] 胡锦涛. 坚定不移沿着中国特色社会主义道路前进 为全面建成小康社会而奋斗: 在中国共产党第十八次全国代表大会上的报告[M]. 北京: 人民出版社, 2012.

[2] 教育部关于全面深化课程改革 落实立德树人根本任务的意见[J]. 基础教育改革动态, 2014(11): 6-11.

[3] 林崇德. 中国学生发展核心素养: 深入回答“立什么德、树什么人”[J]. 人民教育, 2016(19): 14-16.

[4] 教育部基础教育课程教材专家工作委员会，普通高中课程标准修订组. 普通高中数学课程标准(征求意见稿)[R]. 北京, 2016.

[5] 国务院关于深化考试招生制度改革的实施意见[M]. 北京: 人民出版社, 2014.

[6] 于涵. 高考制度恢复40年考试内容改革述评[J]. 中国考试, 2017(3): 4-8.

[7] 任子朝，陈昂. 发挥学科特点 坚持改革创新: 恢复高考40年数学科命题评析[J]. 中国考试, 2017(2): 5-12.

[8] 史宁中. 推进基于学科核心素养的教学改革[J]. 中小学管理, 2016(2): 19-21.

Case Studies of Key Competences Assessment for High School Mathematics

HU Fengjuan[1], BAO Jiguang[2], REN Zizhao[3], CHEN Ang[3]

(1. Capital Normal University, Beijing 100048, China; 2. Beijing Normal University, Beijing 100875, China; 3. National Education Examinations Authority, Beijing 100084, China)

Abstract: Scientific assessment of the key competences of mathematics is aimed at students' moral development, which is the fundamental task of education. The high school curriculum has proposed six key competences for the subject. This article analyzes and discusses the methods to evaluate the key competences from four aspects (situation and problem, knowledge and skill, thinking and expressing, and communication and reflection) and on three levels (compulsive course, elective course Ⅰ and elective course Ⅱ), so as to provide new ideas for their assessment.

Keywords: Examination and Enrollment System Reform; College Entrance Examination Reform; Evaluation System of College Entrance Examination; Key Competences; Key Competences Evaluation

（责任编辑：周黎明）