从圆内接三角形面积想到的

李美生[1]，　保继光[2]

(1. 北京航空航天大学数学系，　北京　100083)
(2. 北京师范大学数学科学学院，　北京　100875)

摘要：　首先证明了正三角形的外接椭圆中面积最小的是一个圆. 进而用初等方法证明了二维情形的F. John 定理.

关键词：　圆内接三角形；最小面积；F. John 定理

1　引　　言

众所周知，给定一个圆，在它的内接三角形中，正三角形的面积为最大. 我们现在来问这样一个反问题：

问题　给定一个正三角形，在它的外接椭圆中，面积最小的那个是否是圆？

答案是肯定的. 实际上，在本文中我们不仅证明了这个问题，而且还将其推广到更一般的结论. 并在此基础上给出了著名的F. John 定理在二维情形的一个初等证明.

定理1　设 T 是一个等腰三角形，则 T 存在惟一的外接椭圆 E_0，使得在 T 的外接椭圆中，E_0 的面积最小.

证明　给定等腰三角形 T：ΔABC. 以底边 AB 的中点为原点建立平面直角坐标系，使得 AB 在 x 轴上，顶点 C 在正 y 轴上. 见图1.

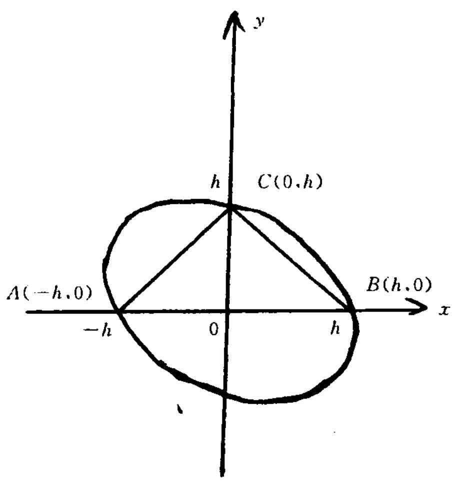

图1

不妨设 A, B, C 的坐标分别为 $(-l, 0)$，$(l, 0)$，$(0, h)$，T 的外接椭圆 E 的方程为

$$x^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{1}$$

其中 $l > 0$，$h > 0$，且 $b^2 < c$. 将 A，B，C 三点的坐标代入方程(1)，得到

$$d = 0,\quad f = -l^2,\quad e = \frac{l^2 - ch^2}{2h}$$

于是方程(1)成为

$$x^2 + 2bxy + cy^2 + \frac{l^2 - ch^2}{h}y - l^2 = 0 \tag{2}$$

收稿日期：2004-09-13
基金项目：国家自然科学基金(10371011)资助项目

下面我们根据 b 是否为零分两种情形讨论.

情形**1** 当 $b = 0$ 时, 方程(2)为

$$x^2 + cy^2 + \frac{l^2 - ch^2}{h} y - l^2 = 0$$

即

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{(y - y_0)^2}{q^2} = 1$$

其中

$$p = \sqrt{l^2 + \frac{(l^2 - ch^2)^2}{4ch^2}}, \quad q = \frac{p}{\sqrt{c}}, \quad y_0 = -\frac{l^2 - ch^2}{2ch}$$

所以椭圆 E 的面积

$$S(c) = \pi pq = \frac{\pi}{\sqrt{c}}\left(l^2 + \frac{(l^2 - ch^2)^2}{4ch^2}\right)$$

直接计算得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}c}(c) = \frac{\pi}{8c^{\frac{5}{2}}}\left(h^2c^2 - 2l^2c - \frac{3l^4}{h^2}\right) = \frac{\pi h^2}{8c^{\frac{5}{2}}}\left(c + \frac{l^2}{h^2}\right)\left(c - \frac{3l^2}{h^2}\right)$$

于是当 $c > \frac{3l^2}{h^2}$ 时, $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}c}(c) > 0$; 当 $0 < c < \frac{3l^2}{h^2}$ 时, $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}c}(c) < 0$. 故当 $c = \frac{3l^2}{h^2}$ 时, $S(c)$ 有惟一的最小值. 即仅当 E 的方程是

$$E_0:\quad \frac{x^2}{\frac{4l^2}{3}} + \frac{\left(y - \frac{h}{3}\right)^2}{\frac{4h^2}{9}} = 1 \tag{3}$$

时, E 的面积 S 最小. 由此我们可以看出, 当 T 为正三角形, 即 $h = \sqrt{3}\, l$ 时, 椭圆 E_0 的方程化为

$$x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}\, l}{3}\right)^2 = \frac{4l^2}{3}$$

它表示一个圆.

情形**2** 当 $b \neq 0$ 时, 做坐标轴的旋转变换

$$\begin{cases} x = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta \\ y = x_1\sin\theta + y_1\cos\theta \end{cases}$$

方程(2)化为

$$\alpha x_1^2 + ((c - 1)\sin 2\theta + 2b\cos 2\theta) x_1 y_1 + \beta y_1^2 + \frac{l^2 - ch^2}{h}(x_1\sin\theta + y_1\cos\theta) - l^2 = 0 \tag{4}$$

其中

$$\alpha = \cos^2\theta + b\sin 2\theta + c\sin^2\theta, \quad \beta = \sin^2\theta - b\sin 2\theta + c\cos^2\theta$$

令

$$(c - 1)\sin 2\theta + 2b\cos 2\theta = 0 \tag{5}$$

则方程(4)进一步化为

$$\frac{(x_1 - x_0)^2}{p^2} + \frac{(y_1 - y_0)^2}{q^2} = 1$$

其中

$$x_0 = -\frac{l^2 - ch^2}{2h\alpha}\sin\theta, \quad y_0 = -\frac{l^2 - ch^2}{2h\beta}\cos\theta, \quad p = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}, \quad q = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$$

而

$$\gamma = l^2 + \frac{(l^2 - ch^2)^2}{4h^2\alpha\beta}(\beta\sin^2\theta + \alpha\cos^2\theta)$$

所以椭圆 E 的面积

$$S(b,c) = \pi pq = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}}\left(l^2 + \frac{(l^2 - ch^2)^2}{4h^2\alpha\beta}(\beta\sin^2\theta + \alpha\cos^2\theta)\right)$$

一方面, 直接计算得到

$$\begin{aligned}\beta\sin^2\theta + \alpha\cos^2\theta &= \sin^2\theta(\sin^2\theta - b\sin2\theta + c\cos^2\theta) + \cos^2\theta(\cos^2\theta + b\sin2\theta + c\sin^2\theta)\\ &= \sin^4\theta + \cos^4\theta + b\cos2\theta\sin2\theta + 2c\sin^2\theta\cos^2\theta\\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta + b\cos2\theta\sin2\theta + \frac{c}{2}\sin^2 2\theta\\ &= 1 + \frac{1}{2}\sin2\theta((c-1)\sin2\theta + 2b\cos2\theta)\end{aligned}$$

由(5), 我们有

$$\beta\sin^2\theta + \alpha\cos^2\theta = 1 \tag{6}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \left(\frac{1+\cos2\theta}{2} + b\sin2\theta + c\,\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)\left(\frac{1-\cos2\theta}{2} - b\sin2\theta + c\,\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}((1+c) + (1-c)\cos2\theta + 2b\sin2\theta)((1+c) - (1-c)\cos2\theta - 2b\sin2\theta)\\ &= \frac{1}{4}((1+c)^2 - ((1-c)\cos2\theta + 2b\sin2\theta)^2)\end{aligned}$$

由(5), 我们知单位向量 $(\cos2\theta, \sin2\theta)$ 与 $(2b, c-1)$ 垂直, 所以

$$\begin{gathered}|(1-c)\cos2\theta + 2b\sin2\theta|^2 = (1-c)^2 + (2b)^2,\\ \alpha\beta = \frac{1}{4}((1+c)^2 - (1-c)^2 - 4b^2) = c - b^2\end{gathered} \tag{7}$$

借助(6)和(7), 我们得到

$$S(b,c) = \frac{\pi}{\sqrt{c-b^2}}\left(l^2 + \frac{(l^2-ch^2)^2}{4h^2}\,\frac{1}{c-b^2}\right)$$

对 b 求偏导数得

$$\frac{\partial S}{\partial b}(b,c) = \pi b\left(l^2(c-b^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3(l^2-ch^2)^2}{4h^2}(c-b^2)^{-\frac{5}{2}}\right)$$

于是当 $b > 0$ 时, $\frac{\partial S}{\partial b}(b,c) > 0$; 当 $b < 0$ 时, $\frac{\partial S}{\partial b}(b,c) < 0$. 故 $S(b,c)$ 的最小值应在 $b = 0$ 上达到. 这又归结为情形1. 这就是说, 外接椭圆中面积最小者由方程(3)给出.

综上所述, 我们完成了定理1的证明, 并给出了文章开始提出问题的肯定回答.

下面的定理给出了等腰三角形 T 外接椭圆 E 的进一步性质.

定理2 设 T 是一个等腰三角形, 如果 T 的高小于它的底长的 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 那么对于 T 的任

一外接圆 C, C 在底边上面的部分在 E_0 中.

证明 设等腰三角形 T 的高为 h, 底长为 $2l$. 如定理1建立坐标系. 见图2.

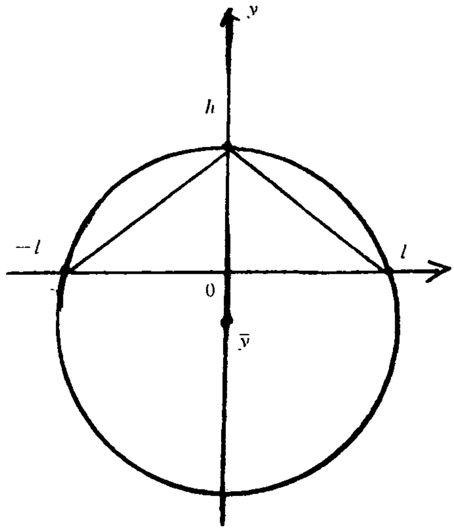

图2

由对称性, 设 T 的一个外接圆 C 的方程是

$$x^2+(y-\bar{y})^2=r^2 \qquad (8)$$

将 $(0,h)$, $(\pm l,0)$ 代入方程(8)得

$$(h-\bar{y})^2=r^2,\quad l^2+\bar{y}^2=r^2,$$

$$r=\frac{h^2+l^2}{2h},\quad \bar{y}=\frac{h^2-l^2}{2h}$$

即 C 的方程是

$$x^2+\left(y-\frac{h^2-l^2}{2h}\right)^2=\frac{(h^2+l^2)^2}{4h^2}$$

对任意的 $(x,y)\in C$, 我们有

$$\frac{x^2}{\frac{4l^2}{3}}+\frac{\left(y-\frac{h}{3}\right)^2}{\frac{4h^2}{9}}-1$$

$$=\frac{3}{4l^2}\left(\frac{(h^2+l^2)^2}{4h^2}-\left(y-\frac{h^2-l^2}{2h}\right)^2\right)+\frac{9\left(y-\frac{h}{3}\right)^2}{4h^2}-1$$

$$=\frac{3y}{4h^2l^2}(y-h)(3l^2-h^2)$$

由 $h<\sqrt{3}l$ 和 $y<h$, 得上式小于0. 根据 E_0 的方程(3), C 在底上面的部分在 E_0 中.

由定理1和定理2, 我们可以在二维情形得到著名的F.John 定理.

定理**3** 设 K 是平面上的有界凸集, 则存在一个面积最小的椭圆 E, 使得

$$\frac{1}{2}E\subset K\subset E$$

其中 $\frac{1}{2}E$ 是指相对于椭圆 E 的中心收缩 $\frac{1}{2}$ 的那个椭圆.

证明 首先我们证明存在包含 K 的面积最小的椭圆 E. 定义

$$m=\inf\{E\text{ 的面积}|E|\,|\,K\subset E\}$$

则存在一个椭圆列 $E_n\supset K$, $n=1,2,\cdots$, 使得 $m=\lim\limits_{n\to\infty}|E_n|$. 设 E_n 的中心是 (x_n,y_n), 半轴是 a_n, b_n, 转角是 $\theta_n\in[0,2\pi)$. 我们有 $m=\lim\limits_{n\to\infty}\pi a_nb_n$. 从而存在 $C>0$ 使得 $a_nb_n\leq C$. 又由 $E_n\supset K$, 可得 $r>0$, 使 $a_n\geq r$, $b_n\geq r$. 因此对任意的 n 都有

$$a_n,\ b_n\leq\frac{C}{r},\quad \operatorname{dist}((x_n,y_n),K)\leq\max(a_n,b_n)\leq\frac{C}{r}$$

综上所述 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{t_n\}$ 都是有界数列, 从而有收敛子列. 即 E_n 有一个收敛子列收敛到椭圆 E, 且 $|E|=m$.

接下来我们用反证法证明 $\frac{1}{2}E\subset K$. 对于集合 D, 记 D^o 和 ∂D 分别为它的内部和边界. 若 $\frac{1}{2}E\not\subset K$, 则存在点 $z\in\left(\frac{1}{2}E\right)^o\cap(\partial K)$. 设 φ 是一个线性变换, 使 $\varphi(E)$ 为圆, 则 $\varphi(K)$

是凸集, $\varphi(K) \subset \varphi(E)$, 且

$$\varphi(z) \in \left(\frac{1}{2}\varphi(E)\right)^{o} \cap (\partial(\varphi(K)))$$

见图3. 又设 l 是过 $\varphi(z)$ 的 $\varphi(K)$ 切线, 则由 $\varphi(K)$ 的凸性, 知 $\varphi(K)$ 在 l 的一侧. 设 l 交 $\varphi(E)$ 的边界于点 A, B, 在 $\varphi(K)$ 所在的那一侧取一点 $C \in \varphi(E)$, 使 ABC 为等腰三角形. 做三角形 ABC 的最小面积的外接椭圆 S (其存在性由定理1保证). 由于 $\varphi(z) \in \frac{1}{2}\varphi(E)$, 所以 AB 上的高小于 $\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$ (注意: 当 AB 为 $\frac{1}{2}\partial\varphi(E)$ 的切线时, AB 边上的高等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$). 由定理2, 我们有 $\varphi(K) \subset S$, 且 S 的面积小于 $\varphi(E)$ 的面积,

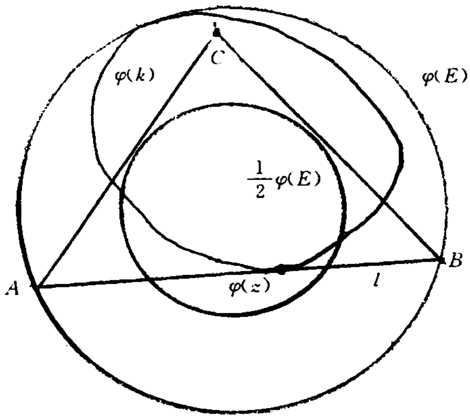

图3

从而 $\varphi^{-1}(S) \supset K$, 且 $\varphi^{-1}(S)$ 的面积小于 E 的面积. 这与 E 的面积最小矛盾. 故 $\frac{1}{2}E \subset K$.

参考文献:

[1] de G Miguel, Differentiation of Integrals in R^n [J]. Math, Lecture Notes, 481, Springer-Verlag, 1976.

Thought From the Area of the Circucile of Triangle

LI Mei-sheng[1], BAO Ji-guang[2]

(1. Department of Mathematics, Beihang University, Beijing 100083, China)
(2. School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: In this paper we prove that an ellipse around an equilateral triangle, with the minimal area, is just a circle, and then give a proof of the famous F. John Theorem in two dimension by primary method.

Keywords: circucicle of triangle; minimal area; F. John theorem