Riccati 方程的特解

保继光 (北京师范大学数学系 100875)

1841 年,J. Liouville 证明了常微分方程

$$y'+y^2=f(x) \tag{1}$$

仅当

$$f(x)=1+\frac{m(m+1)}{x^2} \tag{2}$$

m 为整数时才有“初等”解,他的这一成果从理论上结束了求解一般形式的非线性常微分方程的尝试,D. Bernoulli 给出方程(1) 在情形(2) 的特解

$$y=\frac{m+1}{x}+\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{d^m}{d(x^2)^m}\left(\frac{e^{\pm x}}{x}\right)\right)\right]. \tag{3}$$

在本文中,我们给出一种验证办法.

不失一般性,我们只对(3) 中的正号情形证明,并认为 m 是非负整数,记 $u_m=\frac{d^m}{d(x^2)^m}\left(\frac{e^x}{x}\right)$,则 $y=\frac{m+1}{x}+\frac{u_m'}{u_m}$

方程(1) 化为

$$-\frac{m+1}{x^2}+\frac{u_m''}{u_m}-\frac{u_m'^2}{u_m^2}+\frac{(m+1)^2}{x^2}+\frac{2(m+1)u_m'}{xu_m}+\frac{u_m'^2}{u_m^2}=1+\frac{m(m+1)}{x^2}$$

即

$$I_m=xu_m''+2(m+1)u_m'-xu_m=0 \tag{4}$$

下面我们用数学归纳法证明(4).

当 $m=0$ 时,$u_0=\frac{e^x}{x}$.

$$I_0=e^x\left[x\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)+2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)-x.\frac{1}{x}\right]=0.$$

设 $I_m=0$,我们有

$$u_m''=u_m-\frac{2(m+1)}{x}u_m'. \tag{5}$$

现证 $I_{m+1}=0$. 直接计算得

$$u_{m+1}=\frac{d^{m+1}}{d(x^2)^{m+1}}\left(\frac{e^x}{x}\right)=\frac{du_m}{d(x^2)}\frac{u_m'}{2x}.$$

$$u_{m+1}'=\frac{u_m''}{2x}-\frac{u_m'}{2x^2},$$

$$u_{m+1}''=\frac{u_m'''}{2x}-\frac{u_m''}{x^2}+\frac{u_m'}{x^3},$$

从而

$$\begin{aligned}I_{m+1}&=x\left(\frac{u_m'''}{2x}-\frac{u_m''}{x^2}+\frac{u_m'}{x^3}\right)\\&\quad+2(m+2)\left(\frac{u_m''}{2x}-\frac{u_m'}{2x^2}\right)-x\cdot\frac{u_m'}{2x}\\&=\frac{1}{2}u_m'''+\frac{m+1}{x}u_m''\\&\quad-\left(\frac{m+1}{x^2}\right)\frac{1}{2}u_m'.\end{aligned}$$

借助(5),我们有

$$\begin{aligned}I_{m+1}&=\frac{1}{2}\left[u_m'-\frac{2(m+1)}{x}u_m''\right.\\&\quad\left.+\frac{2(m+1)}{x^2}u_m'\right]\\&\quad+\frac{m+1}{x}\left[u_m-\frac{2(m+1)}{x}u_m'\right]\\&\quad-\left[\frac{m+1}{x^2}+\frac{1}{2}\right]u_m'\\&=-\frac{m+1}{x^2}\left[xu_m''+2(m+1)u_m'-xu_m\right]\\&=0.\end{aligned}$$

至此,我们证明了(3) 是方程(1) 在情形(2) 的解.

参考文献

1 秦元勋,常微分方程概貌. 北京:科学技术文献出版社,1989.

2 M. 克莱因,古今数学思想(第二册). 上海:上海科学技术出版社,1979.

1967 年,塔克曼研究后宣布,若有奇完全数,它必须大于 10^{36}. 1972 年有人证明它必须大于 10^{50}. 1982 年又有人证明它必须大于 10^{120},……:这种难于捉摸的奇完全数,即使有,但它实在太大,以至超出了目前人们能够用计算机计算的范围了.

参考文献

1 俞晓群. 自然数中的明珠. 天津:天津科学技术出版社. 1989.

2 徐品方. 漫长的寻觅梅森素数的历程. 数学通报,1997,11.

3 [美] 伊夫斯著. 欧阳绛译. 数学史概论. 太原:山西经济出版社,1993.

4 葛克阳. 数学猜想和它的故事. 北京:人民教育出版社,1989.