北京师范大学 2018～2019 学年第一学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：偏微分方程　　　　任课老师姓名：保继光

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ☒　开卷 ☐　其他 ☐

学院：＿＿＿＿＿＿　　专业：＿＿＿＿＿＿　　年级：＿＿＿＿＿＿

姓名：＿＿＿＿＿＿　　学号：＿＿＿＿＿＿　　签字：＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一. 填空题(20分):

位势方程形如 (1) , 是 (2) 阶线性 (3) 型偏微分方程. 我们重点研究了位势方程Dirichlet问题解的 (4) , 即解的存在性、唯一性和稳定性. 弱极值原理在整个过程中起到了基本的和重要的作用.

弱极值原理可以直接推出解的 (5) , 而导致解的稳定性的是解的 (6) 估计, 它是通过对辅助函数应用弱极值原理得到的. 在解的存在性方面, 通过引入 (7) , 获得了方程的一个特解, 从而将位势方程的求解归结为调和方程.

对于Laplace方程的Dirichlet问题, 首先在区域具有某些对称性的情形, 如: 半空间、球等, 借助基本解$K(x) =$ (8) , 运用 (9) 方法, 获得了解的表达式—Possion公式. 然后在一般区域情形, 使用 (10) 方法(C^0下调和函数的上确界), 获得了解的存在性定理.

二. 简答题(15分):

1. 陈述有界区域上位势方程Dirichlet问题解的存在性定理.

2. 在Laplace方程$u_{xx} + u_{yy} = 0$ 两边关于x 做Fourier变换, 写出得到的常微分方程.

3. 叙述一个热传导方程定解问题, 以及相应的解的唯一性定理.

三. 计算题(48分):

1. 求解一阶方程的Cauchy问题

$$
\begin{cases} u_x - u_y + 2u = 1, \\ u(x,0) = x^2. \end{cases}
$$

2. 化简并求解二阶线性方程的定解问题

$$
\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \\ u(x,0) = 3x^2, \quad u_y(x,0) = 0. \end{cases}
$$

3. 求解弦振动方程的初边值问题

$$
\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \mathrm{e}^t \sin 2x, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \ge 0. \end{cases}
$$

四. 证明题(17分):

1. 设

$$
u(x) = (n(n-2))^{\frac{n-2}{4}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}},
$$

其中$n \ge 3$, ε是一个正常数. 证明u 满足Yamabe方程

$$
-\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}}.
$$

2. 设$x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 > 0$, a是一个正常数, $u(x,t)$在区域$|x - x_0| \le a(t_0 - t)$中满足波动方程

$$
u_{tt} = a^2 \Delta u.
$$

证明:

$$
E(t) := \frac{1}{2} \int_{|x-x_0| \le a(t_0-t)} \left(u_t^2(x,t) + a^2 |Du(x,t)|^2 \right) dx
$$

关于t在$[0, t_0]$上单调不增.