第19卷第2期　　大 学 数 学　　Vol 19, № 2
2003年4月　　COLLEGE MATHEMATICS　　Apr. 2003

从Newton定律到Kepler三定律

保继光
(北京师范大学 数学系, 北京 100875)

[摘　要] 从Newton运动学第二定律和Newton万有引力定律出发, 导出Kepler行星绕日运动三定律
[关键词] Kepler三定律; 万有引力定律; Newton第二定律
[中图分类号] O175.1　　[文献标识码] C　　[文章编号] 1672-1454(2003)02-0105-04

Isaac Newton (1642～1727) 是一名伟大的数学家和物理学家 1687年他在巨著《自然哲学的数学原理》中叙述了他的运动定律和引力定律, 并讨论了它们与Kepler定律之间的关系, 其基本的数学问题是求解常微分方程组 这在数学史上被称为常微分方程实际应用的第一次历史性的胜利

在本文中, 我们从Newton运动学第二定律和Newton万有引力定律出发, 用数学方法推导出Kepler行星绕日运动三定律 虽然这一思想产生于三百多年前, 且略见于现代的某些文献中. 但是, 由于其历史地位在数学上的重要性, 我们用详细、严格和初等的数学语言将它展示出来, 这仍具有理论和实际意义

首先叙述一下Newton的两个著名定律 为简单起见, 质点与它的质量用同一字母表示

Newton力学第二定律　质点的动量随时间的变化率等于它受到的力, 即

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{F}, \tag{1}$$

其中m是质点的质量, $\mathbf{r}$是位置向量, t是时间, $\mathbf{F}$是作用于质点的力.

Newton万有引力定律　两个质点之间的引力与距离的平方成反比, 与质量成正比, 即

$$\mathbf{F}=-\frac{GMm}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}, \tag{2}$$

其中G是万有引力常数,M与m分别是两质点的质量, $\mathbf{r}$是由M点到m点的距离向量, $\mathbf{F}$是M点对m点之间的吸引力.

我们假设M为太阳,m为行星,M是固定的,m在M的引力作用下运动 结合(1)和(2)得到

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\frac{GM}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}. \tag{3}$$

这就是描述行星绕太阳运动的常微分方程的向量形式 在初始位置向量和初始速度向量决定的平面上, 建立以M点为原点的直角坐标系, (3)化为常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{GMx}{(x^2+y^2)^{3/2}},\\[2mm] \dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{GMy}{(x^2+y^2)^{3/2}}.\end{cases} \tag{4}$$

再引入极坐标(r, θ), 即

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

直接计算得

[收稿日期] 2002-03-22

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos\theta-r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\theta+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\theta,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\cos\theta-2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\cos\theta-r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\sin\theta,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\sin\theta+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\theta-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\sin\theta+r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\cos\theta$$

将其代入(4),我们有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\cos\theta-2\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta-r\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\cos\theta-r\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\sin\theta=-\dfrac{GM}{r^2}\cos\theta,\\ \dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\sin\theta+2\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\theta-r\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\sin\theta+r\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\cos\theta=-\dfrac{GM}{r^2}\sin\theta\end{cases}$$

由此得到

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=r\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2-\dfrac{GM}{r^2}, & (5)\\ \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-\dfrac{2}{r}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}. & (6)\end{cases}$$

为确定(5),(6)的解,假设有初始条件

$$\begin{cases}r(0)=r_0, & \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(0)=r_1,\\ \theta(0)=\theta_0, & \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\theta_1,\end{cases}\tag{7}$$

其中 $r_0, r_1, \theta_0, \theta_1$ 是给定的常数,它们仅与行星的初始状态有关

下面我们将常微分方程组的初值问题(5),(6),(7)化成一个以 θ 为自变量,以 $u=\frac{1}{r}$ 为未知函数的常微分方程的初值问题 由(6),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)=0,$$
$$r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=r_0^2\theta_1.\tag{8}$$

将(8)代入(5),得

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=(r_0^4\theta_1^2-GM)\frac{1}{r^2}.\tag{9}$$

由(8)和(9),有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{r_0^2\theta_1}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}=-\frac{1}{r_0^2\theta_1}\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{r_0^2\theta_1}\left(\frac{r_0^4\theta_1^2}{r}-GM\right)\frac{1}{r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}}$$
$$=-\frac{1}{r_0^4\theta_1^2}(r_0^4\theta_1^2u-GM)=-u+\frac{GM}{r_0^4\theta_1^2}.$$

现在,我们得到了初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=c, & (10)\\ u(\theta_0)=\dfrac{1}{r_0},\quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}(\theta_0)=-\dfrac{r_1}{r_0^2\theta_1}, & (11)\end{cases}$$

其中

$$c=\frac{GM}{r_0^4\theta_1^2}.$$

(10)是一个常系数的二阶线性常微分方程, 它的通解是

$$u = a\cos\theta + b\sin\theta + c \tag{12}$$

根据(11), 其中的常数 a, b 能被 $r_0, r_1, \theta_0, \theta_1$ 确定 若 $a = b = 0$, 则解(12)成为 $u = c$, 即 $r = \frac{1}{c}$. 在这个情形, 下面的结论显然成立 我们不妨认为 a, b 不同时为零 令

$$\bar{u} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta_0 = \arccos\frac{a}{\bar{u}},$$

则

$$\frac{1}{r} = \bar{u}\cos(\theta - \theta_0) + c$$

如果 m 不跑到无穷远, r 有界 由(8), $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$有正下界, θ可取到任意值 特别地, 取 $\theta = \theta_0 + \pi$, 得到 $\bar{u} < c$ 借助一个坐标旋转, 可设 $\theta_0 = 0$ 相应地, $\bar{u} = a < c, b = 0$ 回到直角坐标系, 有

$$1 - ax = c\sqrt{x^2 + y^2}.$$

两边平方, 配方, 得

$$\frac{\left(x + \frac{a}{c^2 - a^2}\right)^2}{\left(\frac{c}{c^2 - a^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}}\right)^2} = 1, \tag{13}$$

且

$$\frac{c}{c^2 - a^2} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - a^2}}\frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}} > \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}}.$$

显然, 它表示一个以 $\left(-\frac{a}{c^2 - a^2}, 0\right)$ 为中心, 长轴在 x 轴上的椭圆 由于它的半焦距

$$\sqrt{\left(\frac{c}{c^2 - a^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}}\right)^2} = \frac{a}{c^2 - a^2}$$

与长半轴相同 所以, 椭圆(13)的焦点之一为原点

另外, 向径 r 从时刻 t_0 到 t 扫过的面积是

$$A(t) = \frac{1}{2}\int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} r^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

由(8),

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{1}{2}r^2(\theta(t))\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{r_0^2\theta_1}{2}.$$

所以

$$A(t) = \frac{r_0^2\theta_1}{2}(t - t_0). \tag{14}$$

设行星的周期是 T, 则椭圆(13)的面积是 $A(T + t_0)$. 由(14)和椭圆的面积公式

$$\frac{r_0^2\theta_1}{2}T = \pi\frac{c}{c^2 - a^2}\frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}},$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\left(\frac{c}{c^2 - a^2}\right)^3. \tag{15}$$

至此, 我们从(13), (14)和(15)得到了

Kepler 行星绕日运动三定律:

1. 行星在以太阳为焦点的一个椭圆轨道上运动;
2. 行星到太阳的向径扫过的面积与时间成正比;
3. 行星周期的平方与行星椭圆轨道的半长轴的三次方成正比

[参 考 文 献]

[1] 秦元勋. 常微分方程概貌[M]. 北京: 科学技术文献出版社, 1989.
[2] M. 克莱因. 古今数学思想(第二册) [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1979.
[3] 姜启源. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.
[4] 李卫国. 高等数学实验课[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.

From Nowton Laws to Three Kepler Laws

BAO Ji-guang
(Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: Three Kepler laws, which describe planets' motion around the sun, are derived by using the law of universal gravitation and the second Newton law in mechanics.

Key words: Kepler Laws; law of universal gravitation; the second Newton law in mechanic