与初等对称函数有关的若干恒等式①

保继光　李海刚

（北京师范大学数学科学学院，教育部数学与复杂系统实验室　100875）

众所周知：对于一个正的 n 元数组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，有如下不等式成立：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},\tag{1.1}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立. 上式表明：一个正的 n 元数组，其代数平均值大于其几何平均值. 事实上，记 $a=(a_1,a_2,\cdots a_n)\in\mathbb{R}^n$，我们有著名的麦克劳林（Maclaurin）不等式

$$\left[\frac{1}{C_n^l}S_l(a)\right]^{1/l}\geqslant\left[\frac{1}{C_n^k}S_k(a)\right]^{1/k},a\in\Gamma_k,k\geqslant l\geqslant 1\tag{1.2}$$

成立（见[2]），其中 $C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}$，

$$S_k(a)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k},1\leqslant k\leqslant n\tag{1.3}$$

为 k－阶初等对称函数，

$$\Gamma_k=\{a\in\mathbb{R}^n\,|\,S_1(a)>0,\cdots,S_k(a)>0\}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中顶点在原点的锥. 为了方便，我们延拓 S_k 的定义，令 $S_0(a)=1$，而当 $k>n$ 或 $k<0$ 时，令 $S_k(a)=0$. 于是，在(1.2)中取 $k=n,l=1$，就可以得到(1.1). 关于 S_k 不等式的研究还可以参考[1]. 本文主要研究关于 S_k 的恒等式，旨在说明基本初等函数 S_k 与组合数 C_n^k 之间的联系，得到了一个关于 S_k 的恒等式，并由此得到一个有关组合数的恒等式.

对于某个固定的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，定义

$$S_{k;i}(a)=S_k(a)|_{a_i=0}.$$

显然，关于 S_k 与 $S_{k;i}$ 有如下等式关系

$$S_k(a)=a_iS_{k-1;i}(a)+S_{k;i}(a).\tag{1.4}$$

同样，可以定义

$$S_{k;i,j}(a)=S_k(a)|_{a_i=a_j=0}.$$

定理 1　对于任意的一个正的 n 元数组 $a=(a_1,a_2\cdots,a_n)$，我们有如下代数恒等式成立：

$$\sum_{l=0}^{n-k}\frac{S_{n-1}(a)}{(-a_i)^{n-k-l}}=a_iS_{k-1;i}(a),\ i=1,2,\cdots,n.\tag{1.5}$$

特别地，

$$\frac{S_n(a)}{(-a_i)^n}+\cdots+\frac{S_2(a)}{(-a_i)^2}+\frac{S_1(a)}{-a_i}+1=0.\tag{1.6}$$

证明　首先，考虑如下辅助矩阵

$$M=(a_i\delta_{ij}-q_iq_j)_{n\times n}$$

的特征值多项式，其中 $q=(q_1,\cdots,q_n)$ 是非负 n 元数组. 由线性代数的知识，直接计算可知

$$\begin{aligned}D_n(\lambda)&=\det(\lambda I-M)\\&=(\lambda-a_n)D_{n-1}(\lambda)+(\lambda-a_1)\cdots(\lambda-a_{n-1})q_n^2\\&=(\lambda-a_n)((\lambda-a_{n-1})D_{n-2}(\lambda)+(\lambda-a_1)\cdots(\lambda-a_{n-2})q_{n-1}^2)+(\lambda-a_1)\cdots(\lambda-a_{n-1})q_n^2\\&=(\lambda-a_n)(\lambda-a_{n-1})((\lambda-a_{n-2})D_{n-3}(\lambda)+(\lambda-a_1)\cdots(\lambda-a_{n-3})q_{n-2}^2)+((\lambda-a_1)\cdots(\lambda-a_{a-2})\cdot q_{n-1}^2(\lambda-a_n))+((\lambda-a_1)\cdots(\lambda-a_{n-1})q_n^2)\\&=\cdots\\&=\prod_{i=1}^n(\lambda-a_i)+\sum_{i=1}^n\left(q_i^2\prod_{j\neq i}(\lambda-a_j)\right)\end{aligned}$$

由广义韦达（Viete）定理

$$\prod_{i=1}^n(\lambda-a_i)=\sum_{l=0}^n(-1)^{n-l}S_{n-l}(a)\lambda^l,$$

得

---

① 基金项目：国家自然科学基金（11071020 和 11126038）；教育部博士点基金（20100003110003 和 20100003120005）；和教育部长江学者创新团队（PCSIRT）资助.

作者简介：1. 保继光（1963 年），男，满族，北京，教授，主要研究方向：偏微分方程. Email：jgbao@bnu.edu.cn. 2. 李海刚（1981 年），男，河南，讲师，主要研究方向：偏微方程. Email：hgli@bnu.edu.cn. 通讯作者.

$$D_n(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\lambda^{n-k}\Big[(-1)^k S_k(a)+\sum_{i=1}^{n}q_i^2\cdot(-1)^{k-1}S_{k-1;i}(a)\Big].\tag{1.7}$$

另一方面,由于多项式函数

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}\lambda^{n-k},$$

所以,求函数 $D_n(\lambda)$ 在 0 点的 $n-k$ 阶导数,可知

$$\begin{aligned}D_n^{(n-k)}(0)&=\sum_{l=0}^{n-k}C_{n-k}^{l}\Big(\prod_{i=1}^{n}(\lambda-a_i)\Big)^{(l)}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^2}{\lambda-a_i}\right)^{(n-k-l)}\Bigg|_{\lambda=0}\\&=(-1)^k(n-k)!\cdot\\&\quad\left(S_k(a)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^2}{-a_i}\right)+\sum_{l=0}^{n-k-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{S_{n-l}(a)q_i^2}{(-a_i)^{n-k-l+1}}\right)\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}S_k(\lambda(M))&=\frac{(-1)^k}{(n-k)!}D_n^{n-k}(0)\\&=S_k(a)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^2}{-a_i}\right)+\\&\sum_{l=0}^{n-k-1}S_{n-l}(a)\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^2}{(-a_i)^{n-k-l+1}}\\&=S_k(a)+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{l=0}^{n-k}\frac{S_{n-l}(a)}{(-a_i)^{n-k-l+1}}\right)q_i^2.\end{aligned}\tag{1.8}$$

再次应用广义韦达(Viete)定理,比较(1.7)和(1.8),可得

$$\sum_{l=0}^{n-k}\frac{S_{n-l}(a)}{(-a_i)^{n-k-l+1}}=-S_{k-1;i}(a).$$

定理1得证.

若记

$$A_k^i(a)=\sum_{l=0}^{n-k}\frac{S_{n-l}(a)}{(-a_i)^{n-k-l}},\tag{1.9}$$

由(1.5)可知:$A_n^i(a)=S_n(a)$,$i=1,2,\cdots,n$. 而当 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 时,我们有如下推论

推论2 对于任意一个正的 n 元数组 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,当 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 时,$A_k^i(a)$ 都相等当且仅当 a_i 都相等.

特别地,取 $a=(1,1,\cdots,1)$,得到如下恒等式

$$\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{n-l}C_n^{n-l}=\frac{k}{n}(-1)^kC_n^k.\tag{1.10}$$

具体地讲,

$$-C_n^0=-\frac{1}{n}C_n^1.$$

$$C_n^0-C_n^1=-\frac{2}{n}C_n^2.$$

$$-C_n^0+C_n^1-C_n^2=-\frac{3}{n}C_n^3.$$

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3=-\frac{4}{n}C_n^4.$$

$$-C_n^0+C_n^1-C_n^2+C_n^3-C_n^4=-\frac{5}{n}C_n^5.$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

$$(-1)^{n-1}C_n^0+(-1)^{n-2}C_n^1+\cdots+(-1)C_n^{m-2}=-\frac{n-1}{n}C_n^{m-1}.$$

$$(-1)^nC_n^0+(-1)^{n-1}C_n^1+(-1)^{n-2}C_n^2+\cdots+(-1)\cdot C_n^{n-1}=-1.$$

这里用到了 $C_n^k=C_n^{n-k}$.

证明 当 $k=1$,时由(1.5)可知,$A_1^i=a_iS_{0;i}(a)=a_i$. 结论显然成立.

当 $k\geqslant 2,n\geqslant 3$ 时,取任意的 $i_1,i_2\in\{1,2,\cdots,n\}$,由恒等式(1.5)和(1.4),可知

$$\begin{aligned}&A_k^{i_1}(a)-A_k^{i_2}(a)=a_{i_1}S_{k-1;i_1}(a)-a_{i_2}S_{k-1;i_2}(a)\\&=a_{i_1}[a_{i_2}S_{k-2;i_1i_2}(a)+S_{k-1;i_1i_2}(a)]-a_{i_2}\cdot[a_{i_1}S_{k-2;i_1i_2}(a)+S_{k-1;i_1i_2}(a)]\\&=(a_{i_1}-a_{i_2})S_{k-1;i_1i_2}(a).\end{aligned}$$

由 $a_i>0$,$i=1,2,\cdots,n$,可知 $S_{k-1;i_1i_2}(a)\neq 0$. 因此,$A_k^{i_1}(a)=A_k^{i_2}(a)$ 当且仅当 $a_{i_1}=a_{i_2}$. 再由 i_1,i_2 的任意性可知结论成立.

特别地,取 n 元数 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(1,1,\cdots,1)$ 并记 $A_k^i(a)=c(k)$ 则由恒等式

$$\sum_{i=1}^{n}A_k^i(a)=\sum_{i=1}^{n}a_iS_{k-1;i}(a)=kS_k(a)$$

可知 $nc(k)=kC_n^k$,即 $c(k)=\frac{k}{n}C_n^k$. 代入(1.9),可得组合恒等式(1.10)成立. 证毕.

参考文献

1 Lin M, Trudinger N S. On some inequalities for elementary symmetric functions[J]. Bull. Austral. Math. Soc., 50(1994) 317-326

2 Mirtrinovic D S. Analytic inequalities[M]. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970