第42卷第1期 数 学 进 展 Vol.42, No.1
2013年2月 ADVANCES IN MATHEMATICS Feb., 2013

可压缩旋转恒星的存在性与稳定性理论

李海刚*， 保继光**

(1. 北京师范大学数学科学学院，北京，100875； 2. 数学与复杂系统教育部重点实验室，北京，100875)

摘要： 旋转是宇宙中的一个普遍现象. 从 Newton 时代开始，许多著名的数学家和物理学家如：Maclaurin, Clairaut, Liouville, Lyapunov, Poincaré 等人都对旋转星理论作出过非常重要的贡献. 旋转星理论中一个基本的问题就是研究自重力旋转流体相对平衡结构的存在性与稳定性，这个问题至今没有完全解决. 本文将尝试对其研究历史作一些综述，给出近年来的一些最新进展，并介绍一些未解决的问题.

关键词： 可压缩流体；旋转星；存在性；稳定性

MR(2000) 主题分类： 35A01; 35Q35; 76U05 / **中图分类号：** O175.2

文献标识码： A **文章编号：** 1000-0917(2013)01-0001-10

“旋转是宇宙中的一个普遍现象：地球与太阳系中的其他行星一样都在绕着各自的轴作自转运动，同时，卫星在绕着行星旋转，行星在绕着太阳旋转，太阳本身又是银河系的一个成员，而银河系又以一种更不寻常的方式在旋转. 那么，所有的这些旋转是怎么形成的？是什么力量能使这些旋转保持持久或者发生改变？它们在整个宇宙中所起的作用又是什么？”—— Whittaker 曾经在 “宇宙中的旋转” 的报告中这样讲道 [4]. 这足以看出旋转在天体物理学和流体力学中的重要性. 下面简要叙述一下旋转星研究的历史.

1 旋转星的研究历史

自重力 (或，自引力) 可压缩旋转恒星 (self-gravitating compressible rotating star) 的研究历史还要从研究地球的形状开始说起. 当时，人们把地球看作是一个密度均匀的自重力不可压缩流体.

1.1 不可压缩旋转星

早在 1687 年， Newton(1643–1727) 第一个认识到引力定律对解释星体形状的重要性. 在假设地球是一个自引力系统的前提下， Newton 认为：地球可能是一个密度均匀的，以常角速度自转的，略微扁平的椭球，并得到如下近似关系式：

$$e = \frac{5}{4}f,$$

其中 e 是经线截面的椭圆率， f 是赤道上离心力与球面上平均万有引力的比值，即

$$e = \frac{\text{赤道半径} - \text{极半径}}{\text{赤道半径}}, \quad f = \frac{\text{赤道上的离心加速度}}{\text{表面上的平均重力加速度}}.$$

收稿日期： 2012-01-10.

基金项目：国家自然科学基金 (No. 11071020, No. 11126038)；教育部高等学校博士学科点专项科研基金 (No. 20100003110003, No. 20100003120005)；教育部长江学者和创新团队发展计划 (No. IRT0908).

E-mail: * hgli@bnu.edu.cn； ** 通信作者：保继光， jgbao@bnu.edu.cn

我们把这种密度均匀 (即密度为常数函数) 的流体称作不可压缩流体. Newton 的这一工作, 标志着对不可压缩一致旋转星重力平衡研究的开始. 后来，人们也把这种自重力流体称作 **Newton 流体** 或 **Newton 星**.

1740 年左右， Maclaurin(1698–1746) 证明了任意密度均匀的扁平椭球都可能是一个相对平衡结构. 他成功地找到了旋转角速度 ω 与经线截面椭圆率 e 之间的关系式

$$\frac{\omega^2}{\pi g\rho}=\frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{e^3}2(3-2e^2)\arcsin e-\frac{6}{e^2}(1-e^2), \tag{1}$$

其中 g 为引力常数， ρ 为流体的密度. 历史上有著名的 "**Maclaurin 椭球序列**" 之说，即旋转角速度越大，椭球越扁平. 但是，当星体旋转速度太大时，分岔 (bifurcation) 就会出现. 本文主要关注低速旋转的恒星.

接下来, 有许许多多著名的数学家和物理学家, 如 Laplace(1749–1827), Legendre(1752–1833), Poisson(1781–1840), Jacobi(1804–1851), Liouville(1809–1882), Poincaré(1854–1912) 和 Lyapunov (1857–1918) 都对不可压缩的旋转星理论做出过重要的贡献 [18].

1.2 可压缩旋转星

到 19 世纪末 20 世纪初的时候，人们已经清楚恒星是一个中心冷凝的气态结构. 1902 年, Jeans 提出第一个严格的可压缩旋转星理论，即星云形成理论. 他假设宇宙充满了非相对论性流体 (non-relativistic fluid), 这些流体满足下面的 Euler-Poisson 方程组 (参见 [40] 中的第 562 页)

$$\begin{cases}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0,\\ \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=\mathbf{g}-\frac{1}{\rho}\nabla P,\\ \nabla\times\mathbf{g}=0,\\ \nabla\cdot\mathbf{g}=-4\pi\rho,\end{cases} \tag{2}$$

其中 $t\in\mathbb{R}^+$, $x\in\mathbb{R}^3$, ∇ 表示空间梯度， ρ 表示流体的密度 (注意：这时候密度是变化的，它是时间变量和空间变量的函数，即 $\rho=\rho(t,x)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 表示流体粒子的速度场， $\mathbf{g}$ 表示流体自身的引力场，而 P 表示流体的压强，我们也称 $P(\rho)$ 为流体的状态函数 (equation of the state).

随着越来越多的关于恒星内部物理过程的发现，人们也清楚了大多数恒星的能量传递形式主要是辐射而不是对流. 1923 年， Milne(1896-1950) 在牛津大学，以纯粹的辐射平衡形式建立了第一个慢速旋转恒星的具体模型. 10 年之后，印度籍的天文物理学家 Chandrasekhar(1910-1995) 推广了这种技术，并因此获得 1983 年的 Nobel 物理学奖. Chandrasekhar 曾在 1930 年预言了稳定的白矮星 (white dwarf) 最大质量的存在，当白矮星的质量超过这个临界质量时，恒星就会发生重力坍塌，然后变成中子星或者黑洞等其他宇宙星体.

2 近期主要工作

一个古老而经典的问题就是研究星体处于平衡时的稳定性, 即方程组 (2) 的稳态解 (stationary solution) 的存在性和稳定性. 物理试验表明： **星体的稳定性主要依赖于两个方面：星体的状态函数 P 和星体的速度场 $\mathbf{v}$.**

借助于测不准原理 (the uncertainty principle) 和 Pauli 排斥原理 (Pauli's exclusion principle), 人们发现：恒星物质的排列遵守着一个基态压力方程，而压力只依赖于恒星的局部密度.

一个非常著名的量子统计的结果 (见 [3] 中的第 10 章) 表明：白矮星在星体边缘和星体核心的状态函数 $P(\rho)$ 分别遵守下面的渐近关系式：

$$\begin{cases} P(\rho) = c_1\rho^{\frac{5}{3}} - c_2\rho^{\frac{7}{3}} + O(\rho^3), & \rho \to 0, \\ P(\rho) = d_1\rho^{\frac{4}{3}} - d_2\rho^{\frac{2}{3}} + \cdots, & \rho \to \infty, \end{cases}$$

其中 c_1, c_2, d_1, d_2 均为正常数. 而其他的恒星，比如单原子星 (monatomic gas), 双原子星 (diatomic gas), 超质量星 (supermassive star) 的状态函数分别为

$$P(\rho) = K_1\rho^{\frac{5}{3}}, \quad P(\rho) = K_2\rho^{\frac{7}{5}}, \quad P(\rho) = K_2\rho^{\frac{4}{3}},$$

其中 K_1, K_2, K_3 表示不同的常数. 感兴趣的读者可以参考 [3–4, 33, 39–40].

对于可压缩旋转星来说， Luo 和 Smoller[30] 把方程组 (2) 的轴对称稳态解也称作旋转星解 (rotating star solution). 当星体没有旋转时，稳态解的存在性和稳定性是经典的，此时的恒星的的确确就是一个球 [23]. 但是当恒星绕着一个固定的轴 (比如说 z 轴) 自转时，星体将不再保持径向对称. 因此，研究带有旋转的恒星的稳态解，不管是在天体物理学还是在数学上，都更加有意义，也更加具有挑战性. 下面将着重介绍一下在旋转星解存在性和稳定性两个方面的主要研究进展.

2.1 旋转星解的存在性

现有的关于 Euler-Poisson 方程组 (2) 的结果主要集中在旋转星解的存在性以及旋转星解支集半径的渐近估计. 为叙述方便，这里采用轴坐标系 (r, θ, z)，即对于任意的 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$r(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad z(x) = x_3.$$

对于给定质量为 M 的恒星，引入如下几个函数

$$m_\rho(r) = \frac{1}{M}\int_{r(y)<r} \rho(y)\mathrm{d}y,$$

$$L(m) = j^2(m), \tag{3}$$

$$J(r) = \int_0^r s\omega^2(s)\mathrm{d}s. \tag{4}$$

可压缩的低速旋转星模型可以分为两类： (a) 给定单位质量角动量 $j(m)$ 的旋转星， (b) 给定角速度 $\omega(r)$ 的旋转星.

对于给定角动量的旋转星，其总能量为

$$E_1(\rho) = \int_{\mathbb{R}^3} A(\rho(x))\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x)}{r^2(x)} L(m_\rho(r(x)))\mathrm{d}x; \tag{5}$$

而对于给定角速度的旋转星，流体的总能量为

$$E_2(\rho) = \int_{\mathbb{R}^3} A(\rho(x))\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^3} J(r(x))\rho(x)\mathrm{d}x; \tag{6}$$

E_1, E_2 中的三个积分依次分别表示恒星的内能、重力势能和自转动能，其中 $A(\rho)$ 由状态函数 $P(\rho)$ 给出，且有关系式

$$A(\rho) = \rho \int_0^{\rho} P(t) t^{-2} \mathrm{d}t.$$

假设函数 P 满足下列条件：

$$P \in C^1([0, +\infty)), \quad P(\rho) \geq 0, \quad P'(\rho) > 0, \quad \lim_{\rho \to 0} \frac{P(\rho)}{\rho^{\frac{4}{3}}} = 0, \quad \lim_{\rho \to \infty} \frac{P(\rho)}{\rho^{\frac{4}{3}}} = \infty. \tag{7}$$

下面将就给定角速度旋转星和给定角动量旋转星的近期研究结果分别作以介绍．记

$$\Gamma = \left\{ \rho \in L^1(\mathbb{R}^3) \,\middle|\, \rho(x) = \rho(r, z) = \rho(r, -z) \geq 0, \ \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x) \mathrm{d}x = M \right\}.$$

2.1.1 给定角动量的旋转星

若给定单位质量角动量 $j(m_\rho(r))$, 则速度场

$$\mathbf{v}(x) = \left(-\frac{x_2 j(m_\rho(r))}{r^2(x)}, \frac{x_1 j(m_\rho(r))}{r^2(x)}, 0 \right).$$

前面的 Euler-Poisson 方程组 (2) 就变成了

$$\nabla P(\rho) = \rho \left\{ \nabla B\rho + r^{-3} j^2(m_\rho(r)) \mathbf{e}_r \right\}, \tag{8}$$

其中重力场 $\mathbf{g} = \nabla B\rho$,

$$B\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x - y|} \mathrm{d}y, \qquad \mathbf{e}_r = \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, 0 \right).$$

• 1971 年， Auchmuty 和 Beals[1−2] 给出了第一个严格的数学理论．首先证明方程 (8) 的轴对称解的存在性与能量泛函 E_1 极小元的存在性是等价的．然后为了弥补能量泛函 $E_1(\rho)$ 在全空间 $\mathbb{R}^3$ 上紧性的缺失，他们先考虑 E_1 在函数类

$$\Gamma_R = \{ \rho \in \Gamma \,|\, \rho = 0, \ \text{a.e. 在 } B_R \text{ 外}, \ \text{且 } \rho \leq R, \ \text{a.e.} \}$$

的能量极小，其中 $B_R = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < R \}$. 他们证明了如下定理：

定理 1 若函数 P 满足 (7), 函数 L 满足

$$L(0) = 0, \quad L(m) \geq 0, \quad L \in C^1([0, \infty)), \tag{9}$$

则存在函数 $\rho_R \in \Gamma_R$ 使得 $E_1(\rho)$ 达到能量极小.

然后对 ρ_R 进行先验估计，证明当 R 充分大时， ρ_R 的存在性与 R 的大小无关，由此得到如下定理：

定理 2 若函数 P 满足 (7), L 满足 (9), 则 $E_1(\rho)$ 存在能量极小 $\rho_1 \in \Gamma$, 而且 ρ_1 是 Hölder 连续的，并具有紧支集.

另外，如果将 (7) 中最后的极限式换成

$$\liminf_{\rho \to \infty} \frac{P(\rho)}{\rho^{\frac{4}{3}}} = K > 0,$$

那么定理 2 对于 $M < M_0$ 仍然成立，其中 M_0 为某个正常数，它与前面提到的白矮星理论中的 Chandrasekhar 临界质量是相对应的.

• 1980 年， Caffarelli 和 Friedman[6] 研究了集合 $\{\rho_1 > 0\}$ 的边界，证明了集合 $\{\rho_1 > 0\}$ 由有限多个环 (ring) 组成. 这里要说明一个问题，在 [8] 中他们还考虑了不可压缩旋转星的这些环分支的边界在 $z = 0$ 附近的正则性. 但是，对于可压缩的旋转星的自由边界问题当时还没有任何结果.

• 1980 年， Friedman 和 Turkington[15−17] 考虑了状态函数为多方压力 – 密度关系式

$$P = K\rho^{\gamma} \tag{10}$$

的可压缩流体，其中 $\gamma = 1 + \frac{1}{\beta}$, $0 < \beta < 3$, 此时

$$A(\rho) = \beta K \rho^{\gamma}.$$

首先定义 ρ_* 和 a_* 满足

$$\rho_*^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{3}} = CM^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{4}{3}\pi\rho_* a_*^3 = M,$$

其中 C 是仅依赖 β 和 K 的常数. 然后引入两个量 $q(m)$ 和 Q 来刻画流体旋转的速度,

$$q(m) = \frac{j^2(m)}{m a_* M}\ (0 < m \le 1); \quad Q = \int_0^1 q(m)\mathrm{d}m.$$

假设存在正常数 c_0, 使得 $c_0 Q \le q(m) \le c_0^{-1} Q$, 则当 Q 小于某一个正数 Q_1 时，称流体是 “慢速旋转的”; 而当 Q 大于某一个正数 Q_2 时，称流体是 “快速旋转的”. 对于 $\rho \in \Gamma$, 令 a_1 表示以原点为球心，包含整个集合 $\{\rho > 0\}$ 的最小球的半径， Friedman 和 Turkington 对星体半径建立了如下估计：对于慢速旋转的流体,

$$C_1 \le \frac{a_1}{a_*} \le C_2;$$

对于快速旋转的流体,

$$\frac{C_1 Q}{\log(1+Q)} \le \frac{a_1}{a_*} \le C_2 Q \log(1+Q),$$

其中 C_1, C_2 与 M 和 $j(m)$ 无关.

• 1984 年， Lions 在他的关于集中紧原理的两篇著名的论文中的第一篇 [27] 中，作为集中紧性原理的一个例子，重新证明了能量泛函 $E_1(\rho)$ 在 Γ 中的能量极小可以达到.

• 对于满足多方压力 – 密度关系式 (10) 的可压缩流体， 2009 年， Luo 和 Smoller[30] 减少了允许函数关于平面 $z = 0$ 对称的限制，在更广的函数类

$$\Gamma_M = \left\{\rho \in L^1(\mathbb{R}^3)\ \middle|\ \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x)\,\mathrm{d}x = M,\ \rho(x) = \rho(r,z) \ge 0,\ \text{a.e.}\right\}$$

中，证明了 E_1 能量极小的存在性. 这里除了要求 L 满足 (9) 之外，还要求

$$L(am) \ge a^{\frac{4}{3}} L(m), \quad 0 < a \le 1,\ 0 \le m \le 1,$$

和

$$L'(m) \geq 0, \quad 0 \leq m \leq 1.$$

他们在集合 Γ_M 上做扰动，建立了旋转星解的非线性稳定性. 他们把该稳定性理论应用到了旋转的白矮星和高密度的超质量星 [29].

2.1.2 给定角速度的旋转星

如果给定角速度 $\omega(r)(\geq 0)$, 那么速度场

$$\mathbf{v}(x) = (-x_2\omega(r), x_1\omega(r), 0), \quad 且\ |\mathbf{v}(x)| = \omega(r)r.$$

前面的 Euler-Poisson 方程组 (2) 就变成了

$$\nabla P(\rho) = \rho\left\{\nabla B\rho + \omega^2(r)r\mathbf{e}_r\right\}. \tag{11}$$

• 1971 年， Auchmuty 和 Beals[1] 证明了方程 (11) 轴对称解的存在性与能量泛函 E_2 极小的存在性是等价的. 然后证明了

定理 3 若 P 满足 (7), J 满足

$$J(0) \geq 0, \quad J(\infty) < \infty, \quad J \in C^1([0,\infty)), \quad J'(r) \geq 0, \quad \lim_{r\to\infty} r(J(\infty) - J(r)) = 0, \tag{12}$$

则 $E_2(\rho)$ 存在能量极小 $\rho_2 \in \Gamma$, 而且 ρ_2 也是 Hölder 连续的，并具有紧支集.

• 1980 年， Caffarelli 和 Friedman 在 [6] 中研究了集合 $\{\rho_2 > 0\}$ 的边界，证明了如果 $J(r)$ 是解析的，那么集合 $\{\rho_2 > 0\}$ 也由有限多个环组成.

• Auchmuty 和 Beals 在 [1] 中指出：对角速度的假设条件 (12) 并不包括角速度是常数的情形. 1991 年， Li[22] 研究了角速度是常数的可压缩一致旋转星，证明了对于某个比较小的正数 ε_0, 当 $\|J\|_\infty = \sup_{0\leq r<\infty}|J(r)| < \varepsilon_0$ 时， (11) 存在平衡解；当角速度比较大时，则不存在平衡解.

• 1994 年，Chanillo 和 Li[7] 证明了以常角速度 ω 低速旋转的白矮星，当 ω 大于某个非常小的正常数 ω_0 时，白矮星完全落在一个半径有限的球内，其半径 σ 依赖于 ω_0, 而且集合 $\{\rho > 0\}$ 的连通分支的个数至多为 k 个， $k = k(\omega_0)$. 这里要求 ω 有正下界的限制是合理的，因为对于不可压缩旋转星来说， MacLaurin 序列 (1) 表明：当 $\omega \to 0$ 时，星体会变得很扁平.

• 正如前面所言， Li 在 [22] 中证明了：当 J 很大时，不存在轴对称的平衡解. 2006 年，McCann[31] 证明了：当 J 比较大时，平衡解将以双星的形式出现，两星之间的距离相对于其半径而言比较远. 显然，这样的解不再是轴对称的，但是他们仍然关于平面 $z = 0$ 对称. 系统中双星的质量比可以通过与双质点的 Kepler 系统比较事先来确定. 由于这样得到的解是局部能量极小，因此这样的双星系统是稳定的.

• 2011 年， Li 和 Bao[20−21] 假设 $P(\rho)$ 满足比 (7) 更一般的条件：

$$\begin{aligned}
&P(0) = 0, \quad P'(\rho) > 0, && 当\ \rho > 0\ 时, \\
&P(\rho) \leq c_0\rho^{1+\frac{1}{\alpha}}, && 当\ \rho < \rho_0\ 时, \\
&\rho^{1+\frac{1}{\beta}} \leq c^0 P(\rho), && 当\ \rho > \rho^0\ 时,
\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $c_0, c^0, \rho_0 < \rho^0$ 都是正常数，且 $0 < \alpha, \beta \leq 3$. 他们利用集中紧原理，在允许函数类 Γ_M 上证明了旋转星解的存在性，并证明了极小化序列的紧性，这将有利于人们进一步研究解的稳定性.

• 2011 年， Chanillo 和 Weiss[8] 对给定角速度的一致旋转白矮星的平衡结构的自由边界进行了分类. 这些平衡结构是其对应能量泛函的所有临界点，但不一定都是能量极小点.

另外，在有界区域上也有一些重要的结果.

2.1.3 有界区域上的相关结论

• 2002 年， Deng, Liu, Yang 和 Yao[11] 在 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域上，考虑了非旋转的 (即 $\mathbf{v}=0$) 可压缩流体，此时的 Euler-Poisson 方程组为

$$\begin{cases}\nabla P(\rho)=-\rho\nabla\Phi,\\ \Delta\Phi=4\pi\rho.\end{cases} \tag{14}$$

对于状态函数为

$$P(\rho)=\rho^{\gamma}e^{S} \tag{15}$$

的可压缩流体 ($S=S(x)$ 是给定的函数), 他们证明了：当 $\frac{6}{5}<\gamma<2$ 时， (14)–(15) 存在非平凡解，而当 $1<\gamma\leq\frac{6}{5}$ 时， (14)–(15) 在星形区域上不存在正解. 当然这里还需要一些对函数 S 的限制，详情见 [11]. 另外， [11] 中还考虑了这些非旋转稳态解的唯一性和稳定性.

• 2004 年， Luo 和 Smoller[28] 在 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域上，讨论了状态函数为 (15) 的非等熵流体径向解的存在性. 当角速度为常数并且区域为球时，建立了解的存在性和非存在性，这与 γ 的取值有关. 另外，对于一般的有界区域和给定的变角速度，得到 S 为常数的等熵流体的存在性结果；而对于 $S=S(x)$ 的非等熵流体，当 S 满足一定的条件时，方程组不存在非平凡解.

• 2008 年， Deng, Gao 和 Xiang[10] 将 [11] 的结果推广到了 $\mathbb{R}^n(n$ 为奇数) 中的有界区域，得到了 (14)–(15) 径向对称解的存在性和非存在性，同样，这与 γ 的取值有关.

2.2 不可压缩 Navier-Stokes 方程解的稳定性

解决了方程组 (2) 的旋转星解的存在性之后，人们更加希望了解旋转星解的稳定性. 下面，介绍一类与 (2) 密切相关的不可压缩 Navier-Stokes 方程自由边界问题解的稳定性理论. 在全空间 $\mathbb{R}^n(n=2,3)$ 上，不可压缩 Navier-Stokes 方程为

$$\begin{cases}\mathbf{v}_t+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}-\mu\nabla^2\mathbf{v}+\nabla P=\mathbf{f}, & \mathbb{R}^n\times(0,+\infty),\\ \nabla\cdot\mathbf{v}=0, & \mathbb{R}^n\times(0,+\infty),\\ \mathbf{v}(x,t)=\mathbf{v}_0(x), & \mathbb{R}^n.\end{cases} \tag{16}$$

当 (2) 中流体的密度 $\rho\equiv 1$ 时， (2) 中第一个方程将变为 $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$, 即流体是不可压缩的； (2) 中的第二个方程对应于 Navier-Stokes 方程 (16) 中的第一个方程粘性系数 $\mu=0$ 和外力 $\mathbf{f}=0$ 的情形. 所以，前面研究的 Euler-Poisson 方程组 (2) 是一个非粘性的可压缩自重力流体系统.

最近，俄罗斯数学家 Solonnikov 系统地研究了，当外力 $\mathbf{f}=0$ 时，不可压缩 Navier-Stokes 方程的自由边界问题，也称作自重力旋转流体的自由边值问题. 即：证明存在有界区域 $\Omega_t\subset\mathbb{R}^3$, 向量值函数 $\mathbf{v}(x,t)=(v_1,v_2,v_3)$ 和实值函数 $P(x,t)$ 满足

$$\begin{cases}\mathbf{v}_t+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}-\mu\nabla^2\mathbf{v}+\nabla P=0, \quad \nabla\cdot\mathbf{v}=0, & \Omega_t,\\ \mathbf{v}(x,t)=\mathbf{v}_0(x), & \Omega_0,\\ T(\mathbf{v},p)n=gU(x,t)\mathbf{n}, \quad V_n=\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}, & \Gamma_t,\end{cases} \tag{17}$$

其中 g 是引力常数， Γ_t 表示 Ω_t 的空间边界， $\mathbf{n}(x)$ 是自由曲面 Γ_t 的外法向， $U=\int_{\Omega_t}\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|}$ 是 Newton 位势， $T(v,p)$ 是弹力张量. 对于绕 z 轴旋转的不可压缩流体，其所受压力 P 可以表示为

$$P(x)=\frac{\omega^2}{2}(x_1^2+x_2^2)+P_0,$$

其中 P_0 为常数. 此时流体的边界条件可以由如下方程表示:

$$\sigma H+P+\kappa U=0, \tag{18}$$

其中 H 表示边界的平均曲率的两倍. 通过方程 (18) 来确定流体的边界，进而得出流体的形状变化. 而方程 (18) 是下列能量泛函

$$G=\sigma|\partial\Omega|-\frac{\omega^2}{2}\int_\Omega(x_1^2+x_2^2)\mathrm{d}x-\frac{\kappa}{2}\int_\Omega\int_\Omega\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|}-P_0|\Omega|$$

和

$$R=\sigma|\partial\Omega|-\frac{\beta}{2\int_\Omega(x_1^2+x_2^2)\mathrm{d}x}-\frac{\kappa}{2}\int_\Omega\int_\Omega\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|}-P_0|\Omega|$$

的 Euler 方程.

• 2004 年， Solonnikov[34] 证明了 Navier-Stokes 方程 (17) 非静态自由边值问题的可解性.

• 2005 年， Solonnikov[35] 证明了当能量泛函的 2 阶变分严格大于 0 时，粘性不可压缩流体的轴对称平衡结构是稳定的；当能量泛函的 2 阶变分可以取负值时，一致旋转粘性不可压缩流体的非轴对称平衡结构是不稳定的 [36].

• 2006 年， Solonnikov[37] 证明了当能量泛函的 2 阶变分小于 0 时，一致旋转粘性不可压缩流体的轴对称平衡结构是不稳定的；在不考虑曲面张力的情况下， Solonnikov[38] 证明了当能量泛函的 2 阶变分可以取负值时，一致旋转粘性不可压缩流体的轴对称平衡结构也是不稳定的.

另外，对于带有自由曲面边界的不可压缩和可压缩流体的研究也可以参考 [9, 25–26]. 而对于外力 $\mathbf{f}\neq 0$ 的更广义的 Newton 流体的研究可参考 [12–14].

2.3 Navier-Stokes 方程解的正则性

本文的最后，我们简单介绍一下 Navier-Stokes 方程解的正则性问题. 对于方程组 (17) 而言，从物理上讲，我们希望当 $|x|\to\infty$ 时， $\mathbf{v}$ 不要变得太大. 因此，需要外力 $\mathbf{f}$ 和初值 $\mathbf{v}_0$ 满足一定的限制条件. 而在分析中一个很基本的问题就是：在一定限制条件下，证明三维 Navier-Stokes 方程 (16) 是否存在具有物理意义的光滑解. 这正是美国克雷 (Clay) 数学研究所在 2000 年选定的 7 个 "千禧年大奖问题" 中的 Navier-Stokes 方程问题. 该问题对于 $\mu=0$ 对应的 Euler 方程同样是公开的，也是非常重要的.

二维 Navier-Stokes 方程解的存在性和光滑性早已得到解决，但是这对三维全空间上 Navier-Stokes 方程的研究并没有任何帮助. 关于三维全空间 Navier-Stokes 方程弱解正则性的最经典结果是由 Scheffer[32], Caffarelli-Kohn-Nirenberg[5], Lin[24] 从几何测度论的角度出发得到的. 他们证明了解的奇点集不能包含 $\{(x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\mid x=\phi(t)\}$ 形式的时空曲线. He[19] 将 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 的结果推广到了更一般的弱解. 到目前为止，关于 Navier-Stokes 解的正则性问题已有大量的成果与文献，我们在此无法一一列出. 为了说明方程组 (2) 与 Navier-Stokes 方程之间的关系，本文仅列出与可压缩旋转星密切相关的一小部分文献.

3 展望

由以上介绍可以看出，可压缩旋转星的存在性和不可压缩 Navier-Stokes 方程解的稳定性都已基本建立. 接下来, 考虑带曲面张力的可压缩流体的稳定性问题或许会对旋转星解稳定性问题的解决能有所帮助. 另外，前面介绍的旋转星解都是非粘性 Euler 方程的解，而在物理上，粘性是一种十分普遍的现象, 所以考虑带粘性的旋转星系统的稳态解的存在性与稳定性, 将会更加有意义，也更加地具有挑战性.

参考文献

[1] Auchmuty, J.F.G. and Beals, R., Variational solutions of some nonlinear free boundary problems, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1971, 43(4): 255-271.

[2] Auchmuty, J.F.G. and Beals, R., Models of rotating stars, *Astrophysical J.*, 1971, 165: 79-82.

[3] Chandrasekhar, S., An Introduction to the Stellar Structure, Chicago: University of Chicago Press, 1939.

[4] Chandrasekhar, S., Ellipsoidal Figures of Equilibrium, New York: Dover, 1987.

[5] Caffarelli, L.A., Kohn, R. and Nirenberg, L., Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1982, 35(6): 771-831.

[6] Caffarelli, L.A. and Friedman, A., The shape of axisymmetric rotating fluid, *J. Funct. Anal.*, 1980, 35(1): 109-142.

[7] Chanillo, S. and Li Y.Y., On diameters of uniformly rotating stars, *Comm. Math. Phys.*, 1994, 166(2): 417-430.

[8] Chanillo, S. and Weiss, G.S., A remark on the geometry of uniformly rotating stars, *J. Diff. Equ.*, 2012, 253(2): 553-562.

[9] Coutand, D., Lindblad, H. and Shkoller, S., A priori estimates for the free-boundary 3D compressible Euler equations in physical vacuum, *Comm. Math. Phys.*, 2010, 296(2): 559-587.

[10] Deng Y.B., Gao Y. and Xiang J.L., Solutions of Euler-Poisson equations in $\mathbb{R}^n$, *Acta Math. Sci., Ser. B*, 2008, 28(1): 24-42.

[11] Deng Y.B., Liu T.P., Yang T. and Yao Z.A., Solutions of Euler-Poisson equations for gaseous stars, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2002, 164(3): 261-285.

[12] Frehse, J. and Ružička, M., Non-homogeneous generalized Newtonian fluids, *Math. Z.*, 2008, 260(2): 355-375.

[13] Frehse, J., Steinhauer, M. and Weigant, W., The Dirichlet problem for viscous compressible isothermal Navier-Stokes equations in two dimensions, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2010, 198(1): 1-12.

[14] Frehse, J., Steinhauer, M. and Weigant, W., On stationary solutions for 2-D viscous compressible isothermal Navier-Stokes equations, *J. Math. Fluid Mech.*, 2011, 13(1): 55-63.

[15] Friedman, A. and Turkington, B., Asymptotic estimates for an axisymmetric rotating fluid, *J. Funct. Anal.*, 1980, 37(2): 136-163.

[16] Friedman, A. and Turkington, B., The oblateness of an axisymmetric rotating fluid, *Indiana Univ. Math. J.*, 1980, 29(5): 777-792.

[17] Friedman, A. and Turkington, B., Existence and dimensions of a rotating white dwarf, *J. Diff. Equ.*, 1981, 42(3): 414-437.

[18] Greenberg, J.L., The Problem of the Earth's Shape From Newton to Clairaut, Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[19] He C., On partial regularity for weak solutions to the Navier-Stokes equations, *J. Funct. Anal.*, 2004, 211(1): 153-162.

[20] Li H.G. and Bao J.G., Existence of rotating stars with prescribed angular velocity law, *Houston J. Math.*, 2011, 37(1): 297-309.

[21] Li H.G. and Bao J.G., Euler-Poisson equations related to general compressible rotating fluids, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2011, 29(3): 1085-1096.

[22] Li Y.Y., On uniformly rotating stars, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1991, 115(4): 367-393.

[23] Lieb, E.H. and Yau, H.T., The Chandrasekhar theory of stellar collapse as the limit of quantum mechanics, *Comm. Math. Phys.*, 1987, 112(1): 147-174.

[24] Lin F.H., A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1998, 51(3): 241-257.

[25] Lindblad, H., Well-posedness for the linearized motion of a compressible liquid with free surface boundary, *Comm. Math. Phys.*, 2003, 236(2): 281-310.

[26] Lindblad, H. and Nordgren, K.H., A priori estimates for the motion of a self-gravitating incompressible liquid with free surface boundary, *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2009, 6(2): 407-432.

[27] Lions, P.L., The concentration-compactness principle in the calculus of variation, the locally compact case, part I, *Ann. I. H. Anal. Nonli.*, 1984, 1: 109-145.

[28] Luo T. and Smoller, J., Rotating fluids with self-gravitation in bounded domains, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2004, 173(3): 345-377.

[29] Luo T. and Smoller, J., Nonlinear dynamical stability of Newtonian rotating white dwarfs and supermassive stars, *Comm. Math. Phys.*, 2008, 284(2): 425-457.

[30] Luo T. and Smoller, J., Existence and nonlinear stability of rotating star solutions of the compressible Euler-Poisson equations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2009, 191(3): 447-496.

[31] McCann, R.J., Stable rotating binary stars and fluid in a tube, *Houston J. Math.*, 2006, 32(2): 603-631.

[32] Scheffer, V., Turbulence and Hausdorff dimension, In: Turbulence and the Navier-Stokes Equations(Temam, R. ed.), Lecture Notes in Math., Vol. 565, Berlin: Springer-Verlag, 1976, 94-112.

[33] Shapiro, S.H. and Teukolsky, S.A., Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars, New York: Wiley-VCH, 1983.

[34] Solonnikov, V.A., The problem on evolution of a self-gravitating isolated fluid mass that is not subject to the surface tension forces, *J. Math. Sci.*, 2004, 122(3): 3310-3330.

[35] Solonnikov, V.A., On the stability of axially symmetric equilibrium figures of a rotating viscous incompressible fluid, *St. Petersburg Math. J.*, 2005, 16(2): 377-400.

[36] Solonnikov, V.A., On instability of equilibrium figures of rotating viscous incompressible liquid, *J. Math. Sci.*, 2005, 128(5): 3241-3262.

[37] Solonnikov, V.A., Instability of axially symmetric equilibrium figures of rotating viscous incompressible liquid, *J. Math. Sci.*, 2006, 136(2): 3812-3825.

[38] Solonnikov, V.A., On instability of equilibrium figures of rotating viscous incompressible self-gravitating liquid not subjected to capillary forces, *J. Math. Sci.*, 2006, 139(1): 6338-6350.

[39] Tassoul, J.L., Theory of Rotating Stars, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1978.

[40] Weinberg, S., Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, New York: John Wiley and Sons, 1972.

Existence and Stability Theory on Compressible Rotating Stars

LI Haigang, BAO Jiguang

(*1. School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing, 100875, P. R. China; 2. Laboratory of Mathematics and Complex Systems, Ministry of Education, Beijing, 100875, P. R. China*)

Abstract: Rotation is an universal phenomenon. Since the time of Newton, many distinguished mathematicians and physical scientists such as Maclaurin, Clairaut, Liouville, Lyapunov and Poincaré have made great contributions on the theory of rotating stars. A classical problem is to investigate the existence and stability of self-gravitating rotating fluids in a relative equilibrium. In this note we survey some historical and recent results on rotating stars, and mention some unsolved problems on this subject.

Key words: compressible fluid; rotating star; existence; stability