北京师范大学 2017 ～ 2018 学年第一学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：　偏微分方程　　　　任课老师姓名：　保继光

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ☒　开卷 ☐　其他 ☐

院（系）：＿＿＿＿＿＿　　专业：＿＿＿＿＿＿　　年级：＿＿＿＿＿＿

姓名：＿＿＿＿＿＿　　学号：＿＿＿＿＿＿

题　号	一	二	三 (1)	三 (2)	三 (3)	四 (1)	四 (2)	总　分
得　分								

阅卷老师（签字）：＿＿＿＿＿＿

一. 填空题 (22 分):

17 世纪以来, 偏微分方程不仅促进了数学学科的进步, 也推动了科学、技术、工程、社会的发展. 偏微分方程主要来源于几何学与 (1) , 也在生物数学与 (2) 等领域大量出现. 本课程学习了 (两个自变量的) 二阶线性偏微分方程和一阶非线性偏微分方程.

在二阶方程方面, 除了学习线性方程的化简与分类外, 主要研究了位势方程边值问题, 热传导方程、波动方程初边值问题和 Cauchy 问题解的 (3) . 极值原理基于 (4) , 能量积分基于 (5) , 它们都是研究解 (6) 和 (7) 的有效手段. 解的存在性大部分是通过寻求形式解来完成的, Green 函数法、Fourier 变换法、行波法、球面平均法和 (8) 等都是求解这些定解问题的重要方法, 而 (9) 却是一个证明 Laplace 方程 Dirichlet 问题解存在性的非构造性方法.

在一阶方程方面, 证明了 Cauchy-Kovalevskaya 定理, 其地位相应于常微分方程中 $y' = f(x, y)$ 初值问题幂级数解的 (10) ; 介绍了 (11) 方法, 用来具体求解一阶方程的 Cauchy 问题.

二. 简答题 (22 分):

1. 分别具体写出一个有意义的二阶拟线性方程和一个有意义的线性双曲型方程.

2. 写出三维 Laplace 方程的基本解和它的导函数, 以及上半空间的 Green 函数.

3. 特征值问题 $X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < 1, X(0) = X(1) = 0$ 的解是什么？.

4. 你做过作业中的选做题吗? 你看过有关偏微分方程的课外书吗? 试举一例.

三. 计算题 (36 **分**):

1. 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xy} + u_y = 0, & x > 0,\ y > 0, \\ u(x,0) = x^2, & x \geq 0, \\ u(0,y) = y^2, & y \geq 0. \end{cases}$$

2. 求解 Cauchy 问题

$$\begin{cases} (x^2+1)u_x + u_y = 0, \\ u(0,y) = y^2. \end{cases}$$

3. 通过 Fourier 变换, 求出 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x + u, & -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

的形式解.

四. 证明题 (20 **分**):

1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域, $T > 0$, $Q_T = \Omega \times (0,T]$, u 是

$$\begin{cases} u_t - \triangle u + u = f(x,t), & (x,t) \in\ Q_T, \\ u = 0, & (x,t) \in\ \partial_p Q_T \end{cases}$$

的光滑解, 证明

$$\max_{\overline{Q_T}} |u| \leq \max_{\overline{Q_T}} |f|.$$

2. 证明波动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = \triangle u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & x \in \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + u_t = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0 \end{cases}$$

只有零古典解, 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界光滑区域, ν 是边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.