从Laplace方程说起

-----偏微分方程方向简介

保继光

http://math0.bnu.edu.cn/~jgbao/

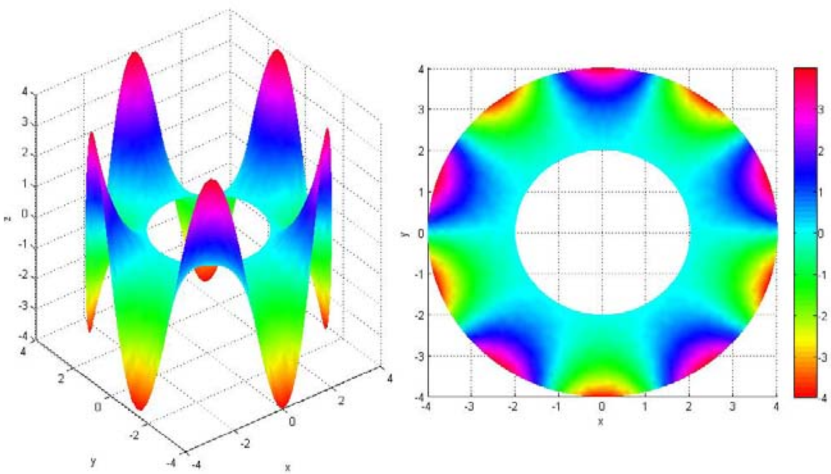
北京師範大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

研究方向

□ Laplace方程

$$\Delta u := \sum_{n=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

是最简单、最典型的线性偏微分方程，其解称为调和函数.



Pierre-Simon Laplace
（1749 – 1827）

研究方向

- Liouville性质（1844）

  全空间上的半有界的解都是常数.

- 推论

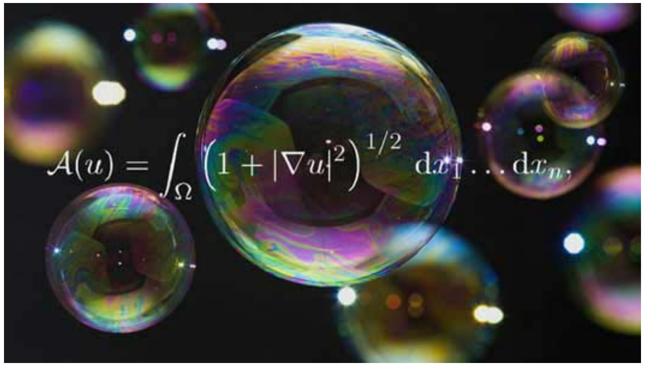
  全空间上Δu=1的凸解都是二次多项式.

Joseph Liouville
（1809-1882）

研究方向

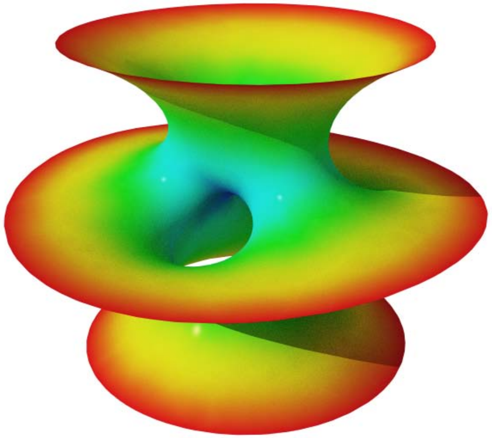
☐ 曲率问题

➢ 极小曲面方程



$$(1+u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_y^2)u_{xx} = 0$$

影响人类文明的美丽方程式（当Du小的时候，近似于Laplace方程）



研究方向

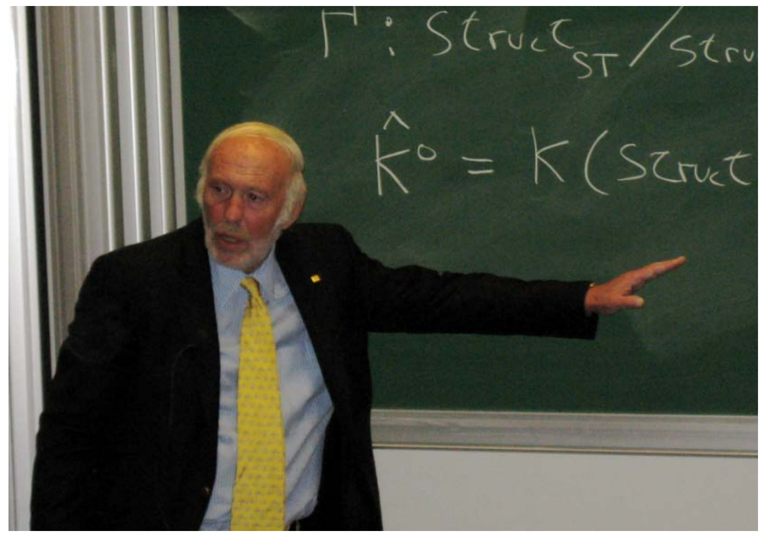
Bernstein定理（1915）：全平面上的解只有一次多项式;

Almgren（1966）：3维空间中的解也只有一次多项式;

Simons（1967）：小于等于7维空间中的解都是一次多项式.

《金融时报 Financial Times》：地球上最聪明的亿万富翁（年净赚15亿美元）

Sergei Bernstein
（1880-1968）



James Harris Simons
（1938-）

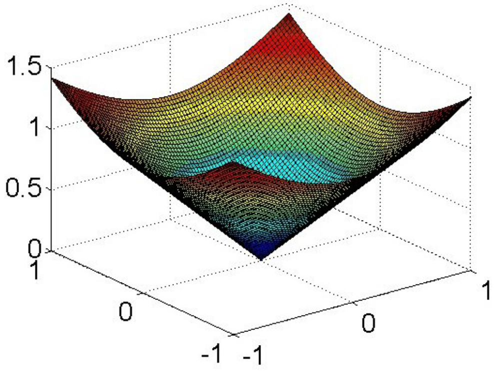
研究方向

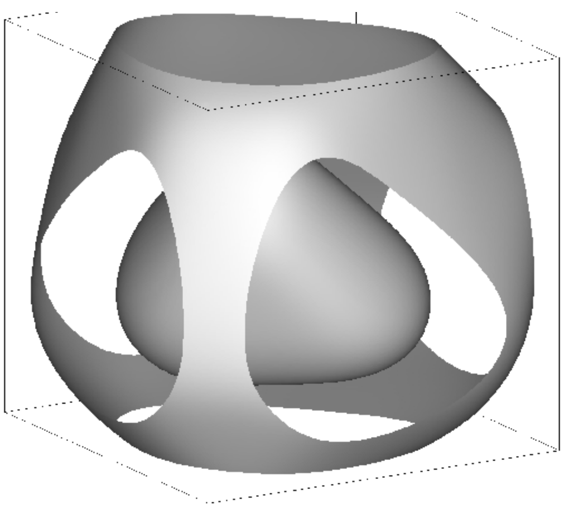
➢ **Monge- Ampère 方程**

$$\det D^2 u = 1$$

Gaspard Monge
(1746-1818)

André-Marie Ampère
(1775-1836)





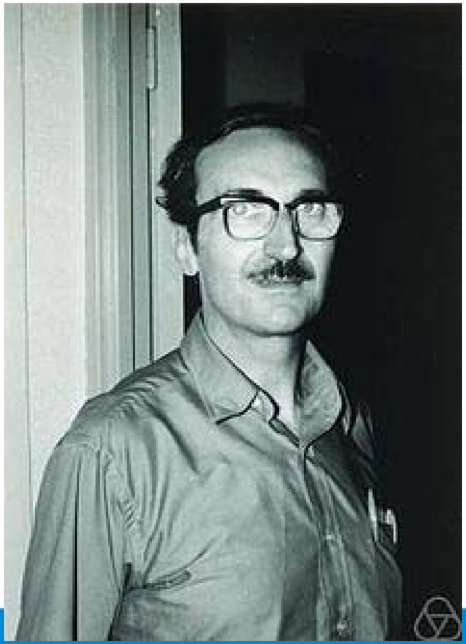
研究方向

Jorgens（1951）：全平面上的解一定是二次多项式.

Calabi（1954)：当n小于等于5时，全空间上的凸解一定是二次多项式.

Pogerolov（1972)：对任何维数，全空间上的凸解一定是二次多项式.

Konrad Jörgens
(1926–1974)



Eugenio Calabi
(1923-)

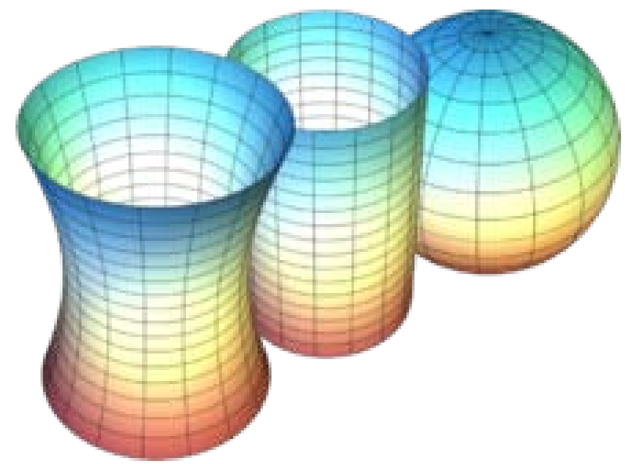
Aleksei Pogorelov
(1919 – 2002)

北京師範大學 BEIJING NORMAL UNIVERSITY

研究方向

- 预定Gauss曲率问题

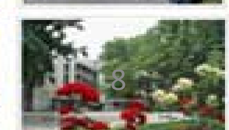
$$\det D^2 u - K(\mathbf{x})(1 + |Du|^2)^{(n+2)/2} = 0.$$



Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

K(x) = -1,0,1的曲面

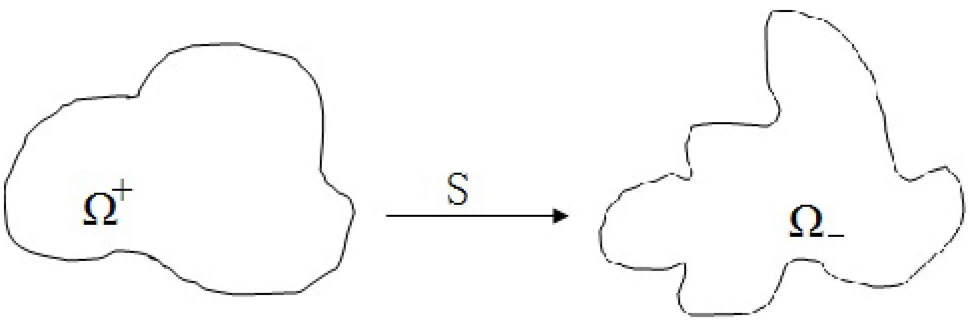


研究方向

- Monge-Kantorovich最优运输问题（堆沙问题）

$$\det D^2\phi(x) = \frac{f(x)}{g(S(x))}$$



图像匹配问题（Brenier，1957-）

Leonid Kantorovich
(1912-1986)
1975年获诺贝尔奖

研究方向

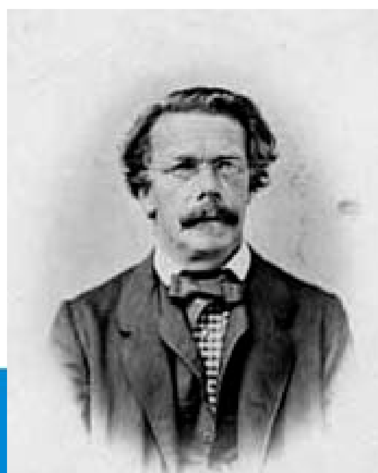
- Hessian方程

$$\sigma_k(\lambda(D^2u)) = 1$$

其中λ是u的Hessian矩阵的特征根，是λ的k次初等多项式

$$\sigma_k(\lambda) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}$$

当k=1时，它就是Laplace方程；当k=n时，它就是Monge-Ampere方程.



$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Otto Hesse (1811-1874)

研究方向

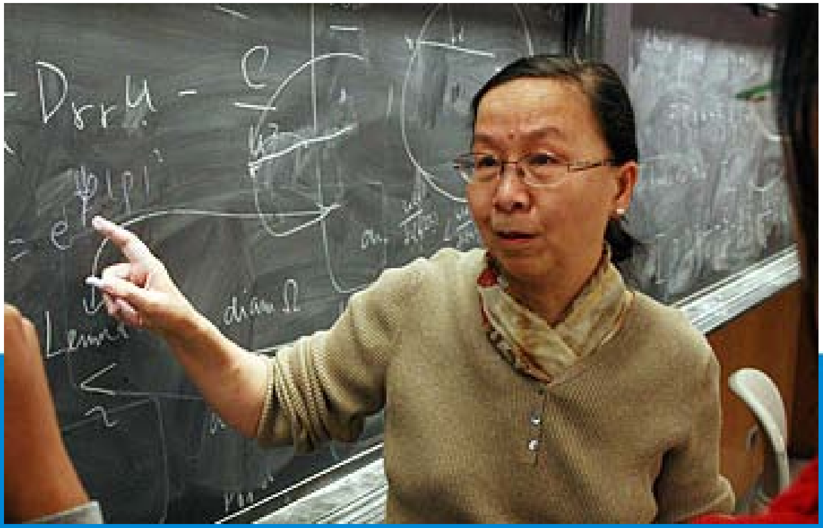
1844年，Liouville证明了k=1时的情形：Δu=1的凸解一定是二次多项式.

2010年，Chang和Yuan证明了k=2时的情形.

2003年，对一般的k，我们获得了部分结果：在某些增长阶条件下，

$$\sigma_k(\lambda(D^2u)) = 1$$

的凸解一定是二次多项式.



Sun-Yung Alice Chang (1948-)

美国科学院院士

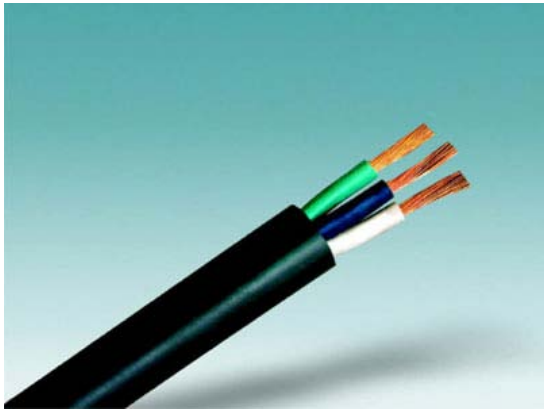
研究方向

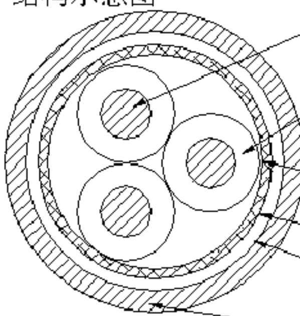
□ 传导问题

Lamé方程的简化形式

$$\mathrm{div}((1+(k-1)\chi(\Omega))\nabla u)=0$$

k=1是就是Laplace方程.





Gabriel Lamé
（1795-1870）

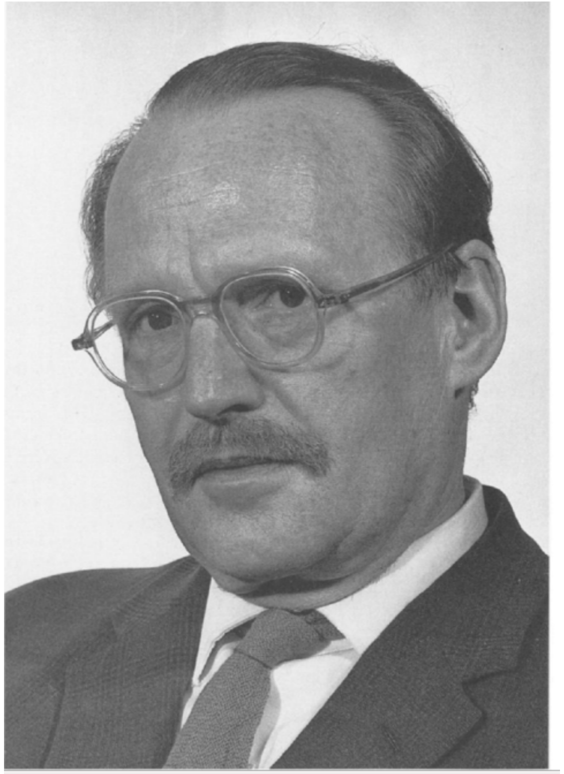
研究方向

- Eshelby猜想(1957)

$$\begin{cases} \operatorname{div}((1+(k-1)\chi(\Omega))\nabla u)=0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ u(x)-a\cdot x=O(|x|^{1-n}) & \text{as } |x|\to\infty, \end{cases}$$

Poisson(1826)：若Ω是一个椭球，则对任何的向量a，解在Ω中都是线性的；

反过来，若对任何的向量a，解在Ω中都是线性的，问： Ω是一个椭球吗？



John Douglas Eshelby
(1916-1981)

研究方向

强 Eshelby 猜想 (Ru-Schiavone; 1996)

当 n = 2 时，若对某个a，解在Ω中都是线性的，则Ω是一个椭圆.

弱 Eshelby 猜想 (Kang-Milton; 2008)

当 n = 3 时，若对任何的a，解在Ω中都是线性的，则Ω是一个椭球.

2014年，我们在 k=0（绝缘）和 k=∞（超导）的情形，获得了Eshelby 猜想.

一个有用的引理(Dive, 1931; Nikliborc, 1932)

$$\int_{\Omega} \Gamma(x-y)dy = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2 + C, \quad x \in \Omega,$$

其中Γ是Laplace算子的基本解.




研究团队

北京师范大学的偏微分方程简史

- 蒋硕民(1913-1992)是我国偏微分方程学科的先行者.

  1935年在德国获博士学位(导师是大数学家库朗、雷立奇).

  博士论文：一个关于两个变量n阶偏微分方程的混合边值问题.

  1935年任南开大学数学系教授.

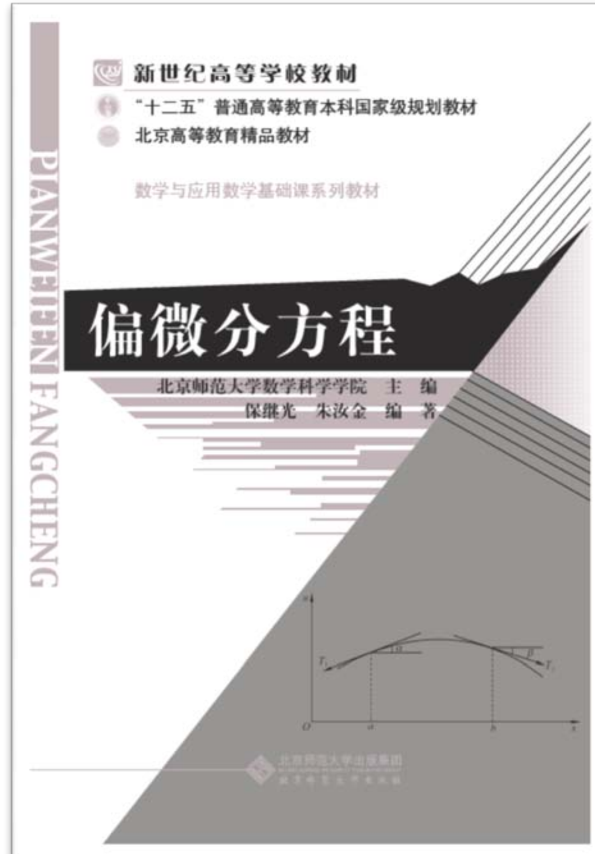
  1948年在昆明师范学院接任杨武之(杨振宁的父亲，北京师范大学1919届毕业生)的数学系主任，解放后任教务长兼系主任.

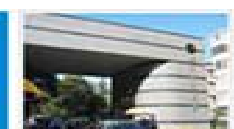
  1954年调至北京师范大学任二级教授.

北京师范大学 BEIJING NORMAL UNIVERSITY

研究团队

- 1959年北京师范大学偏微分方程教研室成立.
- 文化大革命以后，周美珂和朱汝金分别被派遣到罗马尼亚和美国留学进修，开始对偏微分方程现代方法的学习和研究.
- 李艾青、洪吉昌、洪良辰等在偏微分方程的教学和科研上做了大量的工作.
- 1985年开始招收硕士生.
- 上世纪90年代，郇中丹（威斯康辛大学）、黄海洋（北京师范大学）、保继光（北京大学）先后博士毕业，加入到偏微分方程的教学和科研中去.
- 2002年开始招收偏微分方程方向博士生.






北京師範大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

研究团队

- 国际数学家大会45分钟报告人、美国Rutgers大学资深教授李岩岩成为教育部长江学者讲座教授（2004），国家千人计划入选者（2012）.
- 2005年，H. Brezis教授被聘为名誉教授. 他是美国Rutgers大学教授，法国科学院院士、欧洲科学院院士、美国科学院外籍院士、罗马尼亚科学院外籍院士、西班牙科学院外籍院士、比利时科学院外籍院士.
- 新世纪以来，唐仲伟、李海刚、熊金钢等一批70后和80后的教师来院工作.

研究团队

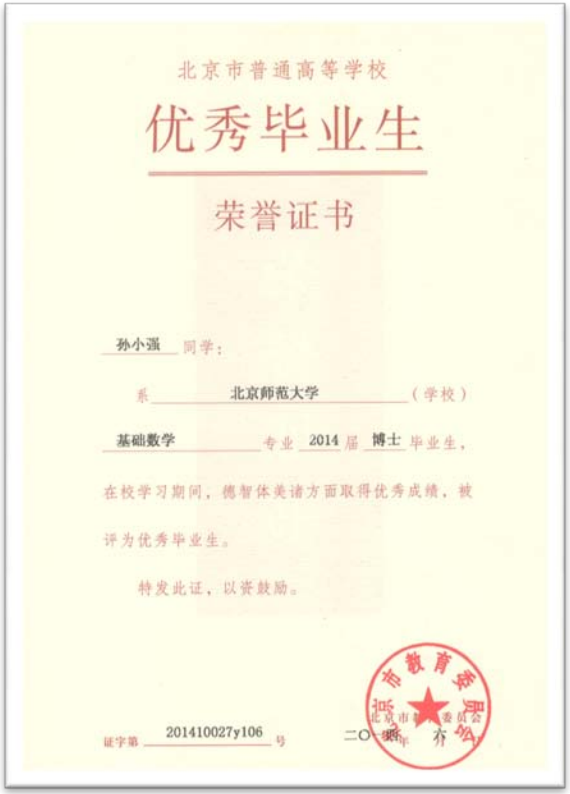
每月给你
$2000

研究生：

- 已毕业研究生24人次（7名博士生和17名硕士生）
- 3名博士生到美国Rutgers大学联合培养2年
- 2名博士生到美国Cornell大学联合培养2年
- 1名博/硕士生到美国Wake Forest大学联合培养2年

北京師範大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

研究团队


北京市普通高等学校

优秀毕业生

荣誉证书

孙小强 同学：

系 北京师范大学 （学校）

基础数学 专业 2014 届 博士 毕业生，

在校学习期间，德智体美诸方面取得优秀成绩，被评为优秀毕业生。

特发此证，以资鼓励。

北京市教育委员会

证字第 201410027y106 号


荣誉证书

保继光教授：

您指导的熊金钢的博士学位论文《分数阶的 Nirenberg 问题》获得 2013 年北京市优秀博士学位论文。

北京市教育委员会　北京市学位委员会

编号：D201329　二零一三年八月

国家奖学金

- 张伟（2012）
- 曹絮（2013）
- 王宠（2014）
- 王博（2015）

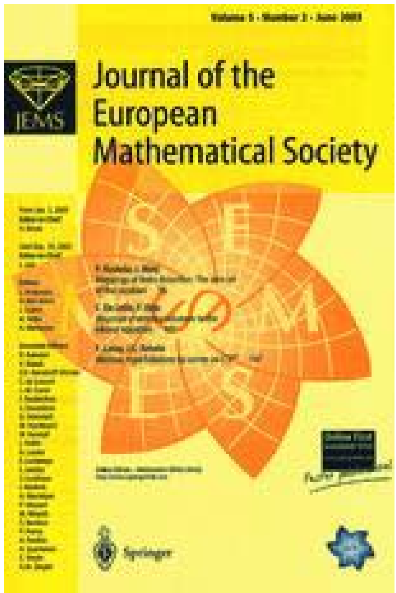


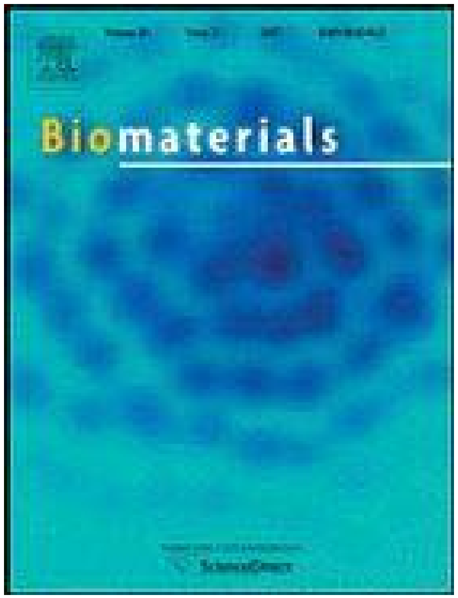

北京師範大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

研究团队

研究方向：

- ➢ 几何偏微分方程；
- ➢ 材料偏微分方程；
- ➢ 生物偏微分方程；
- ➢ 金融偏微分方程。








北京师范大学
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

研究团队

毕业生：

- 有的到国外（如：美国Wake Forest大学、加拿大宏利金融集团） 工作，
- 有的去国内高校（如：北京大学、复旦大学） 做博士后，
- 有的在国内（如：北京大学、北京师范大学）读博士，
- 有的在大学（如：中山大学、北京师范大学）或中学（如：北师大二附中）任教，
- 有的在公司（如：国泰君安证券股份有限公司）工作.

Caffarelli院士参加答辩

北京师范大学

欢迎各位同学报考！

国际的育人环境
强大的偏微团队　将助你成功！
充足的培养经费

北京师范大学
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

□ 招收数学教育硕士生：

课标研制，教材编写，测试设计

教育部高中课程标准修订组成员

教育部高中数学学科测试组核心成员

中国大学先修课程试点项目数学专家委员会委员

中国少数民族数学教育专业委员会副理事长

北京数学教育中心学术委员会委员

《数学通报》主编

高中数学教科书（北师大版）副主编