北京师范大学 2016 ∼ 2017 学年第一学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称： 偏微分方程　　　　**任课老师姓名：** 保继光

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院（系）：________　　专业：________　　年级：________

姓名：________　　学号：________

题号	一	二	三(1)	三(2)	四	总分
得分						

阅卷老师（签字）：________

一. 填空题(30分):

偏微分方程起源于 (1) 世纪. 从历史上看, 偏微分方程的重要源泉是 (2) 与 (3) . 上世纪末以来, 偏微分方程又在备受关注的生物数学、金融数学与图像处理等领域大量出现, 在很大程度上推动了科学、技术、工程、社会的进步. G.Perelman 证明 (4) 和A.Einstein预言 (5) 就是应用偏微分方程的著名例子.

以各种现实情境和科学情境为背景的偏微分方程是形式多样的. 我们根据阶数和线性性将它们分类. 如: 几何分析中的Yamabe方程$-\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}}$ $(n \geq 3)$是 (6) 阶 (7) 线性方程; 图像处理中的膨胀方程$u_t = \sup\{y \cdot Du(x,t) \mid y \in \mathbb{R}^n, |y| \leq 1\}$是 (8) 阶 (9) 线性方程.

我们主要研究了位势方程边值问题, 热传导方程、波动方程初边值问题和Cauchy问题解的适定性, 即解的 (10) 、 (11) 和 (12) . Green函数法、行波法、球面平均法、积分变换法和 (13) 等都是求解这些定解问题的重要方法; (14) 或 (15) 是研究解唯一性和稳定性的有效手段.

二. **简答题**(30**分**):

1. 为什么说位势方程、热传导方程、弦振动方程是分别是椭圆型、抛物型、双曲型方程最简单、最典型的代表？

2. 写出二维Laplace方程的基本解和它的导函数, 以及上半平面的Green函数.

3. 写出一个初边值问题的Duhamel(齐次化)原理.

4. 设a是常数, $f(x,t)$, $\varphi(x)$是已知函数, 请写出非齐次热传导方程Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

关于x进行Fourier变换后的常微分方程初值问题.

5. 在Laplace方程Dirichlet问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0,\ -1 < x < 1,\ -1 < y < 1, \\ u(x,\pm 1) = 0,\ -1 \le x \le 1, \\ u(1,y) = \varphi(y),\ u(-1,y) = 0,\ \ -1 \le y \le 1 \end{cases}$$

中, 当解u属于$C^2([-1,1]\times[-1,1])$时, 边值$\varphi(y)$必须满足什么条件?

三. 计算题(26**分**):

1. 化简二阶线性偏微分方程$xu_{xx} - x^3 u_{yy} - u_x = 0$, 并求出它的通解.

2. 求以下初边值问题的形式解:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u, \quad 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0, \\ u(x,0) = \sin x, u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

四. 证明题(14**分**):

1. 已知 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, 并且 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ 在Ω中满足$\Delta u \ge 0$, 证明:

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

2. 设$x_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 > 0$, a是一个正常数, $u(x,t)$在平面三角形区域$C = \{(x,t) \mid |x - x_0| \le a(t_0 - t), t \ge 0\}$中满足弦振动方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}.$$

证明: 若$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$, $|x - x_0| \le at_0$, 则在C上有$u \equiv 0$.