北京师范大学 2015～2016 学年第一学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称： 偏微分方程　　　　**任课老师姓名：** 保继光

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ☒　开卷 ☐　其他 ☐

院（系）：________　　专业：________　　年级：________

姓名：________　　学号：________

题号	一	二	三 (1)	三 (2)	四 (1)	四 (2)	总分
得分							

阅卷老师（签字）：________

一. 填空题 (36 分):

以各种现实情境和科学情境为背景的偏微分方程是形式多样的. 我们可以根据阶数和线性性将它们分类. 如: Monge-Ampère 方程 $\det D^2u = f(x)$ 是 __(1)__ 阶 __(2)__ 线性方程; 极小曲面方程 $(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0$ 是 __(3)__ 阶 __(4)__ 线性方程.

二阶线性方程是学习的重点. 围绕 (初) 边值问题和 Cauchy 问题解的 __(5)__, 即解的存在性、 __(6)__ 和稳定性, 我们主要讨论了 __(7)__ 、热传导方程、 __(8)__, 它们依次是椭圆型、 __(9)__ 型、双曲型方程最简单、最典型的代表. 积分变换法和分离变量法是求解定解问题, 证明这三类方程解存在性的重要方法; 能量积分或极值原理是研究解唯一性和稳定性的有效手段. 特别要注意的是: 热传导方程 __(10)__ 问题的解是不唯一的.

Cauchy-Kovalevskaya 定理给出了一阶偏微分方程初值问题幂级数解的 __(11)__. 我们可以用“特征线织成曲面”的方法求解

$$\begin{cases} u_x = u_y + (y-x)u - e^{xy}, \\ u(0,y) = y. \end{cases}$$

它对应的特征方程组初值问题是 __(12)__.

二. 简答题 (24 **分**):

1. 叙述一阶偏微分方程初值问题

$$\begin{cases} u_t + u_x = f(x,t), & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

的 Duhamel(齐次化) 原理.

2. 写出二维 Laplace 方程和它的基本解, 以及上半平面的 Green 函数.

3. 写出 Rellich 方程 $u_{xxt} + u = f(x,t)$ 关于 x 进行 Fourier 变换后的常微分方程.

4. 具体写出一个 (不是 C^2 的)C^0 下调和函数的实例, 并描述一下 Perron 方法？

三. 计算题 (30 **分**):

1. 化简二阶线性偏微分方程 $u_{xx} = u_{xy}$, 并求出它的通解.

2. 用分离变量法求解热传导方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = t, u(1,t) = 0, \quad t \ge 0, \\ u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

四. 证明题 (10 **分**):

1. 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 > 0$, a 是一个正常数, $u(x,t)$ 在平面三角形区域 $|x - x_0| \le a(t_0 - t)$ 中满足弦振动方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}.$$

证明:

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} \left(u_t^2(x,t) + a^2 u_x^2(x,t) \right) dx$$

关于 t 在 $[0, t_0]$ 上单调不增.

2*. 设单位圆 $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. 若 $u \in C^1(\overline{B_1})$ 满足一阶偏微分方程

$$x u_x + 2y u_y = -u, \quad (x,y) \in \overline{B_1}.$$

试证在 $\overline{B_1}$ 上 $u \equiv 0$.