第一章　第3节

偏微分方程的建模

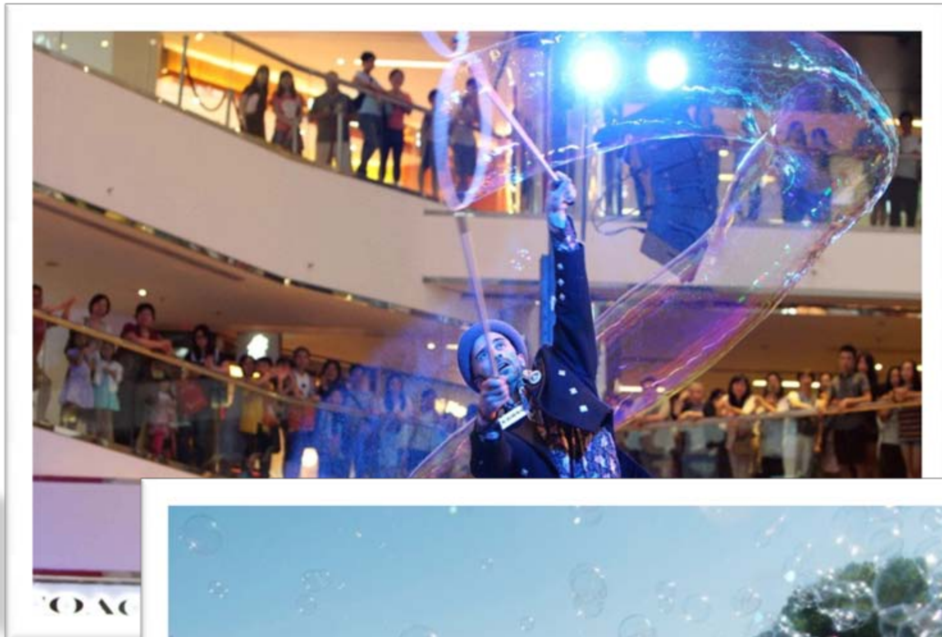
——极小曲面方程的导出

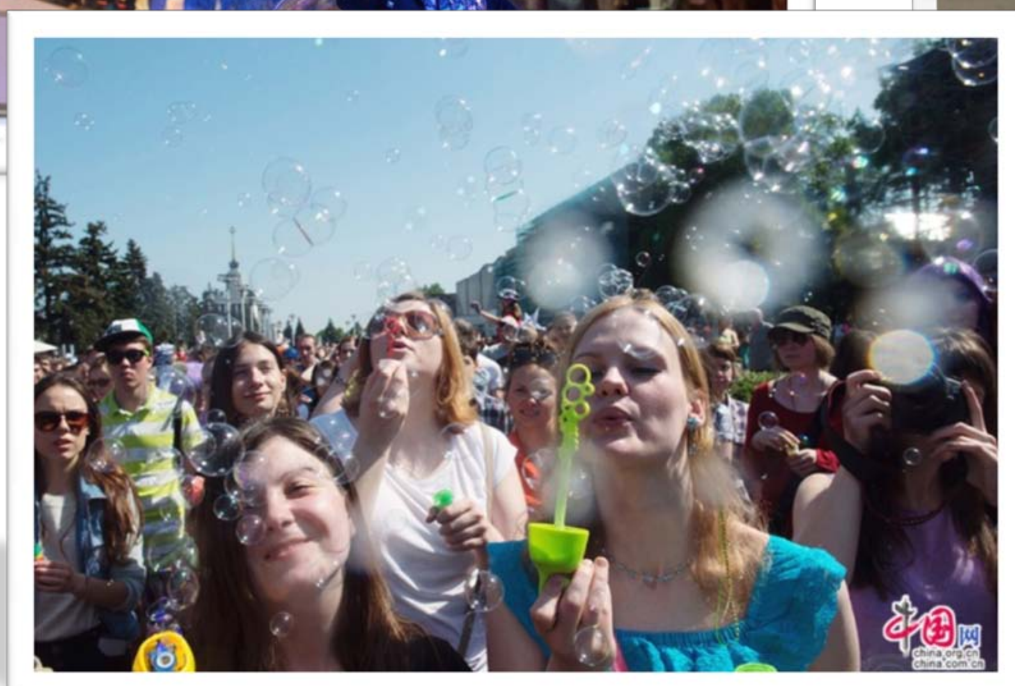
保继光

http://math0.bnu.edu.cn/~jgbao/

北京師範大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

背景介绍——生活中的肥皂泡





北京师范大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

背景介绍——名画中的肥皂泡

夏尔丹（J. Chardin）
《吹肥皂泡的少年》

伦勃朗（R. Rembrandt）
《持肥皂泡的孩子》

背景介绍——十大魅力方程之一

- **2013年， www. livescience. com**

与肥皂泡密切相关的极小曲面方程

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0.$$

- **数学家摩根(F.Morgan)在推荐时指出：这个方程某种程度上解释了人们吹出的肥皂泡的秘密.**

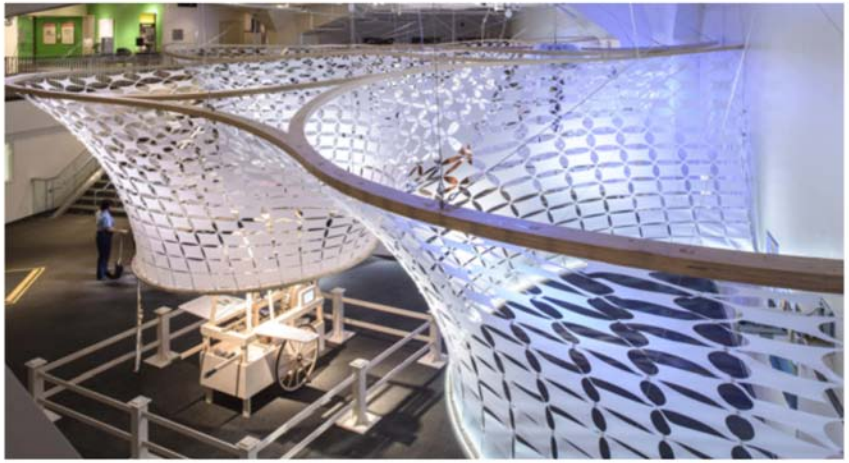
背景介绍——美丽肥皂泡背后的数学

指导本科生在《数学文化》上发表的论文

http://math0.bnu.edu.cn/~jgbao/rencaipeiyang.html

北京师範大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

背景介绍——建筑中的极小曲面



背景介绍——普拉托问题

- 极小曲面问题是1840年由比利时物理学家普拉托(J.Plateau)根据肥皂泡现象提出的：
  对空间中的任何封闭曲线, 是否存在一个以该曲线为边界的极小曲面?

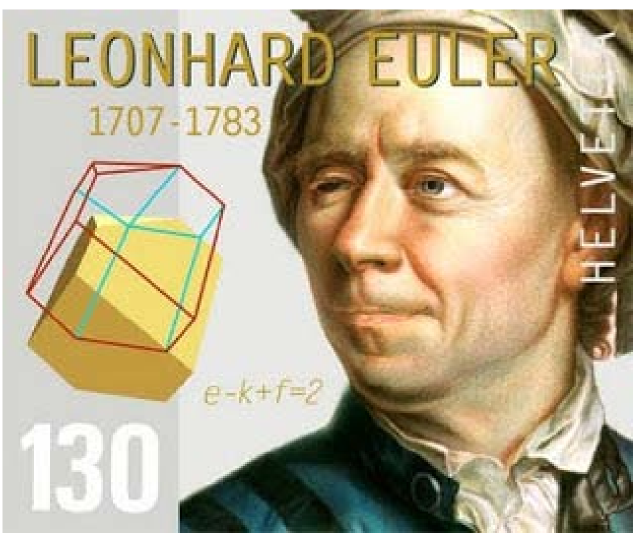
背景介绍——首届菲尔兹奖

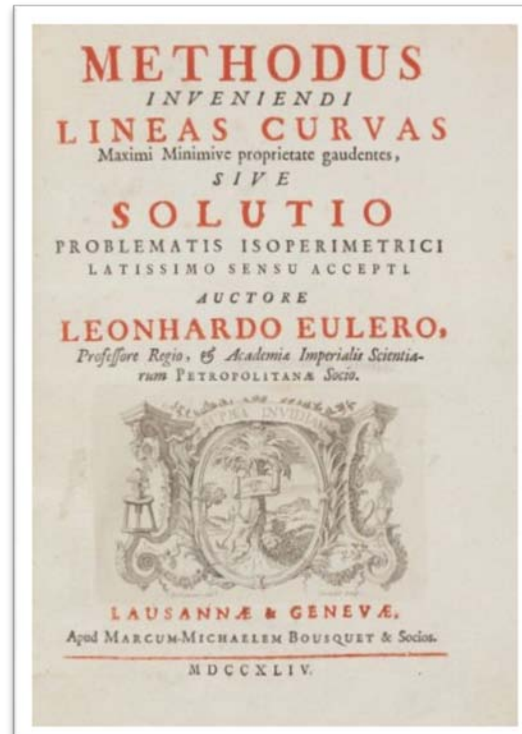
- 1931年,美国数学家道格拉斯(J.Douglas, 1897-1965)完整地解决了普拉托问题, 因此获得了1936年的首届菲尔兹奖(Fields Medal).

背景介绍——变分法的诞生

- 1744年欧拉(L.Euler, 1707-1783)在《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》一书中讨论了特殊的极小曲面.

- 其中的变分方法首次被系统地论述.

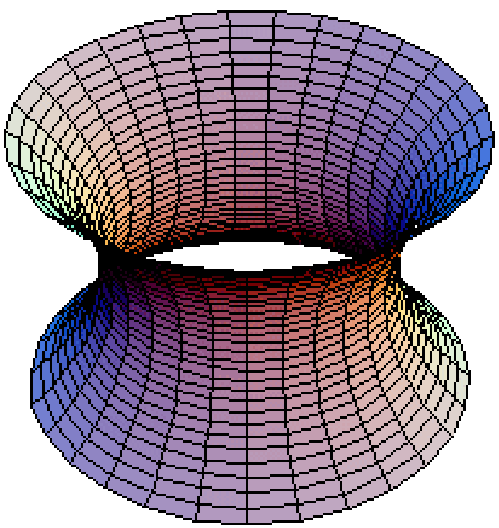



METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLIV.

背景介绍——悬链面

- 欧拉提出了问题：求出在两点之间的平面曲线，使得它在绕一个轴旋转时所产生的曲面面积最小.

- 他证明了，此时的平面曲线必须是一条悬链线，生成的旋转面叫做悬链面.（常微分方程！）



北京师范大学
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

背景介绍——极小曲面方程

- 一般极小曲面的研究,

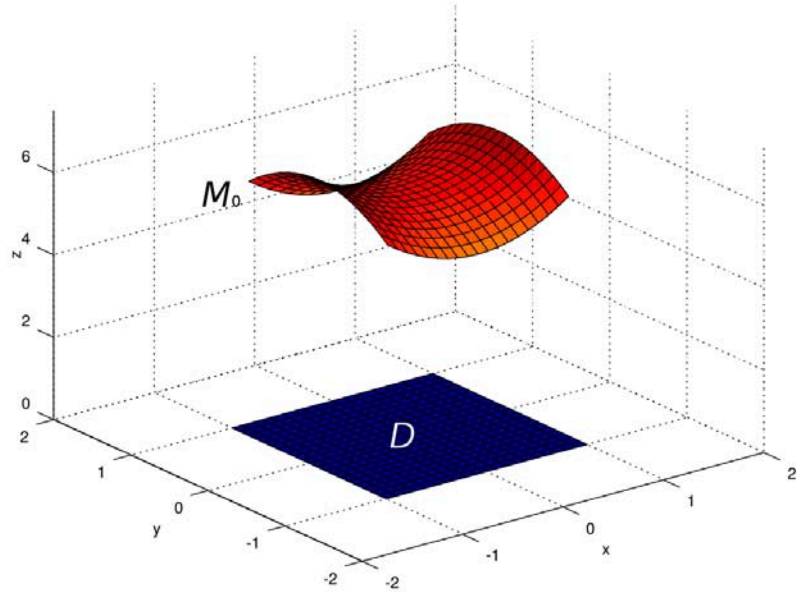
  由拉格朗日 (J. Lagrange)

  从1760年开始；

- 第一次给出了这类曲面所满足的偏微分方程

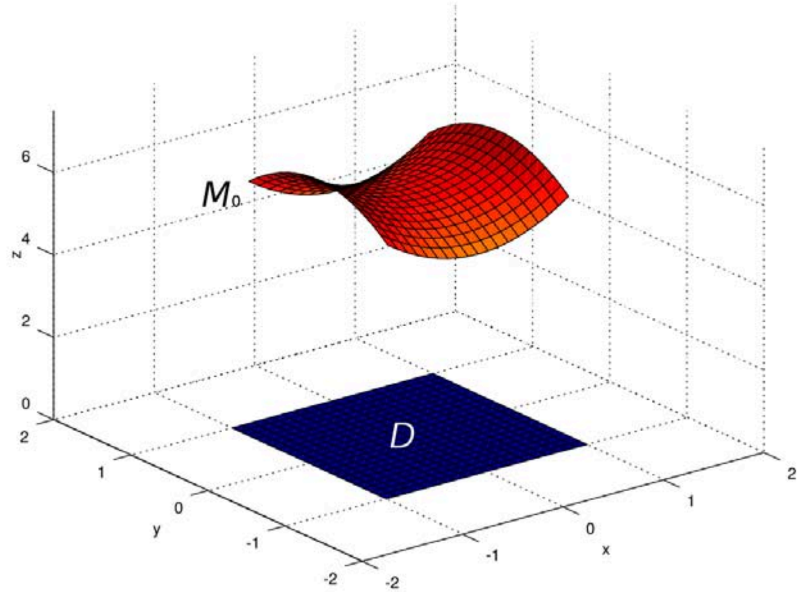
  ——极小曲面方程.

模型建立



$$M_0 : z = u(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

模型建立



- 拉格朗日证明了: 在所有定义在D上, 且在D的边界上取相同值的函数图像中, 若曲面 M_0 的面积是极小的, 则u满足极小曲面方程

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0.$$

模型建立

变分思想

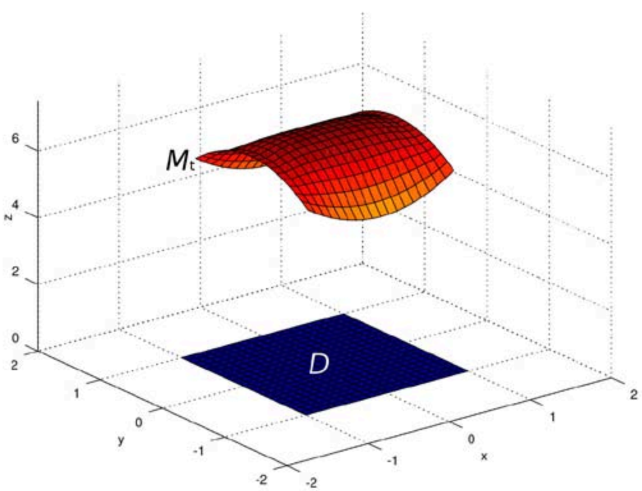
假设曲面M_0的面积是极小的，给它 一个摄动

$$M_t : z = u(x,y) + tv(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

其中$t \in (-1,1)$, $v(x,y)$是任意的函数，在D的边界上为0,

则M_t的面积 $$A(M_t) = \iint_D (1 + z_x^2 + z_y^2)^{1/2} dxdy$$

$$= \iint_D \left(1 + (u+tv)_x^2 + (u+tv)_y^2\right)^{1/2} dxdy.$$



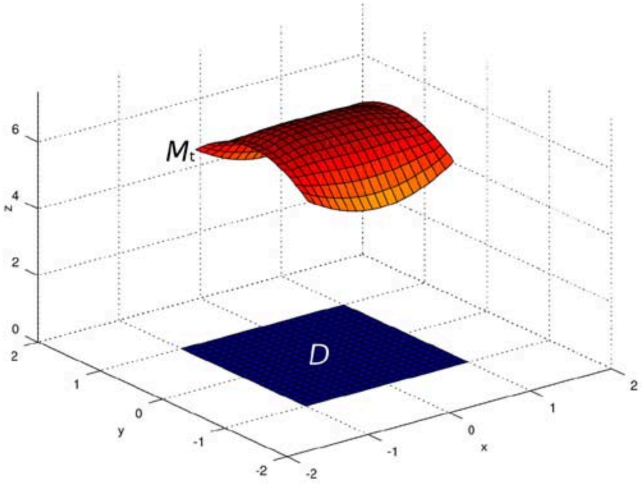
模型建立

$$A(M_t)=\iint_D (1+z_x^2+z_y^2)^{1/2}dxdy=\iint_D (1+(u+tv)_x^2+(u+tv)_y^2)^{1/2}dxdy$$

是t的一元函数.

由于$M_0: z=u(x,y)$的面积极小，$A(M_t)$在$t=0$处取极小值，

$$\text{所以}\frac{d}{dt}\big(A(M_t)\big)\big|_{t=0}=0.$$



面积的极小转化成了一元函数的极小

模型建立

直接计算，得到

$$\iint_D (1+(u+tv)_x^2+(u+tv)_y^2)^{-1/2}((u+tv)_x v_x+(u+tv)_y v_y)\,dxdy\,|_{t=0}=0,$$

$$\iint_D (1+u_x^2+u_y^2)^{-1/2}u_x\cdot v_x dxdy+\iint_D (1+u_x^2+u_y^2)^{-1/2}u_y\cdot v_y dxdy=0.$$

应用分部积分公式，有

$$-\iint_D ((1+u_x^2+u_y^2)^{-1/2}u_x)_x v dxdy-\iint_D ((1+u_x^2+u_y^2)^{-1/2}u_y)_y v dxdy=0,$$

$$\iint_D \left(((1+u_x^2+u_y^2)^{-1/2}u_x)_x+((1+u_x^2+u_y^2)^{-1/2}u_y)_y\right) vdxdy=0.$$

$$\boxed{\iint_D fv\,dxdy=0,\forall v \quad \Rightarrow \quad f\equiv 0}$$

模型建立

由函数v的任意性，在区域D中，

$$((1+u_x^2+u_y^2)^{-1/2}u_x)_x+((1+u_x^2+u_y^2)^{-1/2}u_y)_y=0.$$

积分恒等式化为了微分恒等式

进一步地求导、展开、化简，得

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0.$$

当u_x,u_y充分小时，方程可以近似写成

$$u_{xx}+u_{yy}=0.$$

它就是调和方程，也称拉普拉斯($Laplace$)方程.

方程求解

例. 求极小曲面方程

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0$$

形如$u=f(x)+g(y)$的解.

解. 设$u(x,y)=f(x)+g(y)$, 则

$$u_x=f'(x),\quad u_y=g'(y),$$

$$u_{xx}=f''(x),\quad u_{yy}=g''(y),\quad u_{xy}=0.$$

代入方程, 得

$$(1+g'(y)^2)f''(x)+(1+f'(x)^2)g''(y)=0.$$

北京师范大学 BEIJING NORMAL UNIVERSITY

方程求解

分离变量，有

$$\frac{f''(x)}{1+f'(x)^2} = -\frac{g''(y)}{1+g'(y)^2} = C_0 \text{ (常数)}.$$

当$C_0=0$时，易得

$$f(x)=C_1x+C_3, \quad g(y)=C_2y+C_4,$$

其中C_1,C_2,C_3,C_4为任意常数.

所以

$$u(x,y)=C_1x+C_2y+C_3+C_4.$$

这个线性函数在空间中 表示平面.

北京师范大学 BEIJING NORMAL UNIVERSITY

方程求解

当$C_0 \neq 0$时，在$\dfrac{f''(x)}{1+f'(x)^2}=C_0$两边关于$x$积分，可得

$$\arctan f'(x)=C_0x+C_1,$$

$$f'(x)=\tan(C_0x+C_1).$$

再在上式两边关于x积分，得

$$f(x)=-\frac{1}{C_0}\ln|\cos(C_0x+C_1)|+C_3.$$

同理可得

$$g(y)=\frac{1}{C_0}\ln|\cos(-C_0y+C_2)|+C_4,$$

其中C_1,C_2,C_3,C_4为任意常数.

方程求解

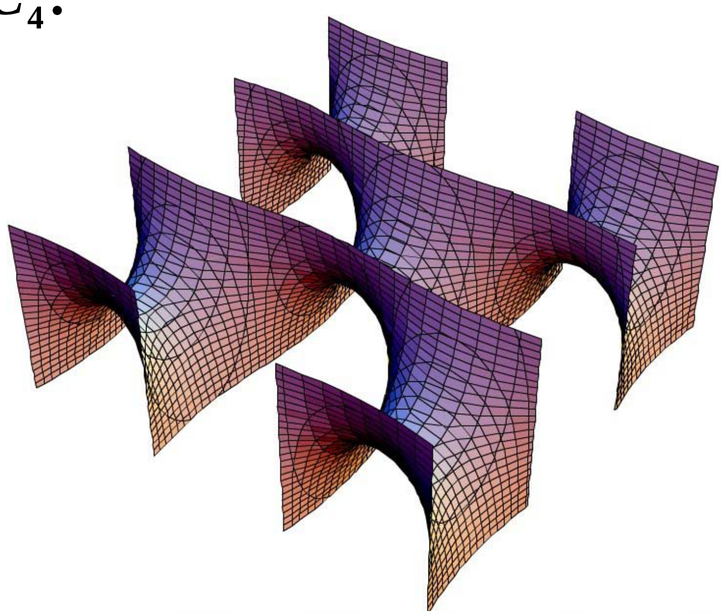
所以

$$u(x,y)=f(x)+g(y)$$

$$=-\frac{1}{C_0}\ln|\cos(C_0x+C_1)|+C_3+\frac{1}{C_0}\ln|\cos(-C_0y+C_2)|+C_4$$

$$=\frac{1}{C_0}\ln\left|\frac{\cos(-C_0y+C_2)}{\cos(C_0x+C_1)}\right|+C_3+C_4.$$

这个解是由1834年由德国数学家舍克尔($H.Scherk$)给出的，其图形称为舍克尔曲面.



北京师范大学 BEIJING NORMAL UNIVERSITY

课后作业

（1）求解极小曲面方程

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0$$

的径向对称解$u(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$,获得欧拉的悬链面解.

拓展阅读

*（2）Bernstein定理（1915）：极小曲面方程在全平面上的解只能是一次多项式.

请阅读下面的论文：

J. C. C. Nitsche, Elementary proof of Bernstein’s theorem on minimal surfaces, Ann. of Math., 66 (1957), 543-544.

http://www.jstor.org/stable/1969907

S. Bernstein
（1880-1968）

北京师范大學

欢迎各位老师同学指正！

jgbao@bnu.edu.cn