

偏微分方程:宇宙客观真理的化身

叶高翔

2016-07-23

一般而言,人类的科学事业大致可分为两个阶段:第一阶段是从公元前 3000 年至公元 16 世纪,我们把它称为 经验科学阶段;第二阶段是从 16 世纪至今,科学发展进入了一个突飞猛进的阶段,我们称之为 精确科学阶段。

01 缺乏精确性的经验科学

在经验科学阶段,人类的科学事业处于初级发展时期,科学发展主要依靠人的“经验”。经验从实践中来,一般以定性为特征,很少采用精确数字描述,基本不用数学,至多采用初等数学。经验科学的一般范式可归纳如下:

因为前人操作 A 过程得到 B 结果,所以后人也可以操作 A 过程得到 B 结果,并且 A 过程和 B 结果均为定性或半定量描述,带有主观痕迹。

在经验科学阶段,人类在陶瓷、冶炼、火药、造纸、古代医术、几何光学、静磁学、静电学、天文学、声学等方面取得了许多重大突破。

在古代中国,中医学的发展带有鲜明的经验科学特征,例如战国时期成编的《黄帝内经》、明朝时期成书的《本草纲目》等均为典型的经验科学论著。中医的明显疗效使人们确信此类经验方法的有效性,并在过去几千年的历史长河中不断发展和传承。

人们到中草药行抓药,只见药剂师凭借手感,将几两或几钱的某种草药分成数堆;煎熬中草药时,病人被告知要“温度适中”或“文火煎药”,但没有被告知具体的温度和升温降温曲线。中医学用草药治病,但不必知道草药中的具体化学成分。当年,李时珍知道“用青蒿一把,加水二升,捣汁服”可以治疗疟疾寒热,但他并不知道草本植物青蒿内的化学成分青蒿素的分子式及其精确含量。当老中医将手中的狗皮膏药放在明火上烘烤后贴在病人患处时,他并不知道此时那张狗皮膏药的实际温度,也不知道药分子向皮肤内扩散的速度和浓度衰减曲线。

从精确科学的角度来看,中国古代发明的狗皮膏药对关节炎等疾病的治疗原理是现代物理学中“原子分子扩散原理”的最早应用,而扩散原理偏微分方程

(1)

的建立和精确求解则是在牛顿和莱布尼茨发明微积分理论之后完成的。

经验科学以定性的“经验”为基础,直接导致以下三个问题:

(1)由于定性的“经验”往往带有一定的主观性,因此以经验为基础的推理或判断失误概率较大,容易导致错误的结果。

例如,炎炎夏日,当我们经太阳暴晒后,来到树荫底下时,即刻感到凉快;但当我们从空调房间出来,来到同样的树荫底下时,却会感到很热。这是因为人对温度的感知不仅取决于其绝对值的大小,还要受温度正负变化量的影响。

(2)定性的“经验”导致精确重复实验的难度很大,“经验”和相关技术的传承成为难题,导致大量优秀技术失传。

例如,在陶瓷的烧制过程中,如果仅凭肉眼观察炉火颜色来判断炉温,对整个烧制过程中的升温、保温和降温只凭经验控制,那么,即使偶尔获得少量精美的陶器、瓷器,也很难再次精确重复,所获产品的成品率不高,其质量的重复性和一致性也相对较低。

(3)在经验科学阶段,定性归纳推理成为主要的推理范式。由于没有采用精确的高等数学进行抽象概括和演绎推理,因此要揭示本质性的自然规律几乎没有可能。

2 蕴藏真理化身的精确科学

16 世纪以后,人类对自然规律的揭示向纵深发展,精确科学研究范式逐渐成形。据说在 1590 年,意大利物理学家伽利略曾在比萨斜塔上做自由落体实验,将两个大小不同的铁球从塔顶相同高度同时扔下,结果两个铁球同时着地,由此发现了自由落体运动的规律。此外,伽利略还发现了经典力学中的相对性原理、惯性定律和运动合成原理,发明了望远镜、温度计,证明了“日心说”、太阳自转等。尤其是他把数学方法与实验测量相结合,将理论与实验相互印证,开创了现代精确科学的研究范式:

- (a) 精确实验,总结实验规律;
- (b) 提出假说,定量解释实验规律;
- (c) 根据假说,利用数学演绎和逻辑推理,获得推论或预言;
- (d) 对推论或预言进行客观、精确定量、任意可重复的实验检验;
- (e) 修改理论及假说;
- (f) 实验检验假说和理论;

.....

上述精确科学研究范式由伽利略率先倡导,后人不断完善而成,故也被称为

“伽利略科学研究范式”，它是现代一切自然科学的一般研究范式。该范式要求对实验和理论进行客观、精确定量、任意可重复地循环对比、修正和提高，从而不断提升理论与实验的精确程度和符合程度，最终揭示宇宙客观规律(真理)。

1 客观、精确定量、任意可重复

对精确科学研究范式而言，“客观”是指科学实验结果的客观性，即只要实验条件严格一致，实验结果便唯一确定，与实验操作者、实验进行的时间或地点等均没有关系；“精确定量”要求科学实验必需用数字、函数或微分方程精确定量描述和演绎；“任意可重复”是指科学家在时间、体力、脑力、资金、仪器设备等允许的范围内，可任意次重复实验过程。请注意，这里并没有要求无限次可重复。

从“可重复”上升至“任意可重复”，不仅代表实验重复次数的提升，更规定科学对实验重复次数的选取法则；从“无限可重复”下降至“任意可重复”，表明科学实验重复次数的有限性和相对性，体现了科学的真实意义所在，也告知了科学的局限性。

现代文明创造了一个又一个精确科学的奇迹，如太空飞船与处于某轨道上的太空实验室对接、高超音速导弹拦截、超大规模集成电路制备、原子分子操作、转基因技术等。

现代科学对精确度的追求永无止境。目前，量子力学中普朗克常数的最新测量值为 $h = 6.62606876(52) \times 10^{-34}$ 焦耳·秒；电子磁矩的最新测量值为 $\mu_e = 1.001159652193(10) \mu_B$ ，其中 μ_B 为一个常数；从伽利略开始，人们对光速测量一直抱有浓厚兴趣，现在测得的最高精确度为 $c = 299792458$ 米/秒；目前人类对电压的测量精确度约为 10^{-17} 伏特，对磁场的测量精确度约为 10^{-15} 特斯拉，对空间距离的测量精确度约为 10^{-10} 米，对时间的测量精确度约为 10^{-35} 秒，如此等等。人们仍不满足，测量精确度仍在不断提高。

在上述精确科学研究范式中，有一个过程十分苛刻：利用数学演绎和逻辑推理获得推论或预言，并与更精确的实验进行客观、精确定量、任意可重复的反复验证。换言之，精确科学不仅要求实验测量越来越精确，而且要求理论越来越能够精确描述、计算、演绎并预测实验规律，揭示实验现象背后的深层宇宙规律。

16 世纪以后，以微积分为代表的现代高等数学开始诞生并不断发展，为精确科学的发展提供了强有力的支持。可以说，几百年来，精确科学紧紧伴随着高等数学的发展而发展。

爱因斯坦的相对论是精确科学的理论典范，其中采用的现代高等数学包括微积分、线性代数、张量分析、群论、拓扑学、微分几何等，其所得结论的精确度

令世人赞叹不已!迄今为止, 诸如“引力红移”、“光线弯曲”等已得到极高精确实验的验证。此外, 还有其它诸多精确的理论预言, 如引力子等, 由于精确度太高, 实验难度极大, 迄今尚未得到实验的直接验证。



图 1、图 2 屹立在德国乌耳姆城中的爱因斯坦诞生纪念碑。碑文: 1879 年 3 月 14 日, 阿尔伯特·爱因斯坦诞生于此地的房屋。

人们不禁要问: 为什么要花费如此大的代价, 任意可重复地进行精确的实验并与精确的理论循环验证呢? 事实上, 精确的实验测量数据与严密逻辑的高等数学演绎, 两者将实验与理论进行客观、精确定量、任意可重复地循环验证; 而实验数据测量越精确, 重复次数越任意, 与高等数学精确演绎结果越吻合, 越能揭示本质性宇宙客观规律, 由此建立的科学理论也越逼近宇宙客观真理。

2 精确定量的极限

精确是相对的, 不精确是绝对的。所谓精确, 是一个相对的概念, 并具有鲜明的时代特征。

数学是精确的, 它可无限逼近绝对精确值, 然而, 当采用数学这一工具(包括大型计算机)计算实际科学问题时, 必需建立简化模型, 进行近似计算, 不可能绝对精确。逻辑学是严密的, 它可让逻辑漏洞趋向于零, 然而, 当我们将逻辑学原理应用于实际科学问题时, 逻辑漏洞不可避免。

由于受仪器设备精确度极限、周围环境变化、人为因素等影响, 人类所进行的一切实际科学实验均存在误差, 从来没有绝对精确而无误差的科学实验。科学的任务并不是消除误差, 而是减小误差, 将误差减小至实际应用的允许范围之内。

现在如此，将来也必然如此。当然，随着人类文明的不断进步，各种实际应用所允许的误差范围也必将越来越小。因此，物理学、化学、材料科学、地球科学、生命科学等自然科学必然是近似的，是相对真理。

20 世纪 20 年代，量子力学诞生，其中的“海森堡不确定原理”告诉我们：对于某一微观粒子，假如其坐标为 x ，动量为 p ，能量为 E ，寿命为 t ，它们的不确定范围分别为 Δx ， Δp ， ΔE 和 Δt ，则满足不确定关系

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h$$

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq h,$$

(2)

其中 h 为普朗克常数。上式的文字表达如下：微观粒子的坐标和动量不可能同时被确定；微观粒子的能量和寿命不可能同时被确定。两个不确定量的乘积要大于一个常数，我们永远无法让其中某一个量的不确定范围等于零。由于上式中的能量和动量均具有不确定范围，所以在此精确度之下，能量和动量均是不守恒的。当然，由于 h 值很小，因此这个所谓的“不确定性”是很小的，但它是客观存在的，我们无法通过提高仪器测量的精确度或提高观察者的素质加以克服。由此我们看到，在不断精确认识客观世界的道路上，人类第一次触及到了宇宙的一个极限，一个不可逾越的极限！

20 世纪 70 年代建立的非线性科学理论告知我们：线性是相对的，而非线性则是绝对的。非线性效应可导致结果对原因微小变化的极其敏感性，其敏感程度是目前任何办法(包括高灵敏探测器、超大型高速计算机等)都无法精确预测的。

现代人类终于明白了：生活于天地之间的我们，并不可以“为所欲为”，我们对宇宙客观规律及真理的描述和揭示，其精确度是有极限的。“精确科学”中所谓的“精确”是相对的，由此获得的“宇宙客观真理”也是相对真理。

3 宇宙客观真理的化身

随着精确科学的不断发展，一个又一个宇宙客观真理相继被揭示。人们发现，在实空间中，宇宙客观真理一般由偏微分方程描述。

例如，宇宙中一切宏观低速的机械运动均可由牛顿方程

(3)

描述。

经典电磁场运动规律由麦克斯韦方程组

(4)

描述，它揭示并统一了宏观的电、磁、光的运动规律。

量子力学中的薛定谔方程是描述微观、低速情况下物质运动普遍规律的二阶线性偏微分方程，如下式所示：

(5)

其中 Ψ 为波函数， \mathbf{r} 为空间坐标向量， x 、 y 、 z 为三维空间坐标， t 为时间， m 为微观粒子的质量， V 为势能，虚数单位 $i =$

，约化普朗克常数

焦耳·秒。薛定谔方程在量子力学中的地位如同牛顿方程在经典力学中的地位一样。



图 3 维也纳大学校园内的薛定谔雕像，碑文即著名的薛定谔方程。

类似的例子还有很多，如高能物理中描写自旋为零的基本粒子(如 π 介子等)运动规律的克莱因-戈登方程为二阶偏微分方程；描写自旋为

的基本粒子(如电子、中微子等)运动规律的狄拉克方程为一阶偏微分方程；广义相对论中描述空间物质能量、动量分布与空间弯曲关联的爱因斯坦场方程为二阶张量方程(其实它是一个二阶非线性偏微分方程组)等。

此外，还有一些其它情况：

(a) 类似牛顿万有引力定律

，即两个天体之间的吸引力与它们之间的距离平方成反比，与它们的质量乘

积成正比， G 为引力常数。)那样的宇宙真理，仅仅是未知函数、变量和常量之间的函数关系式，不能算是偏微分方程。事实上，此类定律只是更精确理论的近似表述，例如牛顿万有引力定律是广义相对论中爱因斯坦场方程在特殊情况(距离较近、引力较弱和速度较慢)下的近似而已。

(b) 类似量子力学中德布罗意波粒二象性假说(

，即微观粒子的波长 λ 和动量 p 成反比， h 为普朗克常数。)那样的宇宙真理，似乎也不是微分方程。但事实上，它们是建立相关偏微分方程的基础性假说，已被包含在相应的偏微分方程之中，例如上述薛定谔方程(5)式已将德布罗意波粒二象性假说包含其中。

综上所述，精确描述宇宙客观真理的是一个不同种类的偏微分方程。根据不同的边界条件，经过严格且巧妙的数学求解和演绎，便可获得一个又一个科学推论，解决一个又一个科学问题，创造一个又一个人类文明的奇迹。因此，这些偏微分方程当之无愧被誉为“宇宙客观真理的化身”!

那么，为什么宇宙间最基本的客观真理一般由如此简洁的偏微分方程所描述呢?换言之，为什么此类偏微分方程可以充当宇宙真理的化身呢?根据偏微分方程的诸多性质，其原因可回答如下：

(i)宇宙是不断运动变化的;

(ii)宇宙中的常量、变量以及变化率之间是相互精确联系的;

(iii)宇宙客观真理是简洁、统一和玄妙的。

4 真理化身如何来到人间?

应该指出，作为宇宙客观真理化身的诸多偏微分方程并不是被严格推导而来的，而是由科学巨人们逐个“建立”的。首先，这需要大量的前期理论和实验准备，当新实验结果与原理论发生矛盾并日益尖锐化时，原理论的缺陷和局限性不断显露。待时机成熟，极少数科学巨人根据他们独特的哲学观、敏锐创新的思维方式、扎实的理论功底以及丰富的科研经历，使智慧“灵感”突然被触发，从而提出革命性的科学假说，建立全新的偏微分方程。这些方程精确、简洁且玄妙，如此“天机”乃宇宙主宰者“事先设定”，人类可揭示而不可更改。

应该承认，提出革命性的科学假说，建立全新的偏微分方程，的确带有某些主观“猜测”的成分。不过，科学巨人们对客观真理玄妙、精确和深刻的揭示绝不是一般意义上的“猜测”。事实上，这种“猜测”带有极其苛刻的前提条件，非天才不能为之。剖析一个个成功“建立”偏微分方程的事例，可以得出如下结论：

(1) 提出革命性的科学假说，建立全新的偏微分方程，是伟大科学家智慧“灵感”的具体表述，以当时的非理性思维为特征；

(2) 智慧“灵感”的触发需要扎实的专业基础、完备的知识结构、丰富的科学研究经历以及非凡的睿智与勇气；

(3) 智慧“灵感”的触发还与时代、学科、环境以及其它偶然因素等相关联。

除了上述三个必要条件外，还需要科学家集中智力和体力，长期聚焦于某一科学难题，理清该难题的前因后果、问题关键、难点实质、相互关联等问题。然后，经过长期深入的形象和抽象思维思考，在某些“偶然因素”的触发下，科学家的智慧“灵感”突然闪现。触发“灵感”的形式多样，如在思想交流时、在比较及联想时、在长期深入思索后，甚至在梦幻中等。

那么，智慧“灵感”究竟是如何被触发的呢？类似“天才之举”、“超感官知觉”、“天人感应”、“神人下凡”等超力量解释当然可以暂时满足我们的好奇心，但事实上，智慧“灵感”的触发与科学家的非凡睿智、思维方式、知识结构、长期顽强的探索及心理素质等因素有关。此外，智慧“灵感”的触发源自心灵深处，与科学家大脑中的脑细胞、分子、原子、离子、电磁场等运动及相互作用玄妙关联。遗憾的是，迄今为止，人类尚无法揭示触发智慧“灵感”的真正微观机理，或许永远也不可能揭示！

参考文献

[1] 叶高翔，科学思辨二十四则，商务印书馆，2015.

此文是作者应《数学与人文》编辑部之约，在《科学思辨二十四则》一书(2015年商务印书馆出版)部分内容的基础上改写而成。