北京师范大学 2020 ～ 2021 学年第一学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：偏微分方程　　　任课老师姓名：保继光

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ☒　开卷 ☐　其他 ☐

院（系）：________　　专业：________　　年级：________

姓名：________　　学号：________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

阅卷老师（签字）：________

一. (10分): 设 α 是一个参数. 求出二阶方程

$$(2x+\alpha)u_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}+u_x=y$$

的椭圆型区域.

二. (10分): 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xy}=x^2y, \\ u(0,y)=e^y,\ u(x,x)=\cos 2x. \end{cases}$$

三. (10分): 设 a,b 是正常数, 对电报方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}+bu_t=0, & -\infty<x<\infty,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

做 Fourier 变换, 写出得到的常微分方程初值问题.

四. (15分): 已知 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ 在 Ω 中满足 $\Delta u \geq 0$, 试证

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

五. (15分): 设 a, R 是正常数, $b(x,t), c(x,t)$ 是 $[-R,R] \times [0,+\infty)$ 上的有界函数. 证明初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u_t = f(x,t), & -R < x < R,\ t > 0, \\ u(-R,t) = u(R,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & -R \leq x \leq R \end{cases}$$

的解在 $C^2([-R,R] \times [0,+\infty))$ 中是唯一的.

六. (20分): 求解几何光学方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_x^2 + u_y^2 = 1, \\ u(\cos s, \sin s) = 0, \quad 0 \leq s \leq 2\pi. \end{cases}$$

七. (20分): 求解放射衰变问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + Ae^{-bx}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

其中 a, b, A, l 都是正常数.

2021年1月11日