北京师范大学 2019 ～ 2020 学年第一学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：偏微分方程　　　　任课老师姓名：保继光

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ☒　开卷 ☐　其他 ☐

院（系）：________　　专业：________　　年级：________

姓名：________　　学号：________

题号	一	二	三	四	总分
得分					

阅卷老师（签字）：________

一. 填空题(16分):

经过近300年的发展, 偏微分方程紧密联系 (1) 、 (2) 等方面的需要, 对一阶方程和二阶线性方程的适定性(即解的 (3) 、 (4) 和 (5))已经有了系统的了解, 形成了广泛使用的有效方法, 比如 (6) 、 (7) 和 (8) 等.

二. 简答题(18分):

1. 写出下列热传导方程Cauchy问题的线性叠加原理：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

2. 对Cauchy问题

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0,\ -\infty < x < +\infty,\ y > 0, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = 0,\ -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

关于x进行Fourier变换, 写出得到的常微分方程初值问题.

3. 设u是弦振动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \ge 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = x^2(1-x), \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

的解, 求

$$\int_0^1 \left(u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)\right) \mathrm{d}x.$$

三．计算题(54分)：

1. 求解一阶线性偏微分方程Cauchy问题

$$\begin{cases} xu_x - yu_y = u, \\ u(s,3s) = 1+s^2,\ \ s>0. \end{cases}$$

2. 化简二阶线性偏微分方程

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} + u_x + (1-\sin x - \cos x)u_y = 0,$$

并求出它的通解.

3. 求解Laplace方程Dirichlet问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0<x<1, 0<y<1, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u(x,1) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad 0 \le y \le 1, \end{cases}$$

其中$\varphi(x)$是已知函数.

四．证明题(12分)：

1. 设u是弦振动方程Cauchy问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

的解, 其中a是一个正常数, $\varphi(x)$和$\psi(x)$是光滑函数, 且当$|x| \ge M$时, $\varphi(x) = \psi(x) = 0$. 证明: 当$|x| \ge M + at$时, $u(x,t) = 0$.

2. 已知 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$满足Possion方程Dirichlet问题

$$\begin{cases} \triangle u = -1, \quad x \in \Omega, \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

试证: 对任意的$x_0 \in \Omega$, 有

$$\frac{1}{2n} \min_{x \in \partial\Omega} |x - x_0|^2 \le u(x_0) \le \frac{1}{2n} \max_{x \in \partial\Omega} |x - x_0|^2.$$

2020年1月8日