从Laplace方程说起

-----偏微分方程方向简介

保继光

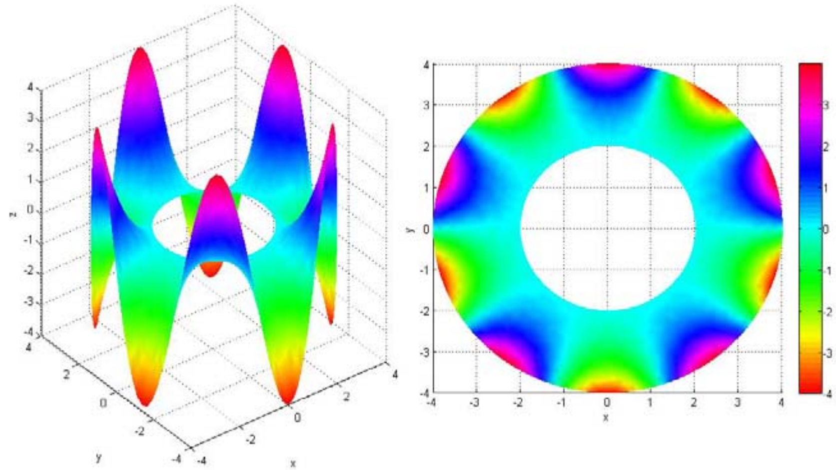
http://math0.bnu.edu.cn/~jgbao/

北京師範大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

□ Laplace方程

$$\Delta u := \sum_{n=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

是最简单、最典型的二阶线性偏微分方程，其解称为调和函数（一元线性函数的高维推广）.



Pierre-Simon Laplace
（1749 - 1827）

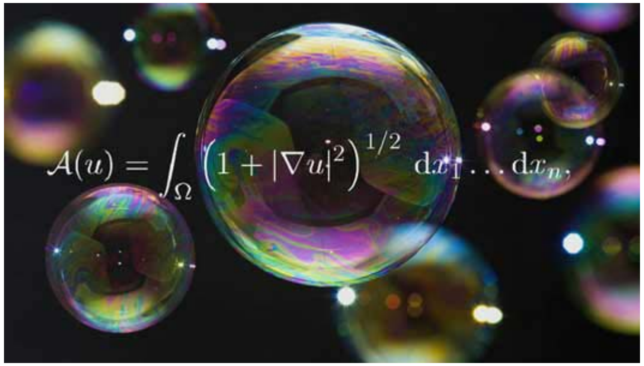
- Liouville性质（1844）

  全空间上的半有界的解都是常数.

- 推论

  全空间上$\Delta u=1$的凸解都是二次多项式.

Joseph Liouville
（1809-1882）

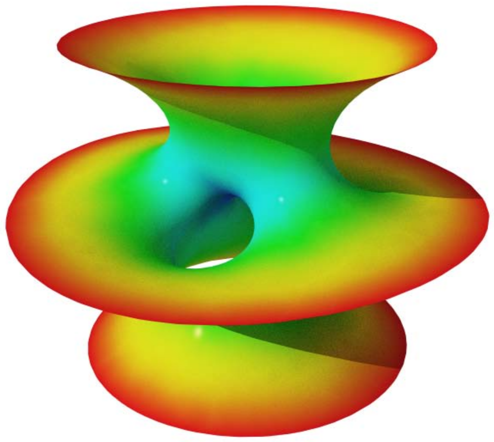


□ 曲率问题

➢ 极小曲面方程

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0.$$

影响人类文明的美丽方程式（当 u_x, u_y小的时候，近似于Laplace方程）



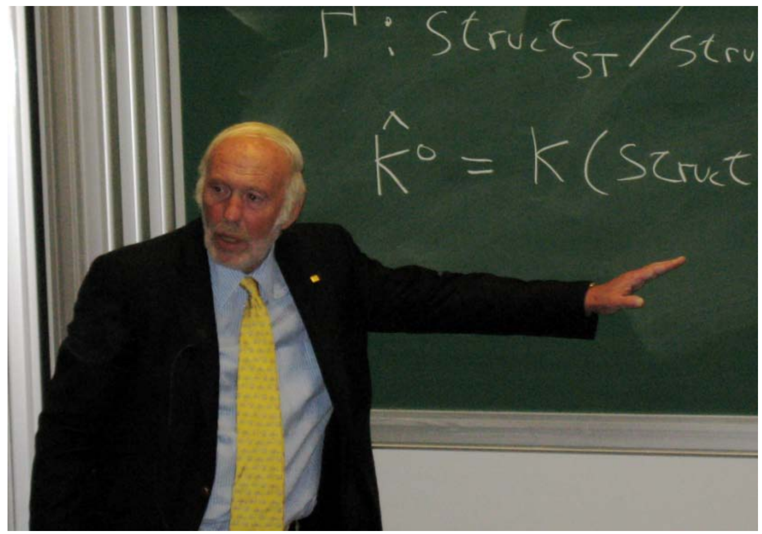
Bernstein定理（1915）：全平面上的解只有一次多项式;

Almgren（1966）：3维空间中的解也只有一次多项式;

Simons（1967）：小于等于7维空间中的解都是一次多项式.

《金融时报Financial Times》：地球上最聪明的亿万富翁（年净赚15亿美元）

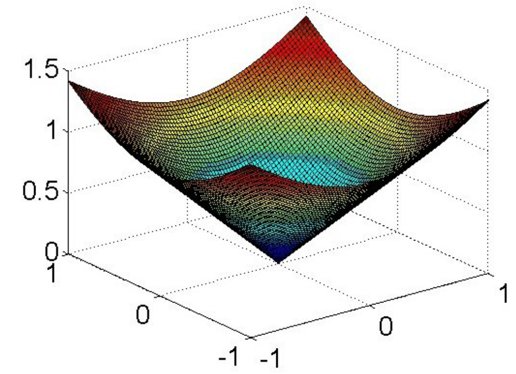
Sergei Bernstein
（1880-1968）

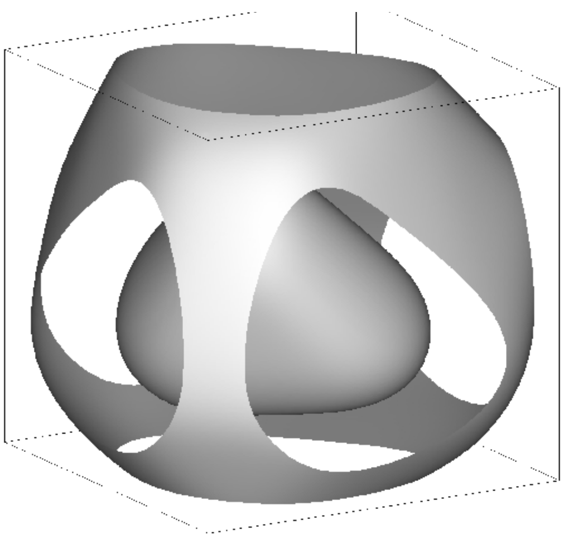


James Harris Simons
（1938-）

- Monge- Ampère 方程

$$\det D^2 u = 1$$





Gaspard Monge
(1746-1818)

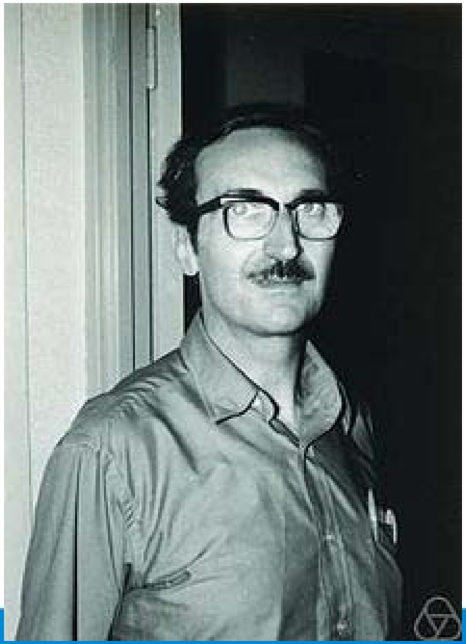
André-Marie Ampère
(1775-1836)

Jorgens （1951）： 全平面上的解一定是二次多项式.

Calabi （1954)： 当n小于等于5时，全空间上的凸解一定是二次多项式.

Pogerolov （1972)： 对任何维数，全空间上的凸解一定是二次多项式.

Konrad Jörgens
(1926–1974)



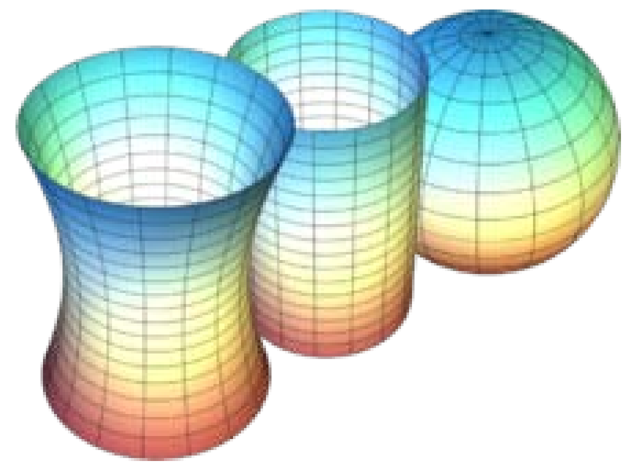
Eugenio Calabi
(1923-)

Aleksei Pogorelov
(1919 – 2002)

➤ **预定Gauss曲率问题**

$$\det D^2 u - K(\mathbf{x})(1+|Du|^2)^{(n+2)/2} = 0.$$

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)



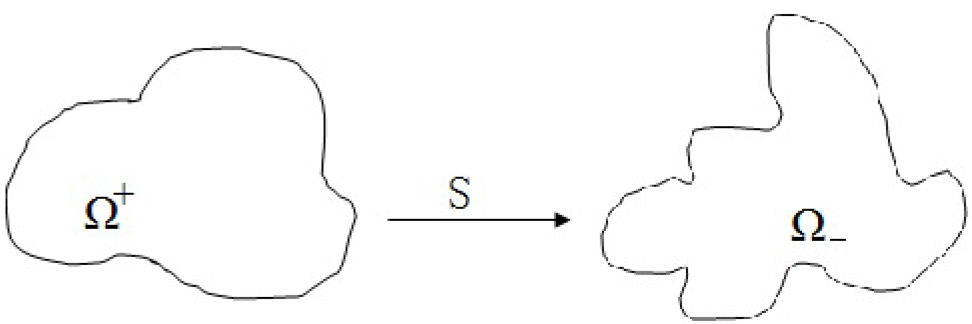
K(x) = -1,0,1的曲面

北京师范大学
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

- Monge-Kantorovich最优运输问题（堆沙问题）

1781年，蒙日(Gaspard Monge)提出了一个最优运输问题(也称堆沙问题)，考虑把一定量的沙子从一个地方运到另一个地方，使总的运输费用最小的最优途径. 1942年，坎托罗维奇(Leonid Kantorovich)对这个问题提出了概率测度的描述.

$$\det D^2\phi(x) = \frac{f(x)}{g(S(x))}$$



Leonid Kantorovich
(1912-1986)
1975年获诺贝尔奖

- 图像匹配问题

我们常用的谷歌，百度等搜索引擎都是按照关键词来匹配的. 人们尝试通过图像的匹配进行搜索：输入一个图像，在网上寻找最相近的图像. 黑白照片由灰黑色点组成，可以看成是一个概率分布：该点的颜色越黑，就认为该点的概率密度越大. 于是两张照片匹配问题就转化成为两个概率分布的匹配问题.

1991年，白罗尼(Yann Brenier)发现，如果这两个分布都是连续分布，那么这个匹配对应地可以写成一个梯度映射y=Du(x)，其中u是一个凸函数，且满足

$$\det D^2 u = \frac{f(x)}{g(Du)}.$$

Otto Hesse (1811-1874)

- Hessian方程

$$\sigma_k(\lambda(D^2u)) = 1$$

其中λ是u的Hessian矩阵的特征根，是λ的k次初等多项式

$$\sigma_k(\lambda) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}$$

当k=1时，它就是Laplace方程；当k=n时，它就是Monge-Ampere方程.

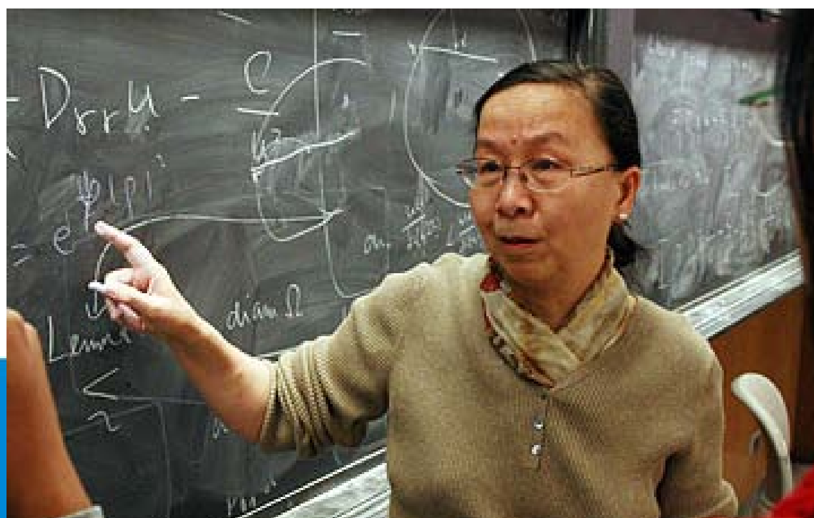
1844年，Liouville证明了k=1时的情形：Δu=1的凸解一定是二次多项式.

2010年，Chang和Yuan证明了k=2时的情形.

2003年，对一般的k，我们证明了：在二次增长的条件下，

$$\sigma_k(\lambda(D^2u)) = 1$$

的凸解一定是二次多项式.



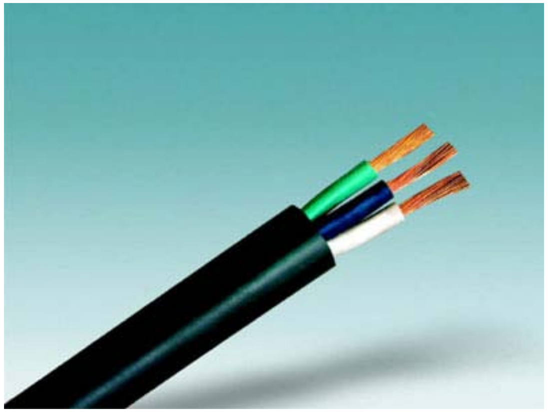
Sun-Yung Alice Chang（1948- ）
美国科学院院士

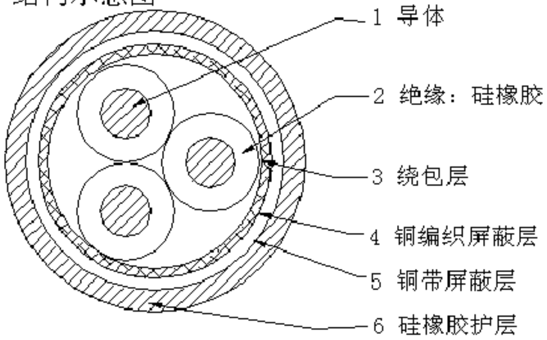
□ 传导问题

Lamé方程组的简化形式

$$\operatorname{div}((1+(k-1)\chi(\Omega))\nabla u)=0$$

k=1是就是Laplace方程.





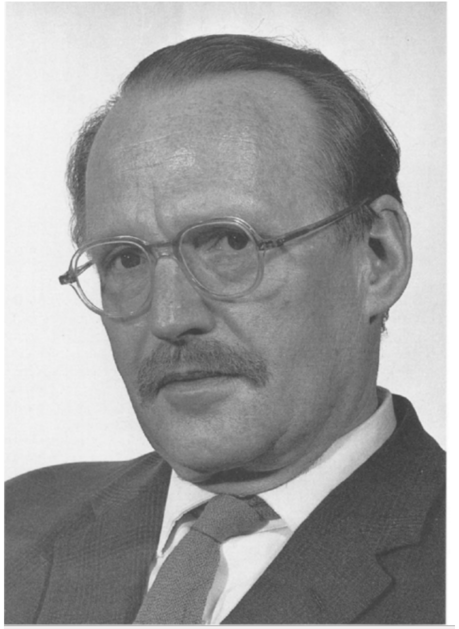
Gabriel Lamé
(1795-1870)

- Eshelby猜想(1957)

$$\begin{cases} \operatorname{div}((1+(k-1)\chi(\Omega))\nabla u)=0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ u(x)-a\cdot x=O(|x|^{1-n}) & \text{as } |x|\to\infty, \end{cases}$$

若Ω是一个椭球，容易证明：对任何的向量a，解在Ω中都是线性的；

反过来，若对任何的向量a，解在Ω中都是线性的，问： Ω是一个椭球吗？



John Douglas Eshelby
(1916-1981)

强 Eshelby 猜想 (Ru-Schiavone; 1996)

当 $n = 2$ 时，若对某个a，解在Ω中都是线性的，则Ω是一个椭圆.

弱 Eshelby 猜想 (Kang-Milton; 2008)

当 $n = 3$ 时，若对任何的a，解在Ω中都是线性的，则Ω是一个椭球.

2014年，我们在 $k=0$（绝缘）和 $k=\infty$（超导）的情形，获得了Eshelby 猜想.

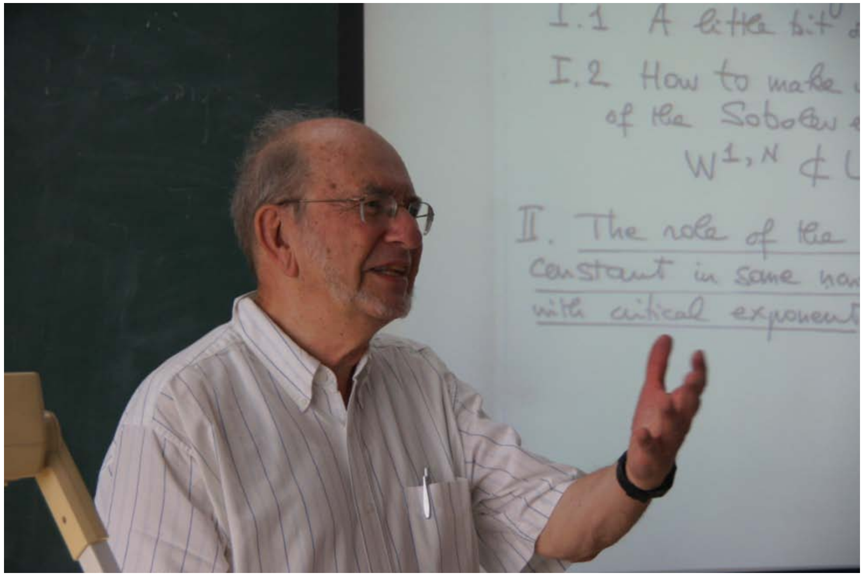
一个有用的引理(Dive, 1931; Nikliborc, 1932) Ω是一个椭球的充要条件

$$\int_{\Omega} \Gamma(x-y)dy = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i x_i^2 + C, \quad x \in \Omega,$$

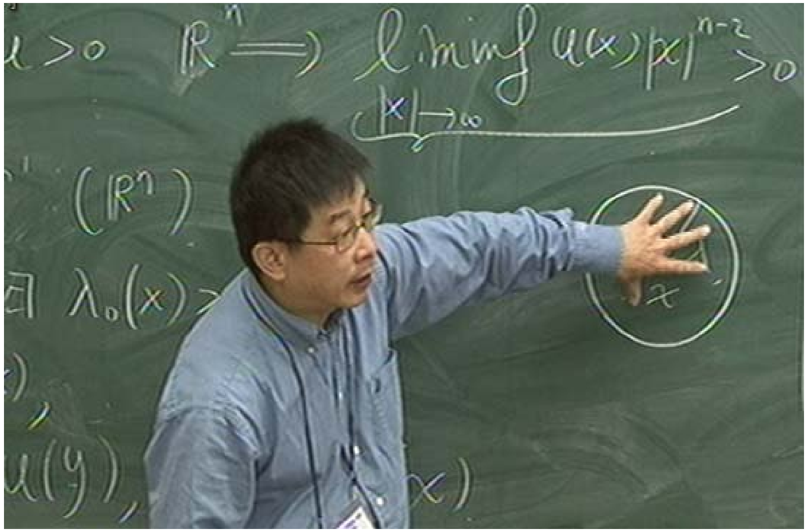
其中Γ是Laplace算子的基本解.

□ 北京师范大学的偏微分方程团队

- 蒋硕民(1913-1992)是我国偏微分方程学科的先行者
- 1959年北京师范大学偏微分方程教研室成立
- 1985年开始招收硕士生
- 2002年开始招收博士生



- 2005年，H. Brezis教授被聘为名誉教授. 他是非线性泛函分析和偏微分方程方面的主要领导者之一，美国Rutgers大学教授，法国科学院院士、欧洲科学院院士、美国科学院外籍院士、罗马尼亚科学院外籍院士、西班牙科学院外籍院士、比利时科学院外籍院士.



- 李岩岩，教授，博士生导师，教育部长江学者讲座教授，国家千人计划入选者，国际数学家大会45分钟报告人，美国首届数学会会士，Alfred P. Sloan奖获得者，美国Rutgers大学资深教授，非线性分析中心主任. 研究方向：几何、材料、流体中的偏微分方程。

北京师範大學
BEIJING NORMAL UNIVERSITY

- 保继光，教授，博士生导师；获宝钢优秀教师特等奖、国家级高等教育教学成果2等奖等奖励；任教育部高等学校数学类专业教学指导委员会委员、教育部高中数学课程标准修订组成员、北京数学会监事长、《数学通报》主编、《数学进展》副主编、谢宇教育基金会总裁等职，享受国务院政府特殊津贴。研究方向：几何、材料、生物中的偏微分方程。

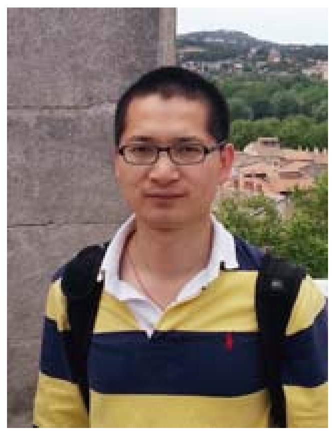
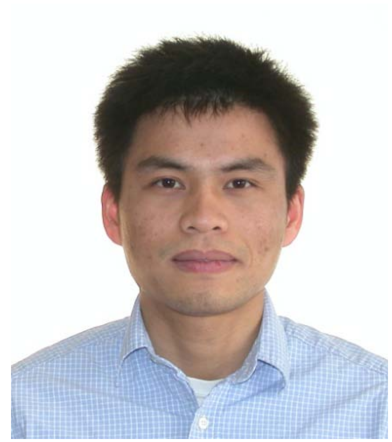
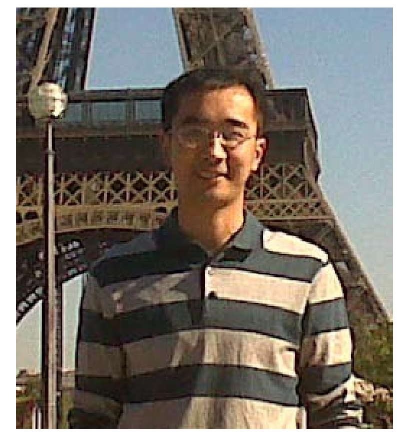
- 唐仲伟，教授，博士生导师，学院党委书记兼副院长

  研究方向：非线性分析、薛定谔方程、椭圆方程

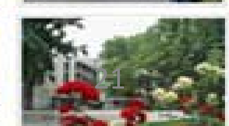
- 许孝精，教授，博士生导师，学院副院长兼副所长

  研究方向：流体动力学中的偏微分方程组的适定性

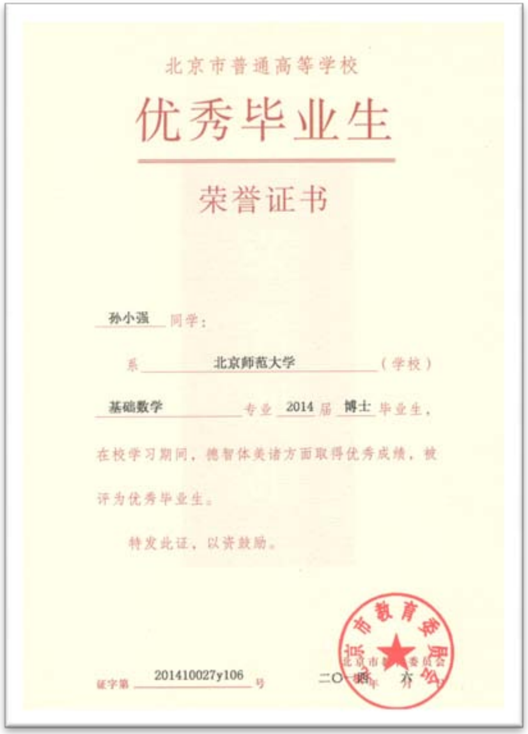
- 李海刚：副教授，博士生导师，材料学和几何学中的偏微分方程理论
- 苏喜锋：讲师，硕士生导师，动力系统、数学物理、非局部方程
- 熊金钢：副教授，硕士生导师，偏微分方程与几何分析
- 薛留堂：副教授，硕士生导师， 流体动力学方程的数学理论的研究



- 已毕业研究生30多人
- 在校研究生近20人


北京市普通高等学校

优秀毕业生

荣誉证书

孙小强 同学：

系 北京师范大学 （学校）

基础数学 专业 2014 届 博士 毕业生，

在校学习期间，德智体美诸方面取得优秀成绩，被评为优秀毕业生。

特发此证，以资鼓励。

证字第 201410027y106 号

北京市优秀博士论文

- 熊金钢（2013）

北京市优秀毕业生

- 孙小强（2014）
- 叶专（2016）

国家奖学金

- 张伟（2012）
- 曹絮（2013）
- 王宠（2014）
- 王博（2015）

利用国际学术资源培养研究生

- 3名博士生到美国Rutgers大学联合培养2年
- 2名博士生到美国Cornell大学联合培养2年
- 1名硕士生到美国Wake Forest大学联合培养2年

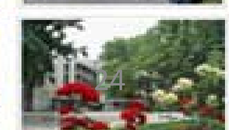
每月给你 $2000

毕业去向：

- 有的到国外（如：美国Wake Forest大学、加拿大宏利金融集团）工作
- 有的在大学（如：中山大学、北京理工大学、北京师范大学）工作
- 有的去国内高校（如：北京大学、复旦大学） 做博士后
- 有的在国内（如：北京大学、北京师范大学其他院系）读博士
- 有的在中学（如：北师大二附中、景山学校）任教
- 有的在公司（如：国泰君安证券股份有限公司）工作

Caffarelli院士参加答辩



□ 保继光招收数学教育的硕士生

- ➢ 教育部高中数学课程标准修订组成员
- ➢ 教育部高中数学课程标准测评组成员
- ➢ 中国大学先修课程数学专家委员会委员
- ➢ 中国少数民族数学教育专业委员会副理事长
- ➢ 北京数学教育中心学术委员会委员
- ➢ 数学教育核心刊物《数学通报》主编
- ➢ 高中数学教材（北师大版）副主编

北京師範大學

欢迎各位同学报考！

今晚7点与你相约1220！

国际的育人环境

强大的偏微团队　将助你成功！

充足的培养经费